This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

WIDENER LIBRARY
HX J4GY .

Digitized by Google

Phys 777.97

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Analytische Mechanik

von

Herrn La Grange

Mitgliede des National-Instituts der Künste und Wissenschaften zu Paris, der Akademien der Wissenschaften zu Berlin, Petersburg, Turin u. s. w.

---

aus dem Französischen

mit einigen Anmerkungen und erläuternden Zusätzen

von

Friedrich Wilhelm August Murhard.

Göttingen,

bey Vandenhoeck und Ruprecht 1797.

Digitized by Google

Phys 777.97

1851, Dec 2
Hasen Fund

Jacobi Lun, 572

Digitized by Google

Sr. Wohlgebornen

dem

Herrn Hofrath Lichtenberg.

Digitized by Google

Digitized by Google

Wohlgebohrner Herr,
Hochzuverehrender Herr Hofrath,

Nehmen Sie, vortrefflichster Lehrer, gegenwärtige Arbeit für das an, was sie nach meiner Absicht seyn soll — ein öffentliches Denkmal der lebhaftesten Dankbarkeit und innigsten Hochachtung womit ich Sie verehre. Es ist dies das einzige Mittel, das gewissermaßen in meinem Vermögen ist, meine Dankbarkeit Ihnen zu bezeigen. Sie haben alle meine bisherigen Bemühungen zur Beförderung der Wissenschaften, wofür mein Herz entflammt ist, mit Ihrem gütigen Beyfalle beehrt und mir mit Rath und That beigestanden. Wie bin ich im Stande alles dieses zu vergelten? —

Digitized by Google

Die Vorsehung gebe Ihnen und allen meinen verehrungswürdigen Lehrern lauter freudenvolle Tage, die Sie sosehr verdienen.

Ich habe die Ehre hochachtungsvoll zu beharren

Ew. Wohlgebornen

Göttingen,
im März 1797.

gehorsamster Diener
F. W. A. Murhard.

Digitized by Google

Vorrede des Verfassers.

Wir haben schon mehrere Lehrbegriffe der Mechanik, aber der Plan des gegenwärtigen ist ganz neu. Meine Absicht ging dabei dahin, die Theorie dieser Wissenschaft und die Kunst die dahin gehörige Aufgaben aufzulösen, auf allgemeine Formeln zu bringen, deren Entwickelung die zur Anflösung jeder Aufgabe nöthige Gleichungen gäbe.

Ich hoffe, die Art wie ich dies zu bewerkstelligen gesucht habe, wird nichts mehr zu wünschen übrig lassen.

Der Nutzen dieses Werks zeigt sich aber noch auf eine andere Art; es bringt die verschiedenen Grundlehren, die man bisher zur leichtern Auflösung der mechanischen Aufgaben, entdeckt hat, unter einen Gesichtspunkt, zeigt ihre Verbindung unter einander, und wie

Digitized by Google

wie eine von der andern abhängt, und setzt in den Stand über ihre Richtigkeit und ihren Umfang ein Urtheil zu fällen.

Ich theile es in 2 Theile, in die Statik oder die Theorie des Gleichgewichts, und in die Dynamik oder die Theorie der Bewegung; und jeder dieser Theile handelt besonders von den festen und von den flüssigen Körpern.

Man trifft in diesem Werke keine Figur an; die hier angewandten Methoden heischen weder Construktionen noch geometrische oder mechanische Schlüsse, sondern ganz allein analytische nach einem regulären und einförmigen Wege eingerichtete Rechnungen. Liebhaber der Analyse werden mit Vergnügen dadurch die Mechanik zu einem neuen Aste anwachsen sehen, und es wird ihnen lieb seyn ihren Umfang von mir dergestalt erweitert zu sehen.

Digitized by Google

Vorerinnerung.

Im Jahr 1788 erschien zu Paris in 4 maj. bey der Witwe Desaint Mechanique analytique par M. de La Grange. Man konnte es leicht vermuthen, was man für ein Werk zu erwarten habe, da ein so berühmter Veteran des Calkuls an der Stirn desselben als Verfasser stand, auch zeigte der gewählte Titel deutlich genug seinen Inhalt an. Herr de La Grange hatte sich dabei vorgesetzt, alle Grundlehren der mechanischen Wissenschaften unter einem Gesichtspunkt darzustellen, und auf allgemeine Formeln zu bringen. Hiezu war er nun freylich mehr als irgend jemand anders im Stande, er, der schon so manchen Preiß davon getragen, so manches Problem glücklich aufgelößt hatte, der mit dem, was vor ihm gethan war, völlig bekannt war, und der sogar einen Euler an Stärke im Calkul übertraf.

Wer

Digitized by Google

Wer also hier einen neuen Lehrbegriff der Mechanik, wie die gewöhnlichen sind, mit Anwendungen auf's gemeine Leben erwartet, der betrügt sich sehr; auch wird jemand, der nur mässig die Analysis nach ihrem neuern Zustande studirt hat, sich vergeblich an eine Schrift wagen, wo so viele neue Kunstgriffe angebracht, so viele der neuesten Erfindungen benutzt worden sind. Schon Herr Euler forderte ja in seiner Mechanik, daß der Leser sowohl in der Analysis endlicher als unendlicher Größen genugsam geübt sey, könnte dies Herr de La Grange in unsern aufgeklärtern Zeiten nach einem verflossenen Zeitraum von mehr als 50 Jahren nicht auch fordern? — Ja sicher konnte er es fordern, wo nicht in Deutschland, doch in seinem Vaterlande! — Sowenig also dies Werk Anfängern im Calkul irgend eine angenehme Stunde verschaffen wird; (woran ich um soviel mehr zu zweifeln kein Bedenken trage, da man sich unter diesem Namen oft nur den vorstellt, der die ersten Principien der Buchstabenrechnung oder der Algebra gefaßt hat,) um so mehr werden Liebhaber tiefsinniger analytischer Untersuchungen mit dem größten Vergnügen alle mechanische Gesetze hier entwickelt finden. Es ist würklich das einzige in seiner Art, und wir haben daran ein glänzendes Beyspiel, was die neuere Analyse vermag. Eine mathematische Wissenschaft ohne Figuren abzuhandlen scheint im ersten Anblick etwas unmögliches; aber wer nur mit dem heutigen Zustande der Analyse bekannt ist, der wird sich leicht von der Möglichkeit dieses Verfahrens überzeugen. Herr de La Grange hat an dem gegenwärtigen Werke hievon ein Muster gegeben. Ein Werk, wovon also gleichsam eine neue Epoche in den mathematischen Wissenschaften beginnt, sollte doch wohl verdienen auch in unserm Vaterlande gemeiner gemacht zu werden, denn bey aller seiner Vortreflichkeit ist dies Werk dennoch ziemlich selten geworden, und wenige möchten wohl in Deutschland das Glück haben

es

es durchstudieren zu können, wenn sie es auch wollten. Den Liebhabern mathematischer Wissenschaften glaube ich daher keinen geringen Dienst zu erzeigen, es ihnen noch an vielen Orten erläutert, und in der Muttersprache in die Hände zu liefern. Freylich darf man dabey nicht auf Nutzen und Anwendung im gemeinen Leben sehn, da möchte man wohl umsonst versuchen, auch nur einen Hebel daraus berechnen zu können, aber Herr de La Grange schrieb auch für keinen Praktiker, er schrieb für den denkenden Mathematiker, und dieser wird immer hier Stoff zum Vergnügen genug finden, wenn auch kein weiterer Nutzen hervorleuchtet. Hier fällt mir die so oft an mich gethane Frage wieder ein: was wohl von der neuern Analyse besonders der französischen Mathematiker zu halten sey? Ich überlasse die völlige Beantwortung derselben andern, nur einige Bemerkungen kann ich nicht umhin zu machen, die mir hier sehr gut eine Stelle zu verdienen scheinen. Es ist wohl kein Zweifel, daß viele der neuern Analysten oft im Gebrauche des Calculs mit Ausschliessung aller Geometrie zu weit gehen. Ich bin selbst ein großer Liebhaber analytischer Berechnungen, und völlig davon überzeugt, daß wir durch die Synthesis unmöglich so weit gekommen seyn würden, als wir durch die Analysis würklich gekommen sind; aber ich habe auch nur gar zu oft erfahren, daß man Schlösser in die Luft bauet, wenn man sich den analytischen Rechnungen allein ganz überläßt, und ohne von der Geometrie geleitet zu werden, fortcalkuliert.

Hrn. Eulers Schriften sind voll von analytischen Untersuchungen, die bloß für den Verstand sind, denn auch er rechnete bekanntlich sehr oft fort, ohne stets die Natur um Rath zu fragen, ob sie ihm auch erlaube diesen oder jenen Schritt zu thun. Beyspiele von der Art in Menge anzuführen, würde mir ein leichtes seyn, aber ich unterlasse es hier um so ehr, da ich voraussetze, daß wer sich an gegenwärtiges Werk wagt, Eulers Schriften

wenigstens die vorzüglichsten gelesen hat. Aber Herr Euler wußte auch Anwendung von seinen Rechnungen zu machen, darum hat er uns viele und vortrefliche Muster hinterlassen, und was Voltaire in einer durch den Streit über den Satz der sogenannten kleinsten Würkung in der Natur veranlaßten Schrift von ihm sagt, paßt weit mehr noch auf die neuern französischen Analysten. Es ist wahr, man erstaunt über die Fertigkeit, welche ein La Grange, La Place, Condoreet, Coußin, Monge, Le Gendre u. a. m. im calkulieren haben müssen, aber man sieht auch zugleich ein, daß sie, indem sie alle Geometrie verbannen, und sich schlechterdings an nichts als an ihre Formeln halten, die Mathematik gleichsam nur in mechanische Kunstgriffe verwandlen, und so einem der vorzüglichsten Zwecke derselben, nämlich dem den Verstand zu schärfen gerade entgegen handlen. Hr. Euler forderte in der Vorrede zu einem seiner vorzüglichsten Werke, wie ich schon angeführt habe, daß der Leser sowohl in der Analysis des Endlichen als Unendlichen wohl erfahren sey, aber diese neuern Analysten Frankreichs fordern noch etwas mehr. Mir scheint das Verfahren derselben oft viel Aehnlichkeit mit der Sprache der alten Scholastiker zu haben, und so artete denn die Mathematik so zu sagen caeteris paribus in pure Philosophie aus! — eben so wie die neuern Philosophen wünschten, daß Philosophie in Mathematik ausartete.

Ich bin aber weit entfernt hiedurch den analytischen Untersuchungen allen Werth abzusprechen, wir haben jedem der vorhin genannten grossen Männer eine ganze Reihe von neuen Erfindungen zu verdanken, und es ist nichts mehr zu wünschen, als daß die Analyse noch immer mehr vervollkommnet und verfeinert werde, nur aber gebrauche man die analytische Kunstgriffe sparsam und bedachtsam. Indessen ist doch auch soviel gewiß, daß viele Dinge, die man jetzt mit dem Namen mathe-

mati-

Digitized by Google

matischer Erfindungen belegt, nichts als Wiederholungen von dem sind, was schon die Bernoullier, Leibniz u. a. wußten, nur unter einer andern Gestalt dargestellt. Wiederholungen des Alten können immer von Nutzen seyn, und man kommt dabey besonders oft in der Mathematik auf etwas Neues, auch als Wiederholungen sind daher diese Bemühungen immer zu loben. Auch hat man hin und wieder in den neuern Zeiten schon längst bekannten Dingen neue Namen beigelegt, und dadurch ihnen oft das Ansehen neuer Erfindungen gegeben. Ich brauche die Leser nur an die partielle Differentialien zu erinnern, ihre Erfindung ist von sehr vielen der Erfindung der Infinitesimalrechnung gleich geachtet worden, und doch war in der That die Sache vorhin schon lange bekannt, nur daß sie keinen besondern Namen hatte. Ich verwies daher oft Leute, die mit so großem Enthusiasmus von Erfindung der partiellen Differentialien sprachen, auf Hrn. Hofr. Kästners Analysis des Unendlichen, und zeigte ihnen, daß die Gründe davon hier deutlich vor Augen lägen. Eben so ist es mit dem Variationscalkul beschaffen, es ist das längst bekannte nur unter einer andern Form dargestellt, und daß man zu denselben Resultaten, wozu man durch die Variationsrechnung gelangt ist, durch die Differentialrechnung allein gelangen könne, das haben Euler, Borda, Paul Frisius, Ferroni u. a. m. genugsam gezeigt. Viele Unbequemlichkeiten bey Lesung der neuern analytischen Schriften verursacht auch der Leichtsinn vieler ihrer Verfasser. Mit Verdruß denke ich noch immer an die Zeit, die ich oft verschwendete, um einen französischen Analysten in seinen Rechnungen zu folgen, wie ich oft alle Kunstgriffe der Analyse, soviele in meiner Gewalt standen, vergeblich aufbot, um mit meinem Author zu einerley Resultat zu gelangen, wie ich nachher fand, daß die Schuld nicht an mir sondern am Verfasser läge, indem er sich verrechnet habe. Es über-

überschreitet weit die Grenzen und den Zweck einer Vorrede einzele Beyspiele hier anzuführen, aber ich kann dem Leser versichern, daß es mir nicht schwer fallen würde, sie ihm duzendweise allein aus La Place's und Coussins Schriften vorzulegen.

Da ich mir übrigens den Leser schon als ziemlich geübten Analysten denke; so wird man unter Erläuterungen keine Zurückführung auf die Grundsätze des Calkuls erwarten, sie sollen vielmehr dazu dienen, auch dem geübten Leser die Lesung dieser Schrift zu erleichtern. In dieser Absicht habe ich da, wo Herr de La Grange nur die Resultate hinsetzt, wo es mir nöthig zu seyn schien, gezeigt, wie er darauf gekommen ist, wo er Zwischensätze und Theoreme, woran man vielleicht da nicht denkt, ausgelassen hat, dieselben dem Zusammenhang unbeschadet eingerückt, und das meinige vom andern nur dadurch unterschieden, daß ich es in ( ) eingeschlossen und ein M. dahinter gesetzt habe. Bekümmert man sich also um diese Zeichen nichts; so kann man alles ununterbrochen fortlesen. Nachdem ich fertig mit der Arbeit war, fiel mir zwar oft ein, ob es 1) nicht wohl gut gewesen wäre, Dinge, zu deren Vorstellung eine große Einbildungskraft erfodert würde, durch Figuren zu erläutern, und ob es 2) nicht vortheilhafter für den Leser gewesen wäre, wenn ich Winke und Hinweisungen auf andere Schriften gegeben hätte, wo man die hier als bekannt vorausgesetzten Sätze erläutert und erwiesen fände. Ich hätte z. B. nur auf die Kästnerischen oder andere beliebte Handbücher bey solchen Gelegenheiten verweisen können.

Allein hier gieng es mir wie vor einigen Jahren, da ein gewisser Freund mir ein Geschenk mit einer Kiste von Mineralien machte, da ich nämlich alles schon ausgepackt hatte, fand ich erst eine Anweisung wie ich es auspacken sollte. Indessen würde, wenn ich das erstere hätte thun wollen, auch der Preiß müssen erhöhet werden, welches

Digitized by Google

welches wieder mit der Hauptabsicht, die ich bey dieser Arbeit hatte, nämlich der dies Werk gemeiner zu machen, in Collision gekommen wäre. Was das andere betrifft; so hätte es nach dem Beyspiel vieler guten Schriftsteller immer von Nutzen seyn können, doch kann das zu meiner Entschuldigung dienen, daß ich für keine Anfänger dies Werk bestimmt habe. Hiezu kommt noch, daß ich manches hin und wieder in den Anmerkungen weiter ausgeführt und auch auf andere Schriften verwiesen habe. Ich hätte diese Anmerkungen leicht vermehren können, wenn meine Absicht hier gewesen wäre, über La Grange's Werk einen Commentar zu schreiben. Einzelne kleine andere Verbesserungen, die ich gemacht habe, verlangt man endlich wohl nicht vorgezählt zu haben.

Uebrigens muß ich gestehn, daß die Mechanique analitique des Herrn La Grange eins von den Büchern ist, den ich manche vergnügte Stunde meines Lebens zu verdanken habe.

Mehrmals habe ich dies Meisterwerk mit dem größten Fleiße ganz durchstudiert, und stets nur aus der Hand gelegt, um es mit doppeltem Vergnügen bald wieder zu vornehmen. Da ich das Studium desselben so einrichtete, daß ich nie weiter las, bis ich das vorhergehende völlig verstanden hatte; so mußte ich nothwendig auf viele neue Bemerkungen kommen. So fand ich manche Erweiterung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten; machte manche Anwendung der von La Grange gegebenen analytischen Formeln auf Gegenstände der Mechanik, Astronomie und Artillerie, und bekam auf diese Art soviele Zusätze zur analytischen Mechanik, als sie selbst stark ist. Ich sah aber bald, daß diese mit denselben für einen Band zu viel werden würde, und habe mich daher entschlossen,

Digitized by Google

schlossen, alle Erweiterungen oder weitläuftige ausführlichere Zusätze und Erläuterungen des gegenwärtigen Werks ausser den wenigen oben genannten besonders unter dem Titel: Zusätze und Erweiterungen der analytischen Mechanik des Herrn La Grange herauszugeben, worin man manche neue Bemerkung und Untersuchung finden wird. Im manchen ist mir zwar schon Hr. Rohde zuvorgekommen. Man sehe s. Preisschrift über die Abweichung geworfener Körper von der vertikalen Richtungsebene (Berl. 1795. 4.) und s. mathematische Abhandlungen. (Potsdam 1797. 4). Allein dies wird mich nicht hindern, meine Untersuchungen, wenn sie auch oft auf eins mit ihm hinauskommen, bekannt zu machen.

Viele Erweiterungen, die ich von dem Grundsatze der virtuellen Geschwindigkeiten, gefunden hatte, finde ich auch zum Theil schon in einem so eben erschienenen Werke: Memoria sul principio delle velocita virtuali del Cavaliere *Vittorio Fossombroni* Aretino vno del Quaranta della societa Italiana, socio dell' Instituto di Bologna etc. Firenze 1796. Per Gaetano Cambiagi Stampatore Granducale 4. 191 S.

Möchte ich doch beim Schlusse dieser Arbeit so glücklich seyn, durch meine geringen Bemühungen etwas zur Verbreitung einer Wissenschaft, die mir so werth ist, beigetragen zu haben.

Göttingen, 1796.

Inhalt.

Digitized by Google

Inhalt.

Erster Theil der Mechanik oder die Statik.

Erster Abschnitt. Von den verschiedenen Grundlehren der Statik.

Zweyter Abschnitt. Allgemeine Formel für's Gleichgewicht eines gewissen Systems von Kräften nebst ihrem Gebrauch.

Dritter Abschnitt. Allgemeine aus der vorhergehenden Formel hergeleitete allgemeine Eigenschaften des Gleichgewichts.

Vierter Abschnitt. Eine sehr einfache Methode die für's Gleichgewicht eines gewissen Systems von Körpern nöthige Gleichungen zu finden, man mag sie nun entweder als Punkte oder als endliche Massen betrachten, die von gegebenen Kräften getrieben werden.

Fünfter Abschnitt. Auflösung verschiedener statischer Aufgaben.

***

Digitized by Google

§. I. Vom Gleichgewicht mehrerer an einem Punkte angebrachten Kräfte, und von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

§. II. Vom Gleichgewichte mehrerer auf ein System von Körpern angebrachten Kräfte, die man als Punkte ansiehet, und die durch Faden oder Stangen mit einander verbunden sind.

§. III. Vom Gleichgewichte eines Fadens, dessen Punkte durch gewisse Kräfte gezogen werden, er mag nun entweder vollkommen biegsam oder unbiegsam, oder elastisch und zugleich ausdehnbar oder nicht seyn.

§. IV. Vom Gleichgewichte eines festen Körpers von einer merklichen Größe, dessen Punkte insgesammt durch gewisse Kräfte getrieben werden.

Sechster Abschnitt. Von den Grundlehren der Hydrostatik.

Siebenter Abschnitt. Vom Gleichgewichte der unpreßbaren flüssigen Massen.

Achter Abschnitt. Vom Gleichgewichte preßbarer und elastischer flüssigen Massen.

Zweyter

Digitized by Google

Zweyter Theil der Mechanik oder die Dynamik.

Erster Abschnitt. Ueber die verschiedenen Grundlehren der Dynamik.

Zweyter Abschnitt. Allgemeine Formel für die Bewegung eines Systems von Körpern, die durch gewisse Kräfte getrieben werden.

Dritter Abschnitt. Allgemeine aus der vorhergehenden Formel hergeleitete Eigenschaften der Bewegung.

Vierter Abschnitt. Einfachste Methode zu den Gleichungen zu gelangen, die die Bewegung eines gewissen durch beschleunigende Kräfte getriebenen Systems bestimmen.

Fünfter Abschnitt. Auflösung verschiedener dynamischer Aufgaben.

§. I. Allgemeine Auflösung der Aufgabe der sehr geringen Oscillationen eines gewissen Systems von Körpern.

§. II. Von der Bewegung eines einem oder mehreren Mittelpunkten angezogenen Körpers.

§. III. Von der Bewegung mehrerer auf einander würkenden Körper, es sey nun durch Anziehung oder durch ihre Verbindung untereinander durch Faden oder Hebel.

Digitized by Google

Sechster Abschnitt. Von der Rotation der Körper.

§. I. Allgemeine auf die Umdrehungsbewegung sich beziehende Formeln.

§. II. Gleichungen für die Umdrehungsbewegung eines festen Körpers von einer gewissen Figur, der durch gewisse Kräfte getrieben wird.

§. III. Bestimmung der Bewegung eines schweren Körpers von irgend einer Figur.

Siebenter Abschnitt. Von den Grundlehren der Hydrodynamik.

Achter Abschnitt. Von der Bewegung der unpreßbaren flüssigen Körper.

§. I. Allgemeine Gleichungen für die Bewegung unpreßbarer Flüssigkeiten.

§. II. Von der Bewegung schwerer und homogener Flüssigkeiten in Gefäßen oder Röhren von einer gewissen Figur.

Neunter Abschnitt. Von der Bewegung preßbarer und elastischer flüssigen Körper.

Erster

Digitized by Google

Erster Theil
der
analytischen Mechanik oder die Statik.

Erster Abschnitt.
Von den verschiedenen Grundlehren der Statik.

Die Statik ist die Wissenschaft des Gleichgewichts der Kräfte. Unter Kraft versteht man überhaupt eine Ursache, sie mag übrigens beschaffen seyn, wie sie will, die einem Körper, woran man sie sich angebracht vorstellt, entweder würklich eine Bewegung eindrückt, oder doch dazu ein Bestreben äußert; nach der Größe der eingedrückten Bewegung oder des Bestrebens sie einzudrücken wird dann die Kraft geschätzt. Im Zustande des Gleichgewichts übt die Kraft keine Würkung aus, nur ein simpeles Bestreben zur Bewegung bringt sie in diesem Falle hervor; jedoch muß sie hier durch die Würkung allezeit gemessen werden, welche sie, wenn keine Hindernisse statt fänden, ausüben würde. Nimt man eine gewisse Kraft oder ihre Würkung zur Einheit an, so ist die Ausdrückung jeder andern Kraft nichts wie ein Verhältnis zu jener, folglich eine mathematische Größe, die durch Zahlen und Linien ausgedrückt werden kann, und unter diesem Gesichtspunkt muß man die Kräfte in der Mechanik betrachten.

Gleichgewicht entsteht durch die Aufhebung mehrerer Kräfte, die einander entgegengesetzt sind, und wovon eine die Würkung der andern

Digitized by Google

vernichtet; die Gesetze nun anzugeben, wonach diese Aufhebung vor sich geht, das ist der Zweck der Statik. Diese Gesetze aber beruhen auf allgemeine Principien, die sich auf drei bringen lassen, nämlich auf das des Gleichgewichts beim Hebel, 2) das der Zusammensetzung der Bewegung und 3) das des Bestrebens nach Geschwindigkeit (des vitesses virtuelles).

Archimedes, der einzige unter den Alten, der uns eine Art von Theorie der Mechanik in seinen 2 Büchern de aequi ponderantibus hinterlassen hat, ist der Erfinder des Gesetzes des Hebels, welches, wie jedermann weiß, darin besteht, daß wenn ein geradliniger Hebel von 2 Gewichten beschwert ist, deren Entfernungen vom Ruhepunkt sich umgekehrt verhalten wie die Gewichte selbst, allezeit ein Gleichgewicht dieses Hebels erfolgt und daß sein Unterstützungspunkt von der Summe dieser 2 Gewichte beschwert wird. Archimedes nimmt dieses Gesetz in dem Falle, wo gleiche Gewichte gleichweit vom Unterstützungspunkt entfernt sind, für einen an und für sich evidenten Grundsatz der Mechanik oder doch wenigstens für ein Erfahrungsgesetz an, und auf diesen einfachen und ersten Fall bringt er dann auch den, wo die Gewichte ungleich sind, in dem er sich diese Gewichte, wenn sie commensurabel sind, in mehrere unter einander gleiche Theile getheilt vorstellt und annimmt, daß die Theile jedes Gewichts von einander sich trennen und auf beiden Seiten des Hebels in gleichen Entfernungen sich vertheilen lassen, so daß der ganze Hebel von mehreren kleinen unter einander gleichen Gewichten und in gleichen Entfernungen vom Unterstützungspunkt beschwert sey. Hierauf erweißt er auch die Wahrheit desselben Theorems für incommensurabele Gewichte mit Hülfe der Erschöpfungsmethode, und zeigt, daß unter diesen Gewichten nie ein Gleichgewicht statt finden kann, wenn sie sich nicht im umgekehrten Verhältniß der Entfernungen vom Unterstützungspunkt befinden. Einige der Neuern wie Stevin in seiner Statik und Galiläi in seinen Gesprächen über die Bewegung haben Archimed's Beweis dadurch einfacher zu machen gesucht, daß sie annahmen, die an den Hebel angebrachte Gewichte seien 2 in ihrer Mitte horizontal aufgehangene Parallelepipeda, deren Breiten und Höhen einander gleich, die Längen aber doppelt so groß seyen als die Hebelarmen, die umgekehrt zu ihnen gehören. Denn hiedurch sind die beiden Parallelepipeda im umgekehrten Verhältniß ihrer Hebelarmen, und ihre Stellung ist so beschaffen, daß sie

Digitized by Google

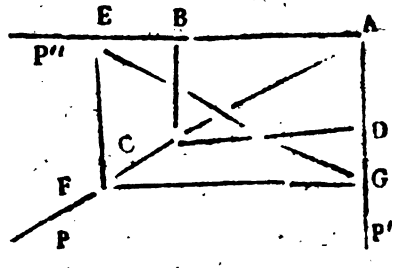
sie nur ein einziges ausmachen, dessen Mittelpunkt vollkommen mit dem Unterstützungspunkt des Hebels übereinkommt.

Andere aber haben Fehler in Archimed's Beweis finden wollen, und ihn auf verschiedene Art verändert, um ihm eine größere Strenge zu geben. Aber ausser Huyghens verdienet keiner hier den Geometern bekannt zu werden.

Huyghens Beweis gründet sich auf die Betrachtung des Gleichgewichts einer Ebene, die mit mehrern gleichen Gewichten beschwert ist und deren Unterstützung eine gerade Linie ist; aber ohnerachtet dieser Beweis sehr sinnreich und frey von den Schwürigkeiten ist, denen der Archimedeische unterworfen ist; so kann man doch manches dagegen einwenden. Man sehe die Opera varia von Huyghens Tom. 1. *)

Hat

*) Man kann sich von der Richtigkeit dieses Satzes, der für den geradlinigten Hebel an sich schon ziemlich evident scheint, geometrisch auf folgende Art überzeugen: Es seyen P′ P″ 2 Kräfte, welche durch AB, AD ausgedrückt werden, man verzeichne das Parallelogram ABCD und nenne P die durch AC ausgedrückte mittlere Kraft: so hat man, wenn man aus einem willkührlichen Punkte von einer der Richtungslinien dieser 3 Kräfte 2 senkrechte Linien FG, FE ziehet, die Proportion:

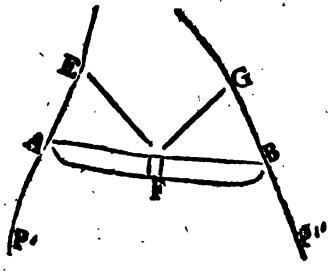


P′: P″: P = GF: FE: GE.

Wir wollen nun einen Hebel AB betrachten, hier muß der Ruhepunkt in der Richtungslinie der mittlern Kraft liegen, ziehet man daher aus diesem

Hat man einmal das Gesetz des geradlinigten und horizontalen Hebels festgesetzt; so kann man daraus die Gesetze des Gleichgewichts bei den

som Punkte F die senkrechte Linie GF, EF auf die Directionslinien der Kräfte P′ P″; so haben wir aus dem vorhergehenden folgende Proportion:



P′: P″ = FG: FE d. h.

Wenn 2 an den Endpunkten eines Hebels angebrachte simple oder Bewegungskräfte im Gleichgewicht sind, und nun aus dem Ruhepunkt auf die Richtung einer jeden ein Perpendikel gezogen wird, so verhalten sich diese simplen oder Bewegungskräfte umgekehrt wie die auf ihre Richtung gezogene Perpendikel. Ist nun aber AB gerade und die Direktion der Kraft P′ mit der der Kraft P″ parallel; so fallen, wenn diese Linien auf die Richtung des Hebels perpendiculair sind, die Perpendikel FG, FE in die Richtungslinie des Hebels und sind der Entfernung vom Ruhepunkt bis zur Richtung einer jeden Kraft gleich. Alsdenn verhalten sich also im Falle des Gleichgewichts die Kräfte verkehrt, wie die Längen ihrer Hebelarmen. Setzen wir nun, der Ruhepunkt liege ausser dem von den Richtungen der Kräfte gemachten Winkel; so läßt sich mit einer geringen Abänderung die Wahrheit des vorhergehen Satzes auch für diesen Fall darthun, und so hat man dann den allgemeinen Satz, daß 2 an einem Hebel angebrachte Kräfte, die gegen den Ruhrpunkt eine gewisse Lage haben, sich allemal verkehrt wie die Entfernungen ihrer Direktionslinien vom Ruhepunkt verhalten. Dies gilt daher für alle Arten von Hebel und Archimed's Satz läßt sich also auf diese Art erweisen, nur mußten wir aber hier einen andern Satz zu Hülfe nehmen, den wir bisher noch nicht erwiesen hatten, nämlich den der Zusammensetzung der Bewegung. Die Verbindung der mechanischen Gesetze unter einander wird man übrigens ausführlich aus einem Werke kennen lernen, dessen Vollendung alle Kenner der Mathematik mit Verlangen entgegensehen, und das gewiß dem Nahmen seines Urhebers Unsterblichkeit verschaffen wird, nämlich aus der Nouvelle architecture hydraulique par Mr. de Prony (à Paris 1790. 4 maj.) Tom. I. wovon uns Hr. Langsdorf nun auch mit einer deutschen Uebersetzung beschenkt hat.

M.

den andern Maschienen und bei jedem Systeme von Kräften überhaupt herleiten. Auf diese Art sind viele Schriftsteller verfahren, unter andern La Hire in seinem Traktat über die Mechanik, der sich im 9ten Bande der alten Memoires de l'academie des sciences de Paris befindet. Jedoch scheint es, man hat nicht gleich anfangs die Methode gekannt, die Theorie aller andern Maschienen, besonders die von der schiefen Ebene, auf die Theorie des Hebels zu bringen; denn man siehet nicht nur aus den Fragmenten, die vom 8ten Buche des Pappus bis auf uns gekommen sind, daß die Alten das wahre Verhältniß der Kraft zum Gewicht bey der schiefen Ebene nicht kannten; sondern man weiß auch, daß die Bestimmung dieses Verhältnisses lange Zeit ein Problem bei den ersten neuern Mathematikern war, welches der berühmte Stevin, der in Diensten des Prinzen Moriz von Nassau war, zuerst auflöste, und wozu auch er nur durch eine indirekte und von der Theorie des Hebels independente Betrachtung gelangt war.

Stevin betrachtet ein solides Dreyeck, das auf seiner horizontalen Basis steht, so daß seine beiden Seitenflächen 2 schiefe Ebenen ausmachen und nimmt an, daß ein Kranz von verschiedenen in gleichen Entfernungen von einander durch Faden verbundenen Gewichten, oder vielmehr eine Kette von gleicher Dicke an die beiden Seiten dieses Dreyecks angebracht sey, so daß der obere Theil an den beiden Seiten desselben festgemacht sey, der untere aber frey unter der Basis herunterhänge, eben so als wenn er an den beiden Enden derselben festgemacht wäre.

Stevin merkt an, daß wenn man selbst auch annähme, die Kette könne frey über das Dreyeck wegrütschen; sie doch in Ruhe bleiben müsse; denn finge sie an von sich selbst zu rütschen nach irgend einer Richtung hin; so müßte sie fortfahren in alle Ewigkeit zu rütschen, denn es würde eben dieselbe Ursache der Bewegung immerfort statt finden, indem die Kette wegen der Gleichförmigkeit ihrer Theile immer auf dieselbe Art am Dreyeck fest hänge, woraus eine beständige Bewegung entspringen würde, welches absurd ist.

Es muß also nothwendig ein Gleichgewicht zwischen allen Theilen der Kette statt finden, man sieht aber leicht ein, daß der unter der Ba-

Digitized by Google

sis hängende Theil der Kette schon an und für sich im Gleichgewicht ist, die Kraft aller Gewichte auf der einen Seite muß daher der auf der andern Seite das Gleichgewicht halten; aber die Summe der erstern verhält sich zur Summe der andern, wie die Längen der Seiten, wo sie angebracht sind, sich gegen einander verhalten, folglich bedarf es immer derselben Kraft, um ein oder mehrere auf einer schiefen Ebene befindliche Gewichte zu halten, wenn das ganze Gewicht der Länge der Ebene gleich und die Höhe dieselbe ist. Ist aber die Ebene vertikal; so ist die Kraft dem Gewichte gleich; folglich verhält sich bey jeder schiefen Ebene die Kraft zum Gewicht, wie die Höhe der Ebene zu ihrer Länge.

Ich habe diesem Beweis Stevins nur deswegen hier eine Stelle vergönnt, weil er sehr sinnreich, und sonst wenig bekannt ist. Uebrigens leitet er, aus dieser Theorie, die des Gleichgewichts zwischen 3 Kräfte her, die auf einen Punkt würken, und zeigt, daß dies Gleichgewicht statt findet, wenn die Kräfte einander parallel und den 3 Seiten irgend eines geradlinigten Dreyecks proportional sind. Man sehe weiter hierüber seine Statik selbst nach, und seine Zusätze dazu in s. Hypomnemat. mathematic.

Der 2te Grundsatz des Gleichgewichts ist der der Zusammensetzung der Bewegung. Er beruhet auf die Voraussetzung, daß, wenn 2 Kräfte zugleich auf einen Körper nach verschiedenen Direktionen würken, sie einer einzigen Kraft gleich sind, die im Stande ist dem Körper dieselbe Bewegung zu geben, als die beiden Kräfte ihm geben würden, wenn jede besonders würkte. Nun aber durchlauft ein Körper, den man sich gleichförmig nach 2 verschiedenen Direktionen zugleich bewegen läßt, nothwendig die Diagonallinie des Parallelograms, dessen Seiten er jede besonders nach jeder der beiden Bewegungen durchlaufen würde. Hieraus folgt also, daß 2 Kräfte, die zugleich auf einen Körper würken, von einer einzigen im Gleichgewicht werden erhalten werden können, deren Größe und Direktion durch die Diagonallinie des Parallelograms ausgedrückt wird, dessen Seiten jede die Größen und Direktionen der beiden gegebenen Kräfte ausdrükken *). Hierin besteht das 2te Grundgesetz nähmlich die Zusammensezzung der Kräfte. Es

*) Man hat diesen Satz vom Parallelogram der Kräfte auf gar verschiedene Weise darzuthun gesucht.

Wolff,

Digitized by Google

Es reicht allein hin in allen Fällen die Gesetze des Gleichgewichts zu bestimmen, denn indem man nach und nach die Kräfte zusammensetzt nähmlich immer zwei und zwei; so muß man endlich zu einer einzigen gelangen, die allen den andern das Gleichgewicht hält, und die also im Falle des Gleichgewichts, wenn bei dem System kein fester Punkt vorhanden ist, = o seyn muß; wenn ein solcher aber da ist durch denselben ihre Direktion haben muß. Dies kann man in allen statischen Büchern sehen, und insbesondere in der neuen Mechanik des Varignon; wo die Theorie der Maschienen aus diesem Fundamentalgesetz allein abgeleitet worden ist.

Es ist klar, daß Stevins Theorien vom Gleichgewicht dreyer Kräfte die den 3 Seiten eines gewissen Dreyecks parallel und proportional sind, eine unmittelbare und nothwendige Folge des Gesetzes von der Zusammensetzung der Kräfte ist, oder vielmehr daß es dasselbe Grundgesetz nur unter einer andern Form ist. Allein dieses hat den Vorzug auf einfachen und natür-

Wolff, Krüger u. a. geben nichts weniger als einen geometrischen Beweis davon. Unter allen scheint mir noch Newtons Verfahren hier am meisten auf mathematische Evidenz Ansprüche zu machen, man findet dasselbe noch weiter ausgeführt und erläutert in der Bibliotheca fisica d'Europa, wo kann ich nicht sagen, da ich das Buch nicht bey der Hand habe.

Im strengsten geometrischen Verstande genommen wird man ihn wohl nie erweisen können; aber von der Wahrheit desselben überzeugen, kann man sich auf mancherlei Art. Herrn Maries Beweis in seinem traité de mécanique kann schon völlig dazu dienen die Nothwendigkeit dieses Fundamentalsatzes einzusehen; daher hat ihn auch Prony in der Nouvelle architecture hydraulique wieder abdrucken lassen. Einen metaphysischen Beweis davon hat unter andern auch Hr. Kant in s. metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft versucht. Durch Versuche kann man sich übrigens sehr wohl davon überzeugen, auch kann man sich dazu kleiner Insekten bedienen, die man an einem Lineal fortlaufen läßt, und die die Diagonallinie eines Parallelograms beschreiben, indem man langsam das Lineal weiter herunterrückt. Hiebey fällt mir ein Beyspiel ein, welches genugsam zeigt, wie sehr auch schon die Natur der Sache diese Bewegung in der Diagonallinie des Parallelograms mit sich bringe. Es gieng jemand spazieren, sein Hund lief voran, nun theilte sich der Weg in 2; der Hund wollte gerne voran, wußte aber nicht, welchen von beiden sein Herr wählen würde, deswegen gieng er in der Diagonallinie des Parallelograms weiter, dessen Seiten die beiden Wege ausmachten.

M.

Digitized by Google

natürlichen Begriffen zu beruhen, da hingegen Stevins Theorem nur auf indirekte Betrachtungen gegründet ist.

Was aber die Erfindung des gegenwärtigen Grundgesetzes betrift, so ist sie meiner Meinung nach dem Galilâi zuzuschreiben, der in der 2ten Proposition des 4ten Tages seiner Dialogen, erweißt, daß, wenn ein Körper mit 2 gleichförmigen Geschwindigkeiten, wovon die eine horizontal die andere vertikal ist, bewegt wird, er eine Geschwindigkeit annehmen muß, die durch die Hypothenuse des Dreyecks ausgedrückt wird, dessen beiden andern Seiten diese 2 Geschwindigkeiten ausdrücken; jedoch scheint es zugleich, daß Galilâi den ganzen Nuzen dieses Theorems in der Theorie des Gleichgewichts nicht gekannt habe. Denn in dem 3ten Dialog, wo er von der Bewegung der schweren Körper auf schiefen Ebenen handelt, leitet er, anstatt den Grundsaz der Zusammensetzung der Bewegung zur direkten Bestimmung der einem Körper auf einer schiefen Ebene zukommenden Schwere anzuwenden, vielmehr diese Bestimmung von der Theorie des Gleichgewichts auf schiefen Ebenen nach dem her, was er vorher in seinem Traktat della scienza Mecanica festgesezt hatte, worinn er die schiefe Ebene vom Hebel herleitet.

Nach Galilâi findet man die Theorie der zusammengesezten Bewegungen in den Schriften des Des Cartes, Robervals, Mersenne, Wallis u. a.; aber Varignon hat das Verdienst den Nuzen dieser Theorie bei dem Gleichgewicht der Maschienen gezeigt zu haben.

Seine Absicht bei seiner nouvelle méchanique die er 1687 publicirte, war die Regeln der Statik durch die Zusammensetzung der Bewegungen oder der Kräfte zu beweisen, aber dies wurde nachher noch weit umständlicher in der nouvelle méchanique geleistet, die erst nach seinem Todt im Jahr 1725 erschien. Schon im Jahr 1685 aber hatte er ein Memoire über die Rollen dem Druck übergeben, worin er die Theorie dieser Art von Maschienen durch die der zusammengesezten Bewegungen erklärte.

Ich komme endlich zum 3ten Grundgesetz nehmlich dem des Bestrebens nach Geschwindigkeit. Man versteht hierunter dasjenige, was ein im Gleichgewicht sich befindender Körper, wenn dasselbe aufgehoben ist, bekommt

Digitized by Google

bekommt d. h. die Geschwindigkeit, die er im ersten Augenblick seiner Bewegung würklich erhält. Das gegenwärtige Grundgesetz besteht also darin, daß Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn sie sich umgekehrt wie ihre Bestrebungen nach Geschwindigkeit, die nach den Richtungen dieser Kräfte geschätzt werden, verhalten.

Erwägt man nur ein wenig die Bedingungen des Gleichgewichts beim Hebel und den andern Maschienen; so erkennt man leicht die Wahrheit dieses Gesetzes, dennoch scheinen die Geometer vor Galiläus es nicht gekannt zu haben, und ich glaube ihm die Erfindung desselben zuschreiben zu müssen, wenigstens trägt er es in seinem Traktat della scienza Mecanica, und in seinen Dialogen über die Bewegung als eine allgemeine Eigenschaft des Gleichgewichts der Maschienen vor. Man sehe die Anmerkung zum 2ten Satze des 3ten Dialogs.

Unter Moment eines Gewichts oder einer an einer Maschiene angebrachten Kraft versteht Galiläus die Stärke, die Würkung, die gesammte Gewalt *), welche diese Kraft anwendet, die Maschiene in Bewegung zu setzen, so daß 2 Kräfte im Gleichgewicht seyen, wenn ihre Momente um die Maschiene auf entgegengesetzte Art in Bewegung zu setzen, gleich groß sind, und er zeigt, daß das Moment allemal dem Produkte aus der Kraft in das Bestreben nach Geschwindigkeit gleich ist, welches von der Art, wie die Kraft würkt, abhängt.

In eben der Bedeutung nahm auch Wallis in seiner 1669 herausgegebenen Mechanik das Wort Moment, er nimt darin den Satz der Gleichheit der Momente zum Grund der Statik an, und leitet daraus umständlich die Theorie des Gleichgewichts bey den vornehmsten Maschienen her.

Heut zu Tage versteht man gewöhnlich unter Moment das Produkt einer Kraft in die Entfernung ihrer Direktion von einem gewißen Punkte, oder einer gewißen Linie, d. h. in den Hebelsarm, wodurch sie würkt; aber die Bedeutung, worunter Galiläus und Wallis das Wort Moment nahmen,

*) Im Original steht l'effort, l'action, l'énergie, l'impetus.

M.

Digitized by Google

men, scheint mir natürlicher und allgemeiner zu seyn, und ich sehe nicht ein, warum man sie verworfen, und an ihre Stelle eine andere gesetzt hat, die nur den Werth des Moments in gewissen Fällen wie z. E. beim Hebel ꝛc. ausdrückt *).

Des Cartes brachte auf gleiche Art die ganze Statik auf ein einziges Princip, welches im Grunde mit dem Galiläischen einerlei, nur weniger allgemein ist. Es besteht darin, daß man nicht mehr und nicht weniger Kraft gebraucht, ein Gewicht zu einer gewissen Höhe zu erheben, als ein schwereres Gewicht zu einer um eben soviel geringern Höhe. (Man sehe den 73ten Brief im 1ten Theile, und seine in seinen operibus posthumis befindliche Mechanik). Hieraus folgt, daß ein Gleichgewicht statt finden wird, wenn 2 Gewichte dergestalt gesetzt sind, daß die perpendikulaire Wege, die sie durchlaufen können, mit ihnen in einer umgekehrten Verhältnis stehen. Aber bey der Anwendung dieses Princips auf verschiedene Maschienen, muß man nur die im ersten Augenblick der Bewegung durchlaufenen Räume, die dem Bestreben nach Geschwindigkeit proportional sind, in Betrachtung ziehen; sonst würde man die wahren Gesetze des Gleichgewichts nicht erhalten.

Man mag übrigens den Satz des Bestrebens nach Geschwindigkeit entweder als eine allgemeine Eigenschaft des Gleichgewichts annehmen, wie dies Galiläus thut, oder man mag ihn mit Des Cartes und Wallis für die wahre Ursache des Gleichgewichts halten; so wird man immer gestehen müssen, daß er alle Einfachheit besitzt, die man nur von einem Fundamentalsatze verlangen kann, und wir werden weiter unten erst sehen, wie sehr er sich durch seine Allgemeinheit empfielt.

Tor-

*) Dies ist eine sehr richtige Erinnerung, die Bedeutung die Galiläus und Wallis dem Worte Moment gegeben haben, ist gewiß von weit größern Umfang als die man ihm jetzt giebt, allein der Sprachgebrauch hat diese leztere nun einmal so allgemein eingeführt, daß auch alle Schriftsteller beinahe, die über die Mechanik geschrieben haben, sie angenommen haben. Die Größe D V, wo D die Entfernung von einem gewissen Punkt, und V die Kraft bedeutet, kommt auch so oft vor, daß man ihr nothwendig einen Namen geben mußte, nur hätte man sich nicht dazu eines Worts bedienen sollen, das schon eine andere Bedeutung hatte.

M.

Digitized by Google

Torricelli, der berühmte Schüler des Galiläus, ist Erfinder eines andern Princips, welches jedoch mit dem seines Lehrers einerlei oder vielmehr nur eine Folge davon ist; es besteht dieses darin, daß wenn 2 Gewichte so mit einander verbunden sind, daß, man mag ihnen eine Stellung geben, wie man will, ihr Schwerpunkt weder erhöhet noch erniedrigt werde, sie immer im Gleichgewicht sind. Torricelli macht von diesem Satze nur auf die schiefe Ebene eine Anwendung, allein man kann sich leicht davon überzeugen, daß er bey den andern Maschinen nicht weniger statt findet. Man sehe seinen Traktat über die beschleunigte Bewegung, welcher im Jahr 1644 erschien.

Torricelli's Princip veranlaßte ein anderes, dessen sich einige Schriftsteller bedient haben, um verschiedene statische Aufgaben mit mehrerer Leichtigkeit aufzulösen. Es ist folgendes: Bey einem Systeme von schweren Körpern, das sich im Gleichgewicht befindet, ist der Schwerpunkt so weit unten als möglich. In der That weiß man aus der Theorie de maximis und minimis, daß der Schwerpunkt am niedrigsten ist, wenn das Differential seines Herabsinkens = o ist oder, welches auf eins hinauskommt, wenn der Schwerpunkt weder steigt noch fällt, während dem daß das System eine unendlich geringe Veränderung seines Orts erleidet.

Allgemein ausgedrückt ist das Gesetz des Bestrebens nach Geschwindigkeit folgendes:

Wenn ein gewisses System von so viel Körpern oder Punkten als man will, auf welche gewisse Kräfte würken, im Gleichgewicht ist, und man giebt demselben eine gewisse geringe Bewegung, vermöge der jeder Punkt einen unendlich kleinen Raum durchlauft, der sein Bestreben nach Geschwindigkeit ausdrückt; so wird die Summa der Kräfte multiplicirt durch die von den Punkten, wo die Kräfte angebracht sind, nach den Richtungen derselben durchlaufene Räume allezeit = o seyn, indem man die kleinen Räume bejaht oder verneint nimmt, nachdem solche in einerlei oder in der entgegengesetzten Richtung der Kräfte durchlaufen worden sind.

Soviel ich weiß hat Johann Bernoulli zuerst die große Allgemeinheit dieses Satzes des Bestrebens nach Geschwindigkeit und seinen Nutzen

Digitized by Google

bey Auflösung statischer Aufgaben wahrgenommen. Dies ersieht man aus einem seiner Briefe an Varignon im Jahr 1717, den dieser leztere im 9ten Abschnitt seiner neuen Mechanik eingerückt hat, welchen er überhaupt ganz allein dazu anwendet, die Wahrheit und den Nutzen dieses Satzes durch verschiedene Anwendungen zu zeigen.

Eben dies Grundgesetz veranlaßte in der Folge den Satz den der Hr. von Maupertuis unter dem Namen des Gesetzes der Ruhe *) in den Memoiren der Pariser Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1740 bekannt gemacht hat, und den Hr. Euler noch mehr entwickelt und allgemeiner gemacht hat in den Berlin. Memoiren für 1751.

Endlich lag eben dies Grundgesetz auch bei dem des Marquis von Courtivron zum Grunde, welches man in den Pariser Memoiren für 1748 und 1749 findet.

Und überhaupt glaube ich behaupten zu können, daß alle allgemeine Grundsätze, die man noch in der Wissenschaft vom Gleichgewicht entdecken könnte, nichts anders als jenes Gesetz vom Bestreben nach Geschwindigkeit

*) Der Satz des Herrn von Maupertuis ist auch unter dem Namen des Satzes der kleinsten Würkung und des Gesetzes der Sparsamkeit bekannt. Er glaubte daran einen fruchtbaren Grundsatz erfunden zu haben, woraus sich alle Gesetze der Ruhe und Bewegung herleiten ließen, und der an Allgemeinheit alle vorher erfundene weit hinter sich zurückließe. Er zeigte selbst eine Anwendung desselben in verschiedenen Fällen und Hr. Euler fand hier eine neue Gelegenheit zu rechnen, und seine Stärke in der Analisis zu zeigen. Der Streit wegen dieses Satzes zwischen dem Hrn. von Maupertius und Hrn. König in Holland ist zu bekannt, als daß es nöthig wäre ihn umständlich hier zu erzählen. Er gehört eigentlich auch gar nicht in die Wissenschaft, die hier abgehandelt wird, und gehörte er auch hinein; so würde schon das mich berechtigen ihn mit Stillschweigen zu übergehen, daß die meisten darin agirenden Personen gar nichts von Mathematik verstanden. Uebrigens hat dieser Streit eine ganze Reihe von Schriften veranlaßt, die man zum Theil in des Hrn. Hofrath Kästners höheren Mechanik angezeigt findet. Voltaire schrieb bei dieser Gelegenheit mehrere lustige und witzige Schriften. Ich verweise übrigens auf meine Geschichte dieses Streits, die vielleicht bald herauskommen wird.

M.

Digitized by Google

keit seyn werden, nur solches aus verschiedenem Gesichtspunkt betrachtet und anders ausgedrückt *).

Uebrigens ist eben dies Gesetz an und für sich nicht allein sehr einfach und doch sehr allgemein, sondern es hat auch den schäzbaren und vor andern einzigen Vorzug, daß es in einer allgemeinen Formel dargestellet werden kann, welche alle Aufgaben, die beim Gleichgewicht der Körper statt finden können, enthält. Wir wollen diese Formel in ihrem ganzen Umfang darstellen, ja wir wollen uns bemühen ihr noch eine allgemeinere Form zu geben, als bisher geschehen ist, und neue Anwendungen derselben zeigen.

*) Es ist nicht zu leugnen, daß Hrn. de la Grange's Grundsatz der Statik in der That ein sehr fruchtbarer Fundamentalsatz ist, davon ist auch dies ganze Werk ein deutlicher Zeuge, welches blos von demselben ausgeht, und doch alle mechanische Gesetze so schön entwickelt. Er ist im Grunde mit dem bekannten Cartesianischen Grundsatze der Statik einerley, aber weder dieser noch jener kann im geometrischen Verstande Axiom genannt werden. Hr. Karsten bewies die Gesetze der Statik einzeln in aller Strenge, eben so wie dies auch Hr. Kästner gethan hat, und schloß erst aus diesen strengen Beweisen der einzelen Gesetze auf die allgemeine Richtigkeit des Cartesianischen Grundsatzes, oder des allgemeinen Gesetzes vom Bestreben nach Geschwindigkeit. Dieses Gesetz aber allgemein und direkt zu demonstriren, dazu hat man bis jezt noch nicht gelangen können, ohnerachtet seine Richtigkeit hinlänglich ausgemacht ist, indem es Resultate giebt die völlig denen gleich sind, welche man auf andern Wegen gefunden hat. Man kann dieses Gesetz also, wenn man es auch nicht für einen Grundsatz gelten lassen will, wie dies einige neuere französische Schriftsteller nach dem Hrn. de la Grange gethan haben, doch wenigstens als ein allgemeines Resultat der ganzen Statik ansehen, und in so fern verdient dieser Satz doch unsre größte Aufmerksamkeit. Auch konnte man wohl schon daraus, daß alle einzele Gesetze der Statik auf dies allgemeine führen, schliesen, daß wenn man nun diesen Satz zum allgemeinen Fundamentalsatz annehme, sich daraus auch alle einzele Gesetze rückwärts herleiten ließen.

M.

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Allgemeine Formel für das Gleichgewicht eines gewissen Systems von Kräften nebst ihrem Gebrauch.

1) Das allgemeine Gesetz des Gleichgewichts bey den Maschienen ist, daß die Kräfte sich verkehrt verhalten wie die Geschwindigkeiten der Punkte, worauf sie angebracht sind, wo diese nach der Direktion dieser Kräfte geschätzt werden.

In diesem Gesetze besteht das des Bestrebens nach Geschwindigkeit, ein Grundsatz der schon seit langer Zeit für den Fundamentalsatz des Gleichgewichts erkannt worden ist, so wie wir im vorigen Abschnitte gezeigt haben, und den man folglich als eine Art von Axiom in der Mechanik ansehen kann.

Um diesen Satz in eine Formel zu bringen; so wollen wir annehmen, die Kräfte P, Q, R, ꝛc., die nach gegebenen Linien würken, seyen unter einander im Gleichgewicht. Wir wollen uns ferner von den Punkten, worauf diese Kräfte angebracht sind, gerade einander gleiche Linien p q r ꝛc. in den Direktionen dieser Kräfte gezogen vorstellen; und allgemein durch dp dq dr ꝛc. die Variationen oder Differentialien dieser Linien, insofern sie von einer unendlich geringen Veränderung in der Stellung der verschiedenen Körper oder Punkte des Systems entspringen können, ausdrücken.

Es ist klar, daß diese Differentialien die Räume ausdrücken werden, die die Kräfte P, Q, R, ꝛc. in einem Augenblick durchlaufen, d. h. die Geschwindigkeiten dieser Kräfte nach ihren Direktionen geschätzt.

Dies

Digitized by Google

Dies vorausgesetzt wollen wir uns zuerst 3 Kräfte P, Q, R im Gleichgewicht vorstellen, man siehet leicht ein, daß das Gleichgewicht noch immer statt finden wird, wenn wir an die Stelle einer dieser Kräfte einen festen Unterstützungspunkt setzen, der im Stande ist der gemeinschaftlichen Würkung der beiden andern zu widerstehen. Ich fange daher an, die Gesetze des Gleichgewichts zwischen den beiden Kräften P und Q zu suchen, in dem ich den Punkt, worauf die 3te Kraft würkt, als fest annehme, so daß die Linie r unverändert bleibt, während dem daß aus den Linien p und q, p + dp und q + dq oder p — dp und q — dq wird. Nach dem allgemeinen Princip müßten die Kräfte P und Q sich gegen einander verkehrt wie die Differentialien dp dq verhalten, allein man begreift leicht, daß zwischen 2 Kräften kein Gleichgewicht statt finden kann, wenn sie nicht so gestellt sind, daß wenn die eine von ihnen sich bewegt, die andere sich im entgegengesetzten Sinne bewegt; hieraus folgt denn, daß die Zeichen der Differentialien dp und dq einander entgegengesetzt seyn müssen; und da die Werthe der Kräfte P und Q alle beide als positiv sind angenommen worden; so wird für das Gleichgewicht seyn $\frac{P}{Q} = -\frac{dq}{dp}$ oder $Pdp + Qdq = o$ und dies ist die allgemeine Formel für das Gleichgewicht zweier Kräfte. Auf gleiche Art wird man, wenn man die Kraft Q als auf einem festen Punkt angebracht ansieht, die Gleichung $Pdp + Rdr = o$ für die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Kräften P und R erhalten; und eben so hat man für das Gleichgewicht der beiden Kräfte Q und R die Gleichung: $Qdq + Rdr = o$.

Man hat also für die 3 Kräfte PQR die 3 Gleichungen $Pdp + Qdq = o$, $Pdp + Rdr = o$, $Qdq + Rdr = o$; indem man in der ersten $r = Const.$ setzt, in der 2ten $q = Const.$ und in der 3ten $p = Const.$

Nimt man folglich p q und r zugleich als veränderlich an; so hat man $Pdp + Qdq + Rdr = o$.

Und in der That müssen die Kräfte P, Q, R wenn sie im Gleichgewicht seyn sollen, so gestellet seyn, daß eine unabhängig von der andern sich nicht bewegen kann.

Es

Es muß folglich ein gegebenes Verhältniß zwischen den Differentialien dp, dq, dr und daher auch zwischen den endlichen Größen p q r statt finden; dies Verhältniß mag nun beschaffen seyn, wie es will; so kann man die veränderliche Größe p als eine Funktion der beiden andern q und r ansehen; und ihr Differential dp kann folglich allgemein so ausgedrückt werden: $dp = mdq + ndr$. Setzte man $r = Const.$, so hätte man $dp = mdq$; und setzte man $q = Const.$; so hätte man $dp = ndr$; die Größe Pdp in den vorigen Gleichungen, kann also im erstern Fall durch Pmdq, im andern durch Pndr ausgedrückt werden; so daß die Summe dieser beiden Größen seyn wird: $P(mdq + ndr) = Pdp$. Auf gleiche Art erweißt man, daß, wenn man q als eine Funktion von p und r ansiehet, die Summe der beiden Ausdrückungen von Qdq die in der erstern und 3ten Gleichung vorkommen, wenn man in dq p und r zugleich als veränderlich ansieht, den Werth von Qdq geben wird; und eben so wird man den Werth von Rdr finden, wenn man p und q zugleich als veränderlich annimt. Auf diese Art wird die Summe der 3 oben gefundenen besondern Gleichungen, wenn man p, q und r zugleich als veränderlich annimt, $Pdp + Qdq + Rdr = 0$; und diese Formel drückt das Gleichgewicht der 3 Kräfte P, Q, R aus.

Wäre noch eine 4te Kraft S vorhanden, die nach der Linie s ihre Richtung hätte; so würde man durch ein ähnliches Raisonnement finden, daß das Gleichgewicht der 4 Kräfte P, Q, R, S durch die Gleichung $Pdp + Qdq + Rdr + Sds = 0$ ausgedrückt wäre. Und so ferner, die Zahl der Kräfte mag beym Gleichgewicht so groß seyn wie sie will.

2) Man hat daher allgemein für das Gleichgewicht einer gewissen Anzahl von Kräften P, Q, R, ꝛc., die ihre Richtungen nach den Linien p, q, r, ꝛc. haben, und die auf ein System von Körpern oder Punkten, die unter einander eine gewisse Stellung haben, angebracht sind, eine Gleichung von folgender Form:

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} = 0$$

und dies ist die allgemeine Formel für das Gleichgewicht eines gewissen Systems von Kräften. Wir wollen jedes Glied dieser Formel als Pdp

das

Digitized by Google

das Moment von der Kraft P nennen, und dies Wort also in der Bedeutung nehmen, welche ihm Galiläus beygelegt hat, nämlich als das Produkt aus der Kraft in das Bestreben nach Geschwindigkeit, so daß das Gleichgewicht statt finden wird, wenn die Summe aller Momente dieser Kräfte = o seyn wird.

3) Bey der Anwendung dieser Formel wird alle Schwierigkeit dahin hinauslaufen, die Werthe der Differentialien dp, dq, dr, etc. der Natur des gegebenen Systems gemäs zu bestimmen.

Wir wollen in dieser Absicht das System in 2 verschiedenen aber unendlich nahen Stellungen betrachten, und soviel als möglich allgemeine Ausdrückungen für die besagten Differentialien suchen, indem wir so viele unbestimmte Größen in dieselben einführen wollen, als willkührliche Elemente durch die Variation der Stellung des Systems entstanden sind; wir wollen hierauf diese Ausdrückungen von dp, dq, dr, etc. in die gegebene Gleichung substituiren und diese Gleichung muß unabhängig von allen den unbestimmten Größen statt finden, damit das Gleichgewicht des Systems überall und in allem Betracht statt finde. Wir werden daher die Summe der Glieder, worin sich dieselben unbestimmten Größen befinden, jede besonders = o setzen und dadurch so viele besondere Gleichungen bekommen, als unbestimmte Größen sind; es ist aber nicht schwer sich davon zu überzeugen, daß ihre Anzahl allezeit der Anzahl der unbekannten Größen gleich seyn muß, die bey der Stellung des Systems sich eingemischt haben; wir bekommen daher durch diese Methode so viel Gleichungen als nöthig sind, den Zustand des Gleichgewichts des Systems zu bestimmen.

Auf diese Art sind alle Schriftsteller verfahren, die bis auf unsre Zeiten den Satz des Bestrebens nach Geschwindigkeit zur Auflösung statischer Aufgaben angewandt haben; aber diese Methode dieses Princip anzuwenden, erfodert geometrische Zeichnungen und Betrachtungen, die die Auflösungen eben so lang machen, als wenn man sie von den gewöhnlichen statischen Grundsätzen herleitete; und dies war vielleicht der vornehmste Grund, der verhinderte, daß man nicht in allen Fällen Gebrauch von diesem Princip gemacht hat, da es doch scheint, daß man es wegen seiner Einfachheit und Allgemeinheit hätte thun müssen.

Digitized by Google

4) Die Kräfte P, Q, R, etc., die auf verschiedene Körper oder Punkte des Systems würken, mögen auch beschaffen seyn wie man will; so ist klar, daß man ihre Würkungen immer nach Punkten, die in den Richtungen der Kräfte selbst liegen, und die wir Centra der Kräfte nennen werden, annehmen könne.

Um also die Linien p, q, r, etc. zu erhalten, die die Richtungen der Kräfte P, Q, R, etc. ausdrücken, hat man nur die geradlinigten Entfernungen zwischen den Körpern oder Punkten, worauf die Kräfte würken, und den Mittelpunkten dieser Kräfte zu nehmen. Diese Mittelpunkte aber können entweder ausserhalb des Systems liegen oder einen Theil davon ausmachen. Im erstern Falle ist deutlich, daß die Differentialien dp, dq, dr, etc die gesammten Variationen der Linien p, q, r, etc, die durch die Veränderung der Stellung des Systems bewürkt worden sind, ausdrücken; sie sind folglich die vollständigen Differentialien der Größen p, q, r, etc, wenn man alle Größen, die Beziehung auf die Stellung des Systems haben, als veränderlich, und alle diejenigen die Beziehung auf die Stellung der verschiedenen Mittelpunkte der Kräfte haben, als beständig ansieht.

Im andern Falle sind einige der Körper des Systems selbst die Mittelpunkte der Kräfte, die auf andere Körper desselben Systems würken, und weil Würkung stets der Gegenwürkung gleich ist; so werden diese letztern Körper zu gleicher Zeit die Mittelpunkte der Kräfte seyn, die auf die erstern würken.

Betrachten wir daher 2 Körper, die auf einander mit einer gewissen Kraft P würken, es mag nun diese Kraft die Anziehung oder Zurückstossung dieser Cörper oder die zwischen ihnen statt findende Elasticität oder etwas anders zur Ursache haben, und ist p die Distanz zwischen diesen beiden Körpern, dp' die Variation dieser Distanz in so fern sie von der Veränderung des Orts eines dieser Körper abhängt; so ist klar, daß man in Beziehung auf diesen Körper P dp' für das Moment der Kraft P hat; eben so wenn man durch dp'' die Variation derselben Distanz p, in so fern sie von der Veränderung des Orts des andern Körpers entspringt, bezeichnet; so hat man Pdp'' für das Moment von P in Beziehung auf diesen

Digitized by Google

sen andern Körper; das ganze Moment, das zu dieser Kraft gehört, kann also durch P (dp' + dp") ausgedrückt werden; aber man sieht leicht, daß dp' + dp" das vollständige Differential von p ist, welches wir durch dp bezeichnen, weil die Distanz p nur durch die Veränderung des Orts der beiden Körper eine Variation erleiden kann; Pdp wird also das vorgegebene Moment ausdrücken; man kann diese Schlüsse auf so viel Körper als man nur will erstrecken.

5) Hieraus folgt, daß, um die Summe der Momente aller Kräfte eines gegebenen Systems zu erhalten, man jede der Kräfte, die auf die verschiedenen Körper oder Punkte des Systems würken, besonders zu betrachten hat, und daß man die Summe der Producte dieser verschiedenen Kräfte, jede durch das Differential der respektiven Distanz zwischen den beiden Grenzen jeder Kraft d. h. zwischen dem Punkt, worauf diese Kraft würkt, und dem, wovon sie ausgeht multiplicirt, nehmen müsse, indem man bey diesen Differentialien alle Größen als veränderlich ansieht, die von der Stellung des Systems abhängen, und als beständig alle diejenigen, die sich auf die äussere Punkte oder Mittelpunkte beziehen, d. h. indem man diese Punkte als fest betrachtet, während dem daß die Stellung des Systems eine Variation erleidet. Setzt man diese Größe nun = 0; so erhält man die allgemeine Formel für's Princip des Gleichgewichts.

6) Um diese Größe analytisch auszudrücken; so ist die einfachste Methode, die sich darbiethet, die, die Stellung aller Punkte des gegebenen Systems auf rechtwinklichte Coordinaten, die dreien Achsen parallel seyen, zu beziehen.

Wir bezeichnen durch a, b, c, die Coordinaten für die Mittelpunkte der Kräfte; man sieht alsdenn leicht, daß die Distanzen p, q, r, etc allgemein durch folgende Formel ausgedrückt werden können

$$\sqrt{\left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right]}$$

Digitized by Google

wo die Größen a, b, c entweder beständig sind, oder doch wenigstens als solche angesehen werden müssen, während dem daß x, y, z variiren in dem Falle wo sie sich auf feste ausserhalb des Systems befindliche Punkte beziehen; aber diese Größen a, b, c, werden x''' etc y''' etc z''' etc. und folglich veränderlich in dem Falle, wo die Kräfte von einigen der Körper des Systems selbst ausgehen.

Hat man auf diese Art die Ausdrückungen der endlichen Großen p, q, r, etc in bekannten Funktionen der Coordinaten der verschiedenen Körper des Systems; so hat man nur nöthig auf die gewöhnliche Art zu differentiiren indem man diese Coordinaten als veränderlich annimmt, und auf diese Art erhält man die gesuchten Werthe der Differentialien dp, dq dr etc; die in der allgemeinen Formel des Gleichgewichts vorkommen.

Ohnerachtet man aber jederzeit die Kräfte P, Q, R, etc als nach gewissen gegebenen Mittelpunkten würkend ansehen kann; so gehört doch die Betrachtung dieser Mittelpunkte eigentlich nicht zur Aufgabe selbst, worin man gemeiniglich nur die Größe und Direktion jeder Kraft als gegeben annimmt; das folgende wird allgemeinere Methoden enthalten, die Differentialien dp, dq, dr, etc auszudrücken.

7) Nimmt man zuerst an, was jederzeit erlaubt ist, daß die Kraft P auf einem festen Mittelpunkte würke; so hat man

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

und wenn man differentiirt, ohne a, b, c als veränderlich anzunehmen

$$dp = \frac{x-a}{p}\,dx + \frac{y-b}{p}\,dy + \frac{z-c}{p}\,dz.$$

Man sieht aber leicht, daß $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ nichts anders sind als die Cosinus der Winkel, die die Linie p mit den Coordinaten x, y, z bildet. Nennt man also allgemein α, β, γ die Winkel, die die Direktion der Kraft

Digitized by Google

Kraft P mit den Achsen x, y, z oder mit den Achsen parallelen Linien macht;

so hat man $\frac{x-a}{p} = \text{Cof } \alpha$,

$$\frac{y-b}{p} = \text{Cof } \beta,$$

$$\frac{z-c}{p} = \text{Cof } \gamma,$$

folglich $dp = \text{Cof } \alpha\, dx + \text{Cof } \beta\, dy + \text{Cof } \gamma\, dz$.

Und eben so kann man die andern Differentialien dq, dr, etc ausdrücken.

In Ansehung der Winkel α, β, γ ist erstlich zu bemerken, daß $\text{Cof}^2 \alpha + \text{Cof}^2 \beta + \text{Cof}^2 \gamma = 1$, welches leicht aus den vorhergehenden Formeln zu ersehen ist; zweitens, daß, wenn man ε den Winkel nennt den die Projektion der Linie p auf der Ebene der x und y mit der Achse der x macht, man hat

$$\frac{x-a}{\pi} = \text{Cof } \varepsilon,$$

$$\frac{y-b}{\pi} = \text{sin } \varepsilon,$$

wenn man $\pi = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ setzt; setzt man nun statt $x-a$, $y-b$ ihre Werthe $p \text{ Cof } \alpha$, $p \text{ Cof } \beta$ so hat man

$$\pi = p\sqrt{(\text{Cof}^2 \alpha + \text{Cof}^2 \beta)}$$

$$= p\sqrt{(1 - \text{Cof}^2 \gamma)}$$

(weil nehmlich $\text{Cof}^2 \alpha + \text{Cof}^2 \beta + \text{Cof}^2 \gamma = 1$, M.)

$$= p \text{ sin } \gamma.$$

(Nun aber ist $x - a = \pi \text{ Cof } \varepsilon$ und $y - b = \pi \text{ sin } \varepsilon$ folglich hat man, wenn man den eben gefundenen Werth von π substituirt:

Digitized by Google

$x - a = p \sin\gamma \cos\varepsilon$ $\qquad$ $y - b = p \sin\gamma \sin\varepsilon$ M.)

daher $\frac{x-a}{p} = \sin\gamma \cos\varepsilon$ $\qquad$ $\frac{y-b}{p} = \sin\gamma \sin\varepsilon$

folglich $\cos\alpha \left(= \frac{x-a}{p} \text{ M.}\right) = \sin\gamma \cos\varepsilon$

$$\cos\beta \left(= \frac{y-b}{p} \text{ M.}\right) = \sin\gamma \sin\varepsilon$$

8) Ich erwäge hierauf, daß weil dp den kleinen Raum ausdrückt, den der Körper oder Punkt, worauf die Kraft P angebracht ist, nach der Direktion dieser Kraft durchlauft, dieser Punkt sich nur in senkrechten Direktionen auf die dieser Kraft bewegen könne, wenn $dp = o$. Folglich ist $dp = o$ die Differentialgleichung für eine Oberfläche, worauf die Direktion der Kraft P senkrecht ist.

Nehmen wir nun überhaupt an, die Kraft P würke senkrecht auf eine durch die Differentialgleichung $du = o$ ausgedrückte Oberfläche, es mag nun du eine complette Differentialgröße seyn oder nicht; so muß diese Gleichung mit der $dp = o$ einerley seyn, und man hat nothwendig $du = Vdp$, wo V eine endliche Funktion der Coordinaten x, y, z ist. Um nun diese Funktion zu finden; so hat man nur nöthig anzumerken, daß weil

$$dp = \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz \quad (7)$$

und $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

man nach den bekannten Begriffen der partiellen Differentialien hat:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dz}\right)^2 = 1$$

folglich auch $\left(\frac{du}{Vdx}\right)^2 + \left(\frac{du}{Vdy}\right)^2 + \left(\frac{du}{Vdz}\right)^2 = 1$

folglich $V = \sqrt{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]}$ und

$$dp = \frac{du}{V} = \frac{du}{\sqrt{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]}}$$

Auf

Digitized by Google

Auf gleiche Art wird man die Werthe der andern Differentialien dq dr etc. nach den Differentialgleichungen der Oberflächen, worauf die Direktionen der Kräfte Q, R, etc. senkrecht sind, bestimmen können.

9) Sind nun die Differentialien dp, dq, dr, etc. in Differential-Funktionen der Coordinaten der verschiedenen Körper des Systems ausgedrückt; so braucht man sie nur in der allgemeinen Formel

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} = 0$$

zu substituiren und hierauf diese Gleichung so allgemein als möglich jedoch unabhängig von den Differentialien, die sie enthält, complettiren. Ist also das System völlig frey und findet folglich keine Verbindung zwischen den Coordinaten der verschiedenen Körper, und daher auch nicht zwischen ihren Differentialien statt; so mußte man unabhängig von diesen Differentialien der vorhergehenden Gleichung ein Genüge leisten, und daher die Summe aller Glieder, die durch jede derselben multiplicirt sind, allemal $= 0$ setzen; dies giebt denn so viele Gleichungen als veränderliche Coordinaten vorhanden sind, und folglich so viele als nöthig sind alle diese veränderliche Größen zu bestimmen, und mit Hülfe derselben die Lage des ganzen Systems im Zustande des Gleichgewichts kennen zu lernen.

10) Ist aber die Natur des Systems so beschaffen, daß die Körper in ihren Bewegungen besondern Bedingungen unterworfen sind; so mußte man damit den Anfang machen, daß man diese Bedingungen durch analytische Gleichungen ausdrückte, die wir Bedingungsgleichungen nennen wollen; und dies ist allezeit leicht. Mußten z. B. einige Körper sich auf gegebenen Linien oder Oberflächen bewegen; so hätte man zwischen den Coordinaten dieser Körper die Gleichungen der gegebenen Linien oder Oberflächen selbst. Wären 2 Körper dergestalt mit einander verbunden, daß sie sich allezeit in dergleichen Distanz K von einander befinden müßten; so hätte man augenscheinlich die Gleichung

$$K^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$$

und so weg.

Hat man die Bedingungsgleichungen auf diese Art gefunden; so muß man vermittelst derselben so viele Differentialien als möglich in den Ausdrückun-

Digitized by Google

drückungen von dp, dq, dr, etc. wegschaffen, so daß die übrig bleibenden Differentialien völlig unabhängig von einander seyen, und nur das willkührliche bey der Veränderung der Lage des Systems ausdrücken. Da nun die allgemeine Formel des Gleichgewichts statt finden muß, diese Veränderung mag auch beschaffen seyn, wie sie will; so muß man die Summe aller Glieder, worin jede der unbestimmten Differentialien vorkommt, almal $= 0$ seßen; und daraus werden dann so viele besondere Gleichungen entstehen, als solcher Differentialien vorhanden sind; diese Gleichungen nun verbunden mit den gegebenen Bedingungsgleichungen schließen alle zur Bestimmung des Zustandes des Gleichgewichts des Systems nöthige Bedingungen in sich ein; denn es ist leicht zu begreiffen, daß alle diese Gleichungen immer von gleicher Zahl mit den verschiedenen veränderlichen Größen seyn werden, die allen Körpern des Systems zu Coordinaten dienen, und sie reichen also hinlänglich dazu hin, jede dieser veränderlichen Größen zu bestimmen.

11) Haben wir übrigens die Orte der Körper immer durch rechtwinklichte Coordinaten bestimmt, so ist dies blos deswegen geschehen, weil dadurch der Calkul überaus einfach und leicht wird; man kann aber sich eben sowohl anderer bei der vorhergehenden Methode bedienen; denn es ist klar, daß uns nichts zwingt ehr rechtwinklichte Coordinaten anzunehmen als andere Linien oder Größen, die auf die Orte der Körper Beziehung haben. So könnte man statt der beiden Coordinaten x, y, wenn es die Umstände heischten, einen Radius-Vektor $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ und einen Winkel φ gebrauchen, dessen Tangente $= \frac{y}{x}$ sey, (welches $x = \rho \operatorname{Cof} \varphi$, $y = \rho \operatorname{sin} \varphi$ gäbe); die 3te Coordinate z könnte man so lassen wie sie vorhin war; oder vielmehr man könnte einen Radius Vektor $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ mit 2 Winkeln φ und ψ gebrauchen, so daß $\operatorname{tang} \varphi = \frac{y}{x}$, $\operatorname{tang} \psi = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, welches giebt $x = \rho \operatorname{Cof} \psi \operatorname{Cof} \varphi$, $y = \rho \operatorname{Cof} \psi \operatorname{sin} \varphi$, $z = \rho \operatorname{sin} \psi$ oder auch andere Winkel und Linien.

Wir

Digitized by Google

Wir bemerken noch, daß da eigentlich nur die Betrachtung der Differentialien dx, dy, dz in unserer Methode vorkommt, es erlaubt ist, an ihre Stelle andere Differential-Ausdrücke, sie mögen nun an sich integrabel seyn oder nicht, und ohne allen Bezug auf die Werthe von x y z, einzuführen.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine aus der vorhergehenden Formel hergeleitete Eigenschaften des Gleichgewichts.

1) Wir wollen nun ein System oder eine gewisse Menge von Körpern oder Punkten betrachten, die indem sie von gewissen Kräften gezogen werden, einander gegenseitig das Gleichgewicht halten. Hörte in einem Augenblick die Würkung dieser Kräfte aufgehoben zu werden, auf; so würde das System anfangen sich zu bewegen, und die Bewegung desselben mag auch beschaffen seyn, wie sie will; so kann man sie sich doch allezeit als zusammengesetzt vorstellen, 1) aus einer allen Körpern gemeinschaftlichen fortrückenden Bewegung 2) aus einer drehenden Bewegung um einen gewissen Punkt *) 3) aus Bewegungen, die sich auf die einzelnen Körper nur beziehen, und wodurch ihre gegenseitige Lage und Distanz verändert wird. Soll also ein Gleichgewicht statt finden, so müssen die Körper keine dieser verschiedenen Bewegungen annehmen können. Nun ist klar, daß die eigenen relativen Bewegungen von der Art abhängen, wie die Körper gegen einander eine gewisse Lage haben; folglich müssen die zur Hinderung

*) Der fortrückenden Bewegung (mouvement de translation); steht hier die drehende Bewegung (mouvement de rotation) entgegen; weder für die eine noch für die andere hat man im deutschen überall eingeführte Benennungen; die gegenwärtigen schienen mir die Sache noch am besten auszudrücken.

M.

Digitized by Google

rung dieser Bewegungen nöthige Bedingungen, bei jedem System besonders seyn. Aber die fortrückende und drehende Bewegungen brauchen nicht von der Form des Systems abzuhängen, und sie können vor sich gehen, ohne daß die Lage und gegenseitige Verbindung der Körper aufgehoben wird.

Die Betrachtung dieser beiden Arten von Bewegungen muß also die allgemeinen Bedingungen oder Eigenschaften des Gleichgewichts verschaffen, und in diese Untersuchung wollen wir uns jetzt einlassen.

2) Es sey daher eine gewisse Zahl von Körpern, die man als Punkte betrachten kann, und die auf eine beliebige Art geordnet, und mit einander verbunden sind, gesetzt, sie würden durch die Kräfte P, P′, P″ etc. nach den Direktionen der Linien p p′ p″ etc. gezogen; so hat man (nach dem vorhergehenden Abschnitt) für das Gleichgewicht dieser Körper die Formel:

$$Pdp + P'dp' + P''dp'' + \text{etc.} = 0$$

Es seyen x, y, z die rechtwinklichten Coordinaten des durch die Kraft P gezogenen Punkts, x′, y′, z′ die des durch die Kraft P′ gezogenen Punkts und so weiter; und es seyen diese Coordinaten alle dreien festen Achsen parallel, und haben in einem Punkte ihren Anfang.

Es seyen ferner α, β, γ die Winkel, die die Linie p oder die Direktion der Kraft P′, mit den Achsen, der x, y, z macht, α', β', γ' die Winkel, die die Direktion der Kraft P′ mit eben diesen Achsen macht und so weg;

Man bekommt auf diese Art (vorherg. Abschn. 7.)

$$dp = \text{Cos}\,\alpha\, dx + \text{Cos}\,\beta\, dy + \text{Cos}\,\gamma\, dz,$$
$$dp' = \text{Cos}\,\alpha'\, dx' + \text{Cos}\,\beta'\, dy' + \text{Cos}\,\gamma'\, dz', \text{ etc.}$$
$$dp'' = \text{Cos}\,\alpha''\, dx'' + \text{Cos}\,\beta''\, dy'' + \text{Cos}\,\gamma''\, dz'',$$
etc.

und für die Formel für's Gleichgewicht:

$$0 =$$

Digitized by Google

$$0 = P(\mathrm{Cos}\,\alpha\,dx + \mathrm{Cos}\,\beta\,dy + \mathrm{Cos}\,\gamma\,dz) + P'(\mathrm{Cos}\,\alpha'\,dx' + \mathrm{Cos}\,\beta'\,dy' + \mathrm{Cos}\,\gamma'\,dz') + P''(\mathrm{Cos}\,\alpha''\,dx'' + \mathrm{Cos}\,\beta''\,dy'' + \mathrm{Cos}\,\gamma''\,dz'') + \text{etc.}$$

3) Wir wollen ſetzen, welches immer erlaubt iſt,

$$x' = x + \xi \qquad x'' = x + \xi'$$
$$y' = y + \eta \qquad y'' = y + \eta'$$
$$z' = z + \zeta \qquad z'' = z + \zeta'$$
$$\text{etc.}$$

ſo wird aus der vorhergehenden Formel, wenn man alle dieſe Werthe ſubſtituirt:

$$0 = (P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + \text{etc.})\,dx + (P\,\mathrm{Cos}\,\beta + P'\,\mathrm{Cos}\,\beta' + P''\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + \text{etc.})\,dy + (P\,\mathrm{Cos}\,\gamma + P'\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + P''\,\mathrm{Cos}\,\gamma'' + \text{etc.})\,dz + P'(\mathrm{Cos}\,\alpha'\,d\xi + \mathrm{Cos}\,\beta'\,d\eta + \mathrm{Cos}\,\gamma'\,d\zeta) + P''(\mathrm{Cos}\,\alpha''\,d\xi' + \mathrm{Cos}\,\beta''\,d\eta' + \mathrm{Cos}\,\gamma''\,d\zeta') + \text{etc.}$$

Nun ſind x, y, z die freyen Coordinaten des durch die Kraft P gezogenen Körpers, folglich werden $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ etc. die relativen Coordinaten der andern Körper in Anſehung deſſen ſeyn, der als ihr gemeinſchaftlicher Anfang angenommen worden iſt, ſo daß die gegenſeitige Lage der Körper nur von dieſen leztern Coordinaten und keinesweges von den erſtern abhängen wird. Nimmt man daher das Syſtem als völlig frey an, d. h. nimmt man an, daß die Körper unter einander auf eine gewiſſe Art verbunden ſind, aber ohne daß ſie von gewiſſen feſten Unterſtüzungspunkten oder gewiſſen äußeren Hinderniſſen zurückgehalten oder aufgehalten werden; ſo iſt leicht einzuſehen, daß die von der Natur des Syſtems herkommenden Bedingungen nur die Größen $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$, etc.

Digitized by Google

und keinesweges die Größen x, y, z, angehen können, deren Differentialien folglich unabhängig und unbestimmt bleiben.

Man muß daher in der vorhergehenden Gleichung jede der Glieder, worin dx, dy, dz, vorkommt, besonders = o setzen, und hieraus entstehen die 3 folgenden besondern Gleichungen:

$$P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + \text{etc.} = 0$$

$$P \operatorname{Cos} \beta + P' \operatorname{Cos} \beta' + P'' \operatorname{Cos} \beta'' + \text{etc.} = 0$$

$$P \operatorname{Cos} \gamma + P' \operatorname{Cos} \gamma' + P'' \operatorname{Cos} \gamma'' + \text{etc.} = 0$$

welche immer beim Gleichgewicht eines freyen Systems statt finden müssen. Dies sind also die zur Verhinderung der fortrückenden Bewegung nöthige Gleichungen.

4) Wären die Kräfte P, P', P'', etc. parallel; so hätte man

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' \text{ etc.}$$

$$\beta = \beta' = \beta'' \text{ etc.}$$

$$\gamma = \gamma' = \gamma'' \text{ etc.}$$

und die 3 vorhergehenden Gleichungen verwandelten sich in diese:

$$P + P' + P'' + \text{etc.} = 0$$

welche zeigt, daß die Summe der parallelen Kräfte = o seyn müßte.

Ueberhaupt ist leicht einzusehen, daß, wenn P die ganze Würkung der Kraft P nach ihrer eignen Direktion anzeigt, P Cos α die relative Würkung ausdrücken wird, die nach der Direktion der Achse der x geschäzt wird, die mit der Direktion der Kraft den Winkel α macht; eben so sind P Cos β und P Cos γ die relativen Würkungen eben dieser Kraft nach den Direktionen der Achsen von y und z geschäzt u. s. w.

Und hieraus entspringt dann der Lehrsaz: Beim Gleichgewicht eines freyen Systems muß die Summe der Kräfte, die nach der Direktion der drei auf einander senkrechten Achsen geschäzt werden, in Ansehung jeder dieser Achsen = o seyn.

5) Wir

Digitized by Google

5) Wir wollen nun, welches immer geschehen kann, statt der Coordinaten x, y, x′, y′, x″, y″ etc. die Radios Vektores ρ, ρ′, ρ″ etc. mit den Winkeln φ, φ′, φ″ etc., die diese Radien mit der Achse der x machen, annehmen; so haben wir wieder

$$x = \rho \operatorname{Cof} \varphi \qquad x' = \rho' \operatorname{Cof} \varphi'$$
$$y = \rho \operatorname{sin} \varphi \qquad y' = \rho' \operatorname{sin} \varphi' \qquad \text{etc.}$$

Folglich
$$dx = \operatorname{Cof} \varphi \, d\rho - y \, d\varphi$$
$$dy = \operatorname{sin} \varphi \, d\rho + x \, d\varphi$$
$$dx' = \operatorname{Cof} \varphi' \, d\rho' - y' \, d\varphi'$$
$$dy' = \operatorname{sin} \varphi' \, d\rho' + x' \, d\varphi'$$
etc.

und die Gleichung (2) wird nun in folgende durch diese Substitutionen verwandelt:

$$\begin{aligned} 0 = {} & P (x \operatorname{Cof} \beta - y \operatorname{Cof} \alpha) \, d\varphi \\ & + P' (x' \operatorname{Cof} \beta' - y' \operatorname{Cof} \alpha') \, d\varphi' \\ & + P'' (x'' \operatorname{Cof} \beta'' - y'' \operatorname{Cof} \alpha'') \, d\varphi'' \\ & + \text{etc.} \\ & + P (\operatorname{Cof} \varphi \operatorname{Cof} \alpha + \operatorname{sin} \varphi \operatorname{Cof} \beta) \, d\rho \\ & + P' (\operatorname{Cof} \varphi' \operatorname{Cof} \alpha' + \operatorname{sin} \varphi' \operatorname{Cof} \beta') \, d\rho' \\ & + P'' (\operatorname{Cof} \varphi'' \operatorname{Cof} \alpha'' + \operatorname{sin} \varphi'' \operatorname{Cof} \beta'') \, d\rho'' \\ & + \text{etc.} \\ & + P \operatorname{Cof} \gamma \, dz + P' \operatorname{Cof} \gamma' \, dz' + P'' \operatorname{Cof} \gamma'' \, dz'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Macht man nun
$$\varphi' = \varphi + \sigma,$$
$$\varphi'' = \varphi + \sigma'$$
etc.

so ist offenbar, daß σ σ′ etc. die Winkel seyn werden, die die Radien ρ, ρ′, ρ″, etc. mit dem Radius ρ machen; folglich werden die Distanzen der Körper sowohl unter einander, als in Beziehung auf die Fläche der x, y

Digitized by Google

und auf den Punkt, der der Anfang der Coordinaten ist, nur von den Grössen ρ, ρ'. ρ'', etc. σ, σ', etc. z, z', z'', etc. abhängen. Hat daher das System die Freyheit um diesen Punkt sich zu drehen, der Ebene der x y parallel d. h. um die Achse der z, die auf dieser Ebene senkrecht steht; so wird der Winkel φ unbestimmt, und die Differentialgröße $d\varphi$ willkührlich seyn. Hieraus folgt also, daß das Glied, worin $d\varphi$ in der vorhergehenden Gleichung vorkömmt, an und für sich $= 0$ seyn muß.

6) Auf diese Art entsteht also die Gleichung:

$$P(x \operatorname{Cos}\beta - y \operatorname{Cos}\alpha) + P'(x' \operatorname{Cos}\beta' - y' \operatorname{Cos}\alpha') + P''(x'' \operatorname{Cos}\beta'' - y'' \operatorname{Cos}\alpha'') + \text{etc.} = 0,$$

welche beim Gleichgewicht jedes Systems, das die Freyheit hat sich um die Achse der z zu drehen, statt finden muß.

Auf eben die Art findet man in Beziehung auf die Achse der y, wenn das System die Freyheit hat, sich um diese Achse zu drehen, die Gleichung:

$$P(x \operatorname{Cos}\gamma - z \operatorname{Cos}\alpha) + P'(x' \operatorname{Cos}\gamma' - z' \operatorname{Cos}\alpha') + P''(x'' \operatorname{Cos}\gamma'' - z'' \operatorname{Cos}\alpha'') + \text{etc.} = 0$$

und in Beziehung auf die Achse der x

$$P(y \operatorname{Cos}\gamma - z \operatorname{Cos}\beta) + P'(y' \operatorname{Cos}\gamma' - z' \operatorname{Cos}\beta') + P''(y'' \operatorname{Cos}\gamma'' - z'' \operatorname{Cos}\beta'') + \text{etc.} = 0.$$

Hat also das System die Freyheit sich um jede dieser drey Achsen zu bewegen; so müssen für's Gleichgewicht diese 3 Gleichungen zugleich statt finden.

Setzt man in der Größe $x \operatorname{Cos}\beta - y \operatorname{Cos}\alpha$, welche mit der Kraft P in der ersten Gleichung multiplicirt ist, für $\operatorname{Cos}\alpha$, $\operatorname{Cos}\beta$ ihre Werthe $\sin\gamma \operatorname{Cos}\varepsilon$, $\sin\gamma \sin\varepsilon$ (2 Abschn. § 7.); so bekommt man

$\sin\gamma (x \sin\varepsilon - y \operatorname{Cos}\varepsilon)$; welches sich in

$\rho \sin\gamma \sin(\varepsilon - \varphi)$ verwandelt, wenn man wieder für x und y ihre Werthe $\rho \operatorname{Cos}\varphi$, $\rho \sin\varphi$ setzt.

Nun

Digitized by Google

Nun aber ist ε der Winkel, den die Projektion der Kraft P auf der Ebene der x und y mit der Achse der x macht und P der Winkel, den der Radius Vektor ρ mit eben dieser Achse macht. Folglich ist $\varepsilon - \varphi$ der Winkel, den die eben genannte Projektion mit diesem Radius Vektor macht; und daher wird $\rho \sin(\varepsilon - \varphi)$ die senkrechte Linie seyn, die vom Mittelpunkt der Radien ρ an die auf der Ebene der x y projicirte Direktion der Kraft gezogen ist; d. h. überhaupt die senkrechte Linie, die von der Achse der z (die selbst senkrecht auf dem Radius ρ ist) zur Direktion dieser Kraft gezogen worden ist. Nennt man also π diese senkrechte Linie so hat man

$$x \operatorname{Cos} \beta - y \operatorname{Cos} \alpha = \pi \sin \gamma$$

und auf eine ähnliche Form könnte man die analogen Größen bringen, die in den 3 vorhergehenden Gleichungen mit P P′ P″ etc. multiplicirt sind.

7) Hat das System die Freyheit sich auf jede Art um einem Punkt zu drehen; so könnte man zweifeln, ob es hinlänglich sey, nur die Rotationen um die 3 durch diesen Punkt gehenden senkrechten Achsen zu betrachten, und ob, wenn diese 3 Rotationen verhindert würden, keine andere Rotation mehr um denselben Punkt statt finden könne?

Um diesen Zweifel zu benehmen, so erwäge ich, daß, wenn man wie oben

$$x = \rho \operatorname{Cos} \varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi,$$
$$x' = \rho' \operatorname{Cos} \varphi',$$
$$y' = \rho' \sin \varphi',$$
etc.

setzt und nur die Winkel $\varphi\ \varphi'$ etc. als veränderlich annimmt, man erhält

$$dx = -y\,d\varphi, \quad dy = x\,d\varphi,$$
$$dx' = -y'd\varphi, \quad dy' = x'd\varphi, \text{ etc.}$$

und dies sind die Variationen von x, y, x′, y′ etc. in Ansehung der elementarischen Rotation $d\varphi$ des Systems um die Achse der z.

Auf

Digitized by Google

Auf gleiche Art bekommt man die Variationen von y, z, y′, z′, etc. welche durch die elementarische Rotation dψ um die Achse der x entstehen, indem man nur in den vorhergehenden Formeln x, y, x′, y′ etc. in y, z, y′ z′ etc. und dφ in dψ verwandelt; dies giebt

$$dy = -zd\psi, \quad dz = yd\psi,$$
$$dy' = -z'd\psi', \quad dz' = y'd\psi',$$

etc.

Verwandelt man endlich in diesen letztern Formeln y, z, y′, z′ etc. in z, x, z′, x′ etc. und dψ in dw; so bekommt man die Variationen, die aus der elementarischen Rotation dw um die Achse der y entspringen; diese sind

$$dz = -xdw, \quad dx = z\,dw,$$
$$dz' = -x'dw, \quad dx' = z'\,dw,$$

etc.

Setzt man nun, daß die 3 elementarischen Rotationen dφ, dψ, dw zugleich statt haben; so werden die ganzen Variationen der Coordinaten x, y, z, x′, y′, z′, etc. nach den Grundlehren des Differentialcalkuls der Summe der einzelen Variationen, die aus jeder dieser Rotationen entsprungen sind, gleich seyn, so daß man erhalten wird:

$$dx = zdw - yd\varphi,$$
$$dy = xd\varphi - zd\psi,$$
$$dz = yd\psi - x\,dw,$$
$$dx' = z'dw' - y'd\varphi',$$
$$dy' = x'd\varphi' - z'd\psi',$$
$$dz = y'd\psi' - x'dw'$$

etc.

8) Ich bemerke hier, daß wenn die Coordinaten x y z eines gewissen Punkts des Systems, den Größen dψ dw dφ proportional wären, die Variationen dx, dy, dz = 0 seyn würden, wie man dies aus den eben

Digitized by Google

eben gefundenen Formeln leicht ersieht. Alle Punkte also, die zu diesen Coordinaten gehörten, würden in dem Augenblick, daß das System die 3 Winkel $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ beschriebe, indem es sich um die Achsen der x, y, z drehte, unbeweglich seyn.

Man sieht aber leicht, daß alle diese Punkte in einer geraden Linie seyn müssen, die durch den Anfang der Coordinaten geht, und man begreift leicht, daß diese gerade Linie mit den Achsen der x, y, z Winkel machen wird, deren Cosinus

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)}}, \quad \frac{d\omega}{\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)}},$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)}}$$

seyn werden; diese gerade Linie wird also in eben diesem Augenblick unbeweglich seyn, und die Bewegung des Systems kann nur eine einfache drehende Bewegung um eben diese Linie seyn, die wir eben deswegen die momentanische Umdrehungsachse (axe instantané de rotation) nennen werden.

Um den durch diese Rotation beschriebenen Winkel zu erhalten; so erwäge man, daß $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ überhaupt das Element des durch einen gewissen zu den Coordinaten x, y, z gehörigen Punkt beschriebenen Raumes ausdrückt. Substituirt man nun die Werthe von dx, dy, dz, die wir oben gefunden haben, so erhält man

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= (zd\omega - yd\varphi)^2 + \\ &(xd\varphi - zd\psi)^2 + (yd\psi - xd\omega)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2) \\ &- (xd\psi + yd\omega + zd\varphi)^2 \end{aligned}$$

Auf einer andern Seite ist es leicht durch die Geometrie zu beweisen, daß $xd\psi + yd\omega + zd\varphi = 0$ eine Gleichung für eine durch den Anfang der Coordinaten gehenden Ebene ist, die senkrecht auf die gerade Linie ist,

Digitized by Google

in Ansehung deren die Coordinaten den gegebenen Größen $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ proportional sind, d. h. die momentanische Umdrehungsachse, wenn man durch x, y, z immer die Coordinaten andeutet. Der durch einen gewissen Punkt eben dieser Ebene beschriebene elementarische Raum wird daher durch $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} + \sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}$; ausgedrückt werden; und da $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ die Distanz dieses Punkts vom Anfange der Coordinaten ist, wo die Ebene und die momentanische Umdrehungsachse sich unter rechten Winkeln schneiden; so folgt daraus, daß $\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)}$ der elementarische Rotationswinkel um diese Achse in Ansehung der einzelen Umdrehungen $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ um die Achsen der Coordinaten x, y, z, seyn wird.

9) Hieraus muß man den allgemeinen Schluß ziehen, daß gewisse Drehungen $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, um die drei Achsen, die sich senkrecht in einem Punkte schneiden, sich in eine einzige $d\vartheta = \sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)}$ um eine Achse zerlegen lassen, die durch eben diesen Durchschnittspunkt gehen, und mit jenen die Winkel λ, μ, ν dergestalt machen, daß $\text{Cos. } \lambda = \frac{d\psi}{d\vartheta}$, $\text{Cos. } \mu = \frac{d\omega}{d\vartheta}$, $\text{Cos } \nu = \frac{d\varphi}{d\vartheta}$, und daß umgekehrt eine Umdrehung $d\vartheta$ um eine gegebene Achse in 3 einzele Umdrehungen zerlegt werden kann, die durch $d\vartheta \text{ Cos } \lambda$, $d\vartheta \text{ Cos } \mu$, $d\vartheta \text{ Cos } \nu$ ausgedrückt werden können, um die 3 Achsen die sich senkrecht in einem gegebenen Punkte der Achse schneiden, und mit ihr die Winkel λ, μ, ν machen; dies giebt, wie man sieht, ein sehr einfaches Mittel an die Hand, die Umdrehungs-Bewegungen zusammenzusetzen und zu zerlegen *).

10) Das

*) Hr de la Grange beweißt hier also blos analytisch, daß wenn ein Gleichgewicht in Ansehung der Umdrehungs-Bewegung um 3 auf einander senkrechte Achsen, die durch einen Punkt durchgehen, eintritt; dasselbe auch in Ansehung einer jeden andern beliebigen Achse, welche durch den gedachten Punkt durchgeht, statt findet. Es findet auch die Eigenschaft bey jedem Systeme von Körpern statt, daß es allezeit wenigstens 3 Achsen gibt, worum es sich bewegen kann; eben so wie dies zuerst Hr. von Segner in seinem specimine theoriae turbinum (Halae 1755.) für jeden Körper einzeln ent-

Digitized by Google

10) Das System mag also eine Umdrehung um ein Punkt, welches der Anfang der Coordinaten ist, haben, welche es will; so kann man sie doch allezeit auf drei $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ um die drei Achsen der Coordinaten x, y, z bringen, und die Variationen von allen Coordinaten x, y, z, x', y', z' etc. der verschiedenen Körper des Systems, die allein durch diese Umdrehungen erzeugt werden, können allgemein durch die (7) gefundene Formeln ausgedrückt werden.

Substituirt man daher nur diese Werthe von dx, dy, dz, dx', dy', dz', etc. in der allgemeinen Formel für's Gleichgewicht (A); so erhält man die von den Umdrehungen $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, des Systems entstandenen Werthe, und da diese Umdrehungen völlig willkührlich sind, wenn das System die Freyheit hat, sich nach allen Seiten zu drehen; so müßte in diesem Falle jedes der Glieder, worinn $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ vorkommt, insbesondere $= 0$ seyn; und dies würde die (6) schon gefundenen 3 Gleichungen geben, die also hinreichend sind alle Umdrehung des Systems um den Anfangspunkt der Coordinaten zu verhindern.

11) Wä-

entdeckt hat, welche Eigenschaft in der Folge Hr. Euler in seiner theoria motus corporum solidorum seu rigidorum (Rostocki et Gryphiswaldiae 176,) noch allgemeiner gemacht hat.

Die Verhältniß der Umdrehungs-Bewegungen, welche man zusammensetzt, ist aber willkührlich, wenn sie nicht durch eine besondere Bedingung bestimmt wird; die hier angeführte Methode die Umdrehungs-Bewegungen zusammenzusetzen und zu zerlegen giebt also an Allgemeinheit derjenigen nichts nach, die sich auf die fortrückende Bewegungen beziehet.

Da den schönen Beweis des Hrn de la Grange vom obigen Satze einzusehen, schon viele Kenntniße des Kalkuls erfodert werden; so verweise ich diejenigen, die einen geometrischen Beweis davon verlangen, auf des Hrn. von Prony Nouv. Archit. & Hydraulq. §. 154 nebst der Note, wo man ihn mit aller der Klarheit und Strenge vorgetragen und durch Figuren erläutert findet, als diesem Geometer in seinem ganzen Werke überhaupt eigen ist.

M.

Digitized by Google

11) Wären alle die Kräfte P, P', P'', etc. parallel unter einander; so hätte man

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' \text{ etc.}$$
$$\beta = \beta' = \beta'' \text{ etc.}$$
$$\gamma = \gamma' = \gamma'' \text{ etc.}$$

und die eben genannten 3 Gleichungen verwandelten sich in diesem Falle in folgende:

$$(Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}) \operatorname{Cos}\beta - (Py + P'y' + \text{etc.}) \operatorname{Cos}\alpha = 0$$
$$(Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}) \operatorname{Cos}\gamma - (Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.}) \operatorname{Cos}\alpha = 0$$
$$(Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.}) \operatorname{Cos}\gamma - (Pz + P'z' + P''z'' \text{ etc.}) \operatorname{Cos}\beta = 0$$

wovon die 3te eine Folge aus den beiden erstern ist. Aber es ist (2 Abschn. 7.)

$$\operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\beta + \operatorname{Cos}^2\gamma = 1$$

folglich kann man durch diese Gleichungen die Winkel α, β, γ, etc. bestimmen. Setzen wir daher um der Kürze willen

$$Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.} = L,$$
$$Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.} = M,$$
$$Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.} = N,$$

so findet man

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{L}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}},$$
$$\operatorname{Cos}\beta = \frac{M}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}},$$
$$\operatorname{Cos}\gamma = \frac{N}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}},$$

Nun

Digitized by Google

Nun ist die Lage der Körper in Ansehung der 3 Achsen gegeben; folglich muß, damit alle Umdrehungs-Bewegung des Systems aufgehalten werde, es in Ansehung der Direktion der Kräfte eine solche Lage haben, daß dieselbe mit eben diesen Achsen die eben bestimmten Winkel α, β, γ macht.

12) Wären die Größen L, M, N $=$ 0; so blieben die Winkel α, β, γ unbestimmt, und die Lage des Systems in Ansehung der Kräfte kann gar sehr verschieden seyn; hieraus erwächst denn folgender Lehrsatz: Wenn die Summe der Produkte der parallelen Kräfte in ihre Entfernungen von dreien auf einander senkrechten Ebenen in Ansehung jeder dieser Ebenen $=$ 0 ist; so wird die Würkung der Kräfte, um das System um den gemeinschaftlichen Durchschnitts-Punkt dieser Ebenen zu drehen, aufgehoben.

Bekanntlich würkt die Schwere vertikal und in Verhältniß der Maße; sucht man daher in einem Systeme von schweren Körpern einen Punkt, der so beschaffen ist, daß die Summe jeder Maße und der Entfernung von der durch diesen Punkt gehenden Ebene in Ansehung dreyer auf einander senkrechten Ebenen $=$ 0 ist; so wird derselbe auch die Eigenschaft haben, daß die Schwere dem System keine Umdrehungsbewegung um eben diesen Punkt verschaffen kann. Diesen Punkt nennt man den Schwerpunkt *), und er ist von einem ausgebreiteten Nutzen in der ganzen Mechanik.

Um ihn zu bestimmen hat man nur die Entfernung desselben von dreien auf einander senkrechten gegebenen Ebenen zu suchen. Die Summe der Produkte der Maßen in ihre Entfernungen von einer durch den Schwerpunkt gehenden Ebene aber ist $=$ 0; folglich wird die Summe der Pro-

*) Er pflegt auch wohl Mittelpunkt der Schwere nach dem französischen centre de gravité, auch Mittelpunkt des Gleichgewichts, Gleichgewichtspunkt genannt zu werden. Wenn also der Körper und die Kräfte gegeben sind; so muß man, um diesen Punkt zu finden, drei auf einander senkrechte Ebenen der Lage nach als bekannt annehmen, und alsdann vermöge der Analysis die Lage dreier anderer Ebenen, die mit den erstern parallel laufen, und deren gemeinschaftlicher Durchschnitt den verlangten Schwerpunkt giebt, bestimmen.

M.

Digitized by Google

dukte eben dieser Maßen in ihre Entfernungen von einer andern der vorigen parallelen Ebene nothwendig dem Produkte aller Maßen in die Entfernung des Schwerpunkts von eben dieser Ebene gleich seyn, und man erhält diese Entfernung, wenn man die Summe der Produkte der Maßen in ihre Entfernungen durch die Summe der Maßen selbst dividirt. Hieraus entspringen die bekannten Formeln für die Schwerpunkte der Linien, der Flächen und der Körper.

13) Wir wollen jetzt die maxima und minima in Betrachtung ziehen, die beym Gleichgewicht statt finden können, und in dieser Hinsicht die allgemeine Formel

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} = 0,$$

für's Gleichgewicht zwischen den nach den Linien p, q, r, etc. würkenden Kräften P, Q, R, etc. (2 Abschn. 2) wieder vornehmen.

Man kan leicht annehmen, daß diese Kräfte so beschaffen seyen, daß die Größe $Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$ eine vollkommene Differentialgröße einer Funktion p, q, r etc. sey; drückt man diese durch Φ aus; so ist

$$d\Phi = Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$

und man hat alsdann für's Gleichgewicht die Gleichung $d\Phi = 0$, woraus man sieht, daß das System eine solche Lage haben müsse, daß die Funktion Φ allgemein geredet entweder ein maximum oder ein minimum sey.

Ich sage mit Vorbedacht: allgemein geredet, denn man weiß, daß wenn eine Differentialgröße $= 0$ ist; dies nicht immer ein maximum oder ein minimum andeute; wie man dies aus der Theorie der krummen Linien ersieht.

Die vorige Voraussetzung hat allgemein statt, die Kräfte P, Q, R, etc. mögen nun würklich auf feste Punkte würken oder auf Körper desselben Systems, wenn sie zugleich gewissen Funktionen der Entfernungen (2 Abschn. 54) proportional sind, welches gemeiniglich in der Natur der Fall ist.

Bey dieser Annahme der Kräfte, wird also das System im Gleichgewicht seyn, wenn die Funktion Φ ein maximum oder ein minimum ist; und

Digitized by Google

und hierinn besteht der Grundsatz, den Hr. von Maupertuis unter dem Namen des Gesetzes der Ruhe bekannt gemacht hat.

14) Betrachtet man nun ein System von schweren Körpern im Gleichgewicht; so werden die Kräfte P, Q, R etc., die von der Schwere herkommen, wie wir bereits wissen; den Massen der Körper proportional, folglich beständig seyn, und die Entfernungen p, q, r etc. werden nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet sey. In diesem Falle hat man daher:

$$\Phi = Pp + Qq + Rr + \text{etc.}$$

und es wird folglich, da die Linien p, q, r etc. als parallel angesehen werden, die Größe

$$\frac{\Phi}{P + Q + R + \text{etc.}}$$

die Entfernung des Schwerpunkts des ganzen Systems vom Mittelpunkt der Erde anzeigen; die also entweder ein maximum oder ein minimum seyn wird, wenn das System sich im Gleichgewicht befinden wird; sie wird z. B. ein minimum bey der Kettenlinie und ein maximum bey mehrern Kugeln, die eine Hölung bilden, seyn. Dieser Grundsatz ist sehr alt.

15) Denkt man sich jetzt in der Voraussetzung (13) das System in Bewegung und drücken u', u'', u''', etc. die Geschwindigkeiten m', m'', m''', etc. aber die Massen in Rücksicht auf die verschiedenen Körper, die das System ausmachen, aus; so verschaft das Gesetz der Erhaltung der lebendigen Kräfte, wovon wir im 2ten Theile einen direkten und allgemeinen Beweis geben werden, folgende Gleichung:

$$m' u'^2 + m'' u''^2 + m''' u'''^2 + \text{etc.} = \text{Const.} - 2\Phi.$$

Weil daher im Zustande des Gleichgewichts die Größe Φ entweder ein minimum oder ein maximum ist; so folgt daraus, daß auch die Größe $m' u'^2 + m'' u''^2 + m''' u'''^2 + \text{etc.}$, die die lebendige Kraft des ganzen Systems ausdrückt, ein maximum oder ein minimum ist; und hierinn besteht der Grundsatz der Statik, den der Marquis von Courtivron bekannt gemacht hat, daß nehmlich unter allen Lagen, die ein System annehmen kann, diejenige, worinn die lebendige Kraft am größten oder kleinsten ist, zugleich

Digitized by Google

zugleich auch diejenige ist, worinn man es vor allen andern seßen müsse, damit es ein Gleichgewicht sey.

16) Wir haben eben gesehen, daß die Funktion Φ ein minimum oder maximum ist, wenn die Lage des Systems so beschaffen ist, daß ein Gleichgewicht vorhanden ist; jetzt wollen wir erweisen, daß wenn diese Funktion ein minimum ist, alsdann das Gleichgewicht Bestandt hat, so daß wenn man gleich anfangs das System als im Zustand des Gleichgewichts sich vorstellt, und es hernach ein wenig von diesem Zustande abgebracht wird, sich wieder in seinen vorigen Zustand zu versetzen, und unendlich kleine Oscillationen machen wird; und daß im Gegentheil in dem Falle, wo dieselbe Funktion ein maximum ist, das Gleichgewicht nicht fortdauren wird; sondern daß, wenn das System alsdenn einmal gestört worden ist, es Oscillationen machen kann, die nicht unendlich klein sind, und die es immer mehr von seinem ersten Zustand abbringen können.

17) Um diesen Satz auf eine allgemeine Art darzuthun, so erwäge ich, daß die Lage des Systems, seine übrige Form mag auch beschaffen seyn wie sie will, d. h. die Lage der verschiedenen Körper die dasselbe ausmachen, allezeit durch eine gewisse Anzahl von veränderlichen Größen bestimmt ist, und daß die Größe Φ eine gegebene Funktion eben dieser veränderlichen Größen seyn wird. Gesetzt nun, im Zustande des Gleichgewichts seyen die eben genannten veränderlichen Größen = a, b, c, etc. und in einem demselben sehr nahe kommenden Zustande seyen sie a + x, b + y, c + z etc. wo die Größen x, y, z etc. sehr klein seyen; so bekommt die Funktion Φ, wenn man diese letztern Werthe in den vorigen Ausdruck für dieselbe substituirt, und nach den Dimensionen von x, y, z, etc. ordnet, folgende Form:

$$\Phi = A + Bx + Cy + Dz + \text{etc.}$$
$$+ Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \text{etc.}$$

wo die Größen A, B, C, etc. in a, b, c, etc. gegeben sind.

Aber im Zustande des Gleichgewichts muß der Werth von $d\Phi = o$ seyn, die Lage des Systems mag auch eine Veränderung erleiden, welche sie

Digitized by Google

sie will. Das Differential von Φ muß daher überhaupt = 0 seyn, wenn x, y, z, etc. = 0 sind, folglich ist B = 0, C = 0, D = 0 etc.

Man bekommt daher für einem dem Gleichgewicht sehr nahen Zustand diesen Ausdruck für Φ

$$\Phi = A + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \text{etc.}$$

worinn man, so lange die veränderlichen Größen x, y, z, etc. sehr klein sind, nur bis auf ihre 2te Dimension zu gehen braucht.

18) Man sieht aber hieraus, daß, damit die Größe Φ allezeit ein minimum sey, wenn x, y, z, etc. = 0 sind; die Funktion

$$Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \text{etc.}$$

die ich X nennen will, allezeit positiv seyn muß, die Werthe der veränderlichen Größen x, y, z etc. mögen auch beschaffen seyn, wie sie wollen.

Wir wollen zuerst y, z, etc. = 0 setzen, alsdann haben wir $X = Fx^2$, welche Größe immer positiv seyn wird, wenn F positiv ist; also haben wir für die erste Bedingung des Gleichgewichts $F > 0$.

Weil nun die Größe X allezeit positiv ist, wenn y, z, etc. = 0 sind; so ist klar, daß, damit sie immer positiv bleibe, sie nie = 0 werden könne, wenn man diesen veränderlichen Größen verschiedene Werthe giebt. Zieht man also aus der Gleichung X = 0 den Werth von x; so muß derselbe imaginair seyn, aber die Gleichung X = 0 giebt:

$$x + \frac{Gy + Kz + \text{etc.}}{2F} = \sqrt{-\frac{Hy^2 + Lyz + Mz^2 + \text{etc.}}{F} + \frac{(Gy + Kz + \text{etc})^2}{(2F)^2}}$$

folglich muß die Größe

$$\frac{Hy^2 + Lyz + Mz^2 + \text{etc.}}{F} - \left(\frac{Gy + Kz + \text{etc.}}{2F}\right)^2$$

F die

die ich Y nennen will, allezeit positiv seyn. Diese Größe läßt sich aber auf folgende Form bringen:

$$Py^2 + Qyz + Rz^2 + \text{etc.}$$

wenn man Kürze halber setzt

$$P = \frac{H}{F} - \frac{G^2}{4F^2},$$

$$Q = \frac{L}{F} - \frac{GK}{2F^2},$$

$$R = \frac{M}{F} - \frac{K^2}{4F^2},$$

etc.

Durch den vorigen ähnliche Schlüsse kommt man daher zuerst zur Bedingung $P > 0$ und dann muß der Werth von y, der aus der Gleichung $Y = 0$ erhalten worden ist, imaginair seyn, diese Gleichung aber giebt:

$$y + \frac{Qz + \text{etc.}}{2P} = \sqrt{-\frac{Rz^2 + \text{etc.}}{P} + \left(\frac{Qz + \text{etc.}}{2P}\right)^2}$$

folglich muß die Größe

$$\frac{Rz^2 + \text{etc.}}{P} - \left(\frac{Qz + \text{etc.}}{2P}\right)^2$$

die ich Z nennen will, und die sich auf die Form $Tz^2 + \text{etc.}$ bringen läßt, wenn man um der Kürze willen $T = \frac{R}{P} - \frac{Q^2}{4P^2}$, etc. setzt, jederzeit positiv seyn. Folglich muß man wieder $T > 0$ haben u. s. w.

Enthält die Funktion X nur 3 veränderliche Größen x, y, z, so ist offenbar, daß die 3 Bedingungen $P > 0$, $P > 0$, dazu hinreichen werden, sie allezeit positiv zu machen, und folglich wird alsdenn auch ein minimum statt

Digitized by Google

statt finden. Wäre noch eine 4te veränderliche Größe vorhanden; so müßte man noch eine Bedingung finden, und überhaupt muß die Zahl der Bedingungen der Zahl der veränderlichen Größen allezeit gleich seyn.

Sollte gegentheils die Größe Φ immer ein maximum seyn, wenn x, y, z etc. = o sind, so müßte die Funktion X allezeit negativ seyn. Folglich muß F erstlich in diesem Falle negativ seyn, und 2tens die Gleichung X = o keine würkliche Wurzel für x geben; dies wird dieselben Bedingungen verschaffen, die man im vorhergehenden Falle gefunden hat, nehmlich P > o, T < o etc.

Hieraus folgt, daß die Bedingungen des maximum einerley mit denen des minimum sind ausser der erstern, die für das minimum F > o und für's maximum F < o ist.

19) Ich bemerke jetzt, daß die Größen X, Y, Z, etc. sich unter folgende Form bringen lassen:

$$X = F\left[\left(x + \frac{Gy + Kz + \text{etc.}}{2F}\right)^2 + Y\right]$$

$$Y = P\left[\left(y + \frac{Qz + \text{etc.}}{2P}\right)^2 + Z\right]$$

$$Z = T\left[(z + \text{etc.})^2 + \text{etc.}\right]$$

etc.

Folglich, wenn man nach und nach die gehörigen Substitutionen verrichtet; so erhält man:

$$X = F\left(x + \frac{Gy + Kz + \text{etc.}}{2F}\right)^2 + FP\left(y + \frac{Qz + \text{etc.}}{2P}\right)^2 + FPT(z + \text{etc.})^2 \text{ etc.}$$

Digitized by Google

Hieraus sieht man denn deutlich, daß der Werth von X allezeit positiv seyn wird, wenn F, P, T, etc. > 0 und im Gegentheil, daß er allezeit negativ seyn wird, wenn $F < 0$ und P, T, etc. > 0.

Nimmt man nun um mehrerer Einfachheit willen statt der veränderlichen Größen x, y, z, etc. andere ξ, η, ζ, etc. an, so daß

$$\xi = x + \frac{Gy + Kz + \text{etc.}}{2F}$$

$$\eta = y + \frac{Qz + \text{etc.}}{2P}$$

etc.

so kann man der Funktion X diese sehr einfache Form geben:

$X = f\xi^2 + g\eta^2 + h\zeta^2 + \text{etc.}$ so daß

$\Phi (= A + X\,\mathfrak{M}.) = A + f\xi^2 - g\eta^2 + h\zeta^2 + \text{etc.}$

wo die Coefficienten f, g, h, etc. nothwendig alle positiv seyn werden, in dem Falle, worinn Φ ein minimum ist, aber negativ in dem Falle, worinn Φ ein maximum ist.

20) Um also den Lehrsatz (16) zu erweisen, braucht man nur die vorige Ausdrückung für Φ in der Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kräfte zu substituiren (15); so erhält man

$$M'u'^2 + M''u''^2 + M'''u'''^2 + \text{etc.} = \text{Const.} - 2A - 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 \text{ etc.}$$

Nun hat man im Zustande des Gleichgewichts nach der Voraussetzung $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ etc.; folglich auch $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. (19); Gesetzt also, man bringe das System etwas von diesem Zustande ab, und gäbe den Körpern M', M'', M''', etc. die sehr kleinen Geschwindigkeiten V', V'', V''', etc. so müßte man $u' = V'$, $u'' = V''$, $u''' = V'''$ etc. haben, wenn $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. Man hat also $M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \text{etc.} = \text{Const.} - 2A$; und dadurch wird die beliebige beständige Größe sich bestimmen lassen.

Die

Digitized by Google

Die vorhergehende Gleichung verwandelt sich also in diese:

$$M'u'^2 + M''u''^2 + M'''u'''^2 + \text{etc.} = M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \text{etc.}$$
$$- 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 \text{ etc.}$$

und hieraus ist es leicht folgende 2 Schlüße zu ziehen:

1) Daß im Falle, daß Φ ein minimum ist, worin die Coefficienten f, g, h, etc. allezeit positiv sind, die allezeit positive Größe $2f\xi^2 + 2g\eta^2 + 2h\zeta^2 + \text{etc.}$ kleiner oder wenigstens nicht viel größer seyn kann, als die gegebene Größe $M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \text{etc.}$, die an und für sich sehr klein ist; nennt man also diese Größe T; so hat man für jede der veränderlichen Größen ξ, η, ζ. etc. diese Grenzen

$$\pm \sqrt{\frac{T}{2f}}, \pm \sqrt{\frac{T}{2g}}, \pm \sqrt{\frac{T}{2h}} \text{ etc.},$$

wozwischen sie nothwendig eingeschlossen seyn werden; woraus folgt, daß in diesem Falle das System sich nur sehr wenig von seinem Zustande des Gleichgewichts entfernen kann, und daß es nur sehr kleine Oscillationen, und zwar von einem bestimmten Umfange wird machen können.

2) Daß im Falle, daß Φ ein maximum ist, worinn die Coefficienten f, g, h, etc. alle negativ sind, die allezeit positive Größe $-2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\xi^2$ etc. ins unendliche wachsen kann, und daß sich auf diese Art das System immer mehr von seinem Zustande des Gleichgewichts entfernen kann.

Wenigstens zeigt die obige Gleichung, daß in diesem Falle nichts hindere, daß die veränderlichen Größen ξ, η, ζ etc. immer mehr zunehmen; jedoch folgt daraus nicht, daß sie in der That immer zunehmen müssen, diesen letztern Satz werden wir noch im fünften Abschnitt der Dynamik erweisen.

Digitized by Google

Vierter Abschnitt.

Eine sehr einfache Methode die nöthigen Gleichungen für das Gleichgewicht eines Systems von Körpern zu finden, die als Punkte oder als endliche Maßen angesehen sind, und durch gegebene Kräfte gezogen werden.

1) Diejenigen, die bisher über das Gesetz des Bestrebens nach Geschwindigkeit geschrieben haben, bemühten sich mehr die Wahrheit dieses Gesetzes durch die Uebereinstimmung seiner Resultate mit denen der gewöhnlichen Grundsätze der Statik zu beweisen, als den Nutzen zu zeigen den man davon machen kann, um die Aufgaben dieser Wissenschaft direkt aufzulösen. Wir haben uns vorgesetzt dies leztere mit aller der Allgemeinheit zu erfüllen, als die Sache fähig ist aus diesem Gesetz analytische Formeln herzuleiten, die die Auflösung aller Aufgaben enthalten, die nur beym Gleichgewichte der Körper vorkommen können; eben so beinah wie die Formeln der Subtangenten, der Radien Osculi u. a. die Bestimmung dieser Linien in allen krummen Linien in sich einschliesen.

2) Die im ersten Abschnitt gezeigte Methode ist in allen Fällen anwendbar und erfordert, wie man gesehen hat, ganz allein analytische Operationen; allein man stößt oft, wenn man die veränderlichen Größen und ihre Differentialien sogleich durch die Bedingungsgleichungen wegschaffen will, auf sehr zweifelhafte und verwickelte Calkuls; wir wollen daher dieselbe Methode noch unter einer einfachern Form darstellen, und in dieser Absicht alle Fälle auf den eines völlig freyen Systems zurückbringen.

3) Es seyen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, etc. die verschiedenen Bedingungsgleichungen, die durch die Natur des Systems gegeben sind; die Größen L, M, N, etc. mögen gewisse endliche Funktionen der veränderlichen Größen x, y, z, x', y', z', etc. ausdrücken. Differentiirt man diese

Digitized by Google

diese Gleichungen; so bekommt man folgende: $dL = o$, $dM = o$, $dN = o$, etc. und diese geben das Verhältniß an, welches zwischen den Differentialien der veränderlichen Größen statt findet. Ueberhaupt werden wir unter $dL = o$, $dM = o$, $dN = o$ etc. die Bedingungsgleichungen zwischen diesen Differentialien anzeigen, es mögen diese Gleichungen nun selbst entweder vollständige Differentialien seyn oder nicht, in dem sich die Differentialien hier nur auf Linien beziehen.

Diese Gleichungen sollen nur dazu dienen eine gleiche Anzahl von Differentialien in der Gleichung des Bestrebens nach Geschwindigkeit wegzuschaffen, und alsdann muß jeder der Coefficienten der übrig bleibenden Differentialien, $= o$ seyn. Es ist daher nicht schwer aus der Theorie dieser auf Linien sich beziehenden Gleichungen es zu beweisen, daß man dieselben Resultate erhalten wird, wenn man nur zur Gleichung des Bestrebens nach Geschwindigkeit die verschiedenen Bedingungsgleichungen $dL = o$, $dM = o$, $dN = o$, etc. jede durch einen unbestimmten Coefficienten multiplicirt addirt, und hernach alle Glieder, die durch einerley Differential multiplicirt sind $= o$ setzt; dies giebt nehmlich soviel einzele Gleichungen als Differentialien vorhanden sind; endlich schaffe man aus diesen leztern Gleichungen die unbestimmten Coefficienten weg, wodurch man die Bedingungsgleichungen multiplicirt hat.

4) Hieraus erwächst dann die sehr einfache Regel, um die Bedingungen des Gleichgewichts für ein gewisses System zu finden:

Man nehme die Summe der Momente aller Kräfte, die im Gleichgewicht seyn sollen (1 Abschn. 5.), und addire dazu die verschiedenen Differentialfunktionen, die Null seyn müssen, nach den Bedingungen der Aufgaben, jede dieser Funktionen multiplicire man durch einen unbestimmten Coefficienten und setze alles $= o$; so erhält man eine Differentialgleichung, die man wie eine gewöhnliche Gleichung de maximis et minimis behandlen muß, und woraus man so viele einzele endliche Gleichungen zieht, als veränderliche Größen vorhanden sind; befreit man endlich diese Gleichungen von den unbestimmten Coefficienten; so werden sie alle für das Gleichgewicht nöthige Bedingungen geben.

5) Die

Digitized by Google

5) Die gesuchte Differentialgleichung wird daher die Form haben:

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} + RdL + \mu dM + \nu dN + \text{etc.} = 0,$$

wo R, μ, ν unbestimmte Größen sind, wir werden sie in der Folge allgemeine Gleichung des Gleichgewichts nennen.

Diese Gleichung wird für jede Coordinate als x von jedem der Körper des Systems eine Gleichung von folgender Gestalt geben:

$$P\frac{dp}{dx} + Q.\frac{dq}{dx} + R\frac{dr}{dx} + \text{etc.} + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + \text{etc.} = 0,$$

so daß die Zahl dieser Gleichungen der Zahl aller Coordinaten der Körper gleich ist. Wir werden diese besondere Gleichungen des Gleichgewichts nennen.

6) Alle Schwierigkeit besteht daher darin, die unbestimmten Größen R, μ, ν, etc. aus diesen leztern Gleichungen wegzuschaffen, dies kann nun zwar jederzeit durch die bekannten Methoden geschehen, allein man muß ja immer diejenigen hiezu wählen, die zu den einfachsten Resultaten führen können. Die endlichen Gleichungen enthalten alle für's Gleichgewicht nöthige Bedingungen; und da die Zahl dieser Gleichungen der Zahl aller Coordinaten der Körper des Systems weniger der der unbestimmten Größen R, μ, ν, etc., die man hat wegschaffen müssen, gleich ist, und überdies eben diese unbestimmte Größen an Zahl den endlichen Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, etc. gleich ist; so müssen auch die genannten Gleichungen mit diesen leztern verbunden, jederzeit mit den Coordinaten aller Körper von gleicher Zahl seyn, sie reichen also dazu hin, diese Coordinaten zu bestimmen, und die Lage bekannt zu machen, die jeder Körper annehmen muß, um mit den übrigen im Gleichgewicht zu seyn.

7) Ich bemerke jezt, daß die Glieder RdL, μdM, νdN, etc. der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht, auch als solche angesehen werden

Digitized by Google

ten können, die die Momente der verschiedenen am System angebrachten Kräfte vorstellen.

Denn weil dL eine Differentialfunktion der veränderlichen Größen x', y', z', x'', y'', etc. ist, die zu Coordinaten der verschiedenen Körpern des Systems dienen; so ist diese Funktion aus verschiedenen Theilen zusammengesetzt, die ich durch dL', dL'', etc. andeuten will, so daß $dL = dL' + dL'' + \text{etc.}$; wo dL' nur solche Glieder in sich einschließt, worin dx', dy', dz', vorkommt, dL'' aber nur solche, die dx'', dy'', dz'' enthalten, u. s. w.

Auf diese Art wird das Glied RdL der allgemeinen Gleichung aus den Gliedern RdL', RdL'' etc. zusammengesetzt seyn. Giebt man also dem Gliede RdL' die Form:

$$R \sqrt{\left[\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right]} \cdot \frac{dL'}{\sqrt{\left[\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right]}}$$

so ist klar (2 Abschn. 8), daß diese Größe das Moment einer Kraft

$$= R \sqrt{\left[\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right]}$$

vorstellen kann, die an einem Körper angebracht ist, dessen Coordinaten x', y', z', sind, und die senkrecht auf der Fläche ist, deren Gleichung $dL' = 0$ ist, wenn man nur x', y', z', als variabel ansieht. Auf gleiche Art kann das Glied RdL'' das Moment einer Kraft vorstellen, die

$$= V \sqrt{\left[\left(\frac{dL''}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dz''}\right)^2\right]} \text{ ist;}$$

die an einem Körper angebracht ist, dessen Coordinaten x'', y'', z'' sind, und die senkrecht auf die krumme Fläche ist, deren Gleichung $dL'' = 0$ ist, wenn man nur x'', y'', z'' als variabel betrachtet u. s. w.

Digitized by Google

Allgemein also wird das Glied RdL die Würkung verschiedener Kräfte ausdrücken können, die

$$= R\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right]}$$

$$R\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz''}\right)^2\right]} \quad \text{etc.}$$

sind, und die an die Körper angebracht sind, wozu die Coordinaten x', y' z, x'', y'', z'' etc. gehören nach den senkrechten Direktionen auf verschiedene krumme Flächen, die durch die Gleichung $dL =$ vorgestellet wird, wenn man zuerst x', y', z' und hernach x'', y'', z'' als veränderlich annimmt u. s. w.

8) Hieraus ergiebt sich, daß jede Bedingungsgleichung zu einer oder mehrern Kräften gehört, die am System nach gegebenen Direktionen angebracht sind, so daß dasselbe im Gleichgewicht bleiben wird, man mag nun entweder auf diese Kräfte, oder auf die Bedingungsgleichungen Rücksicht nehmen.

Gegentheils können diese Kräfte statt den Bedingungsgleichungen dienen, die aus der Natur des gegebenen Systems herfliessen, so daß wenn man diese Kräfte anwendet, man die Körper als ganz frey und ohne eine Verbindung unter einander ansehen kann. Und hieraus ersieht man den metaphysischen Grund, warum die Einführung der Glieder $RdL + \mu dM +$ etc. in die allgemeine Gleichung fürs Gleichgewicht macht, daß man hernach diese Gleichung so behandlen kann, als wenn alle Körper des Systems völlig frey wären, worinn dann der Geist der gegenwärtigen Methode besteht.

Um eigentlicher zu reden, so vertreten die genannten Kräfte die Stelle der Widerstände, die die Körper wegen ihrer gegenseitigen Verbindung erleiden müßten oder der Hindernisse, die nach der Natur des Systems ihrer Bewegung sich entgegensetzen könnten, oder vielmehr diese Kräfte sind nichts anders als die Kräfte dieser Widerstände selbst, die einander gleich und dem von den Körpern verübten Druck gerade entgegen sind.

Unsre

Digitized by Google

Unsre Methode giebt, wie man sieht, das Mittel an die Hand, diese Kräfte und Widerstände zu bestimmen, und dies ist nicht ein geringer Vorzug derselben vor andern.

9) Bisher haben wir die Körper nur als Punkte betrachtet, und gesehen, wie man die Gesetze des Gleichgewichts dieser Punkte bestimmt, ihre Anzahl mag auch so groß seyn, und die Kräfte die auf sie würken von einer Beschaffenheit seyn, wie sie wollen. Ein Körper von einem gewissen Volumen und Figur aber ist nichts anders als die Vereinigung unzähliger materieller Theile oder Punkte, und man sieht also hieraus, daß man durch Anwendung der vorhergehenden Grundsätze auch die Gesetze des Gleichgewichts für Körper von einer gewissen Figur bestimmen kann.

In der That besteht die gewöhnliche Art mechanische Aufgaben, die Körper von endlichen Maßen betreffen, aufzulösen, darin, daß man anfangs nur eine gewisse Anzahl von Punkten, die in endlichen Entfernungen sich von einander befinden, betrachtet und die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung derselben aufsucht; hierauf aber diese Untersuchung auf eine unbestimmte Anzahl von Punkten erstreckt, und endlich gar die Anzahl dieser Punkte unendlich groß, ihre Entfernungen von einander aber zugleich unendlich klein, annimmt, zugleich aber auch die für eine endliche Anzahl von Punkten gefundene Formeln gehörig verändert, sowie es der Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen erfodert.

Dies Verfahren ist wie man sieht den geometrischen und analytischen Methoden gleich, die der Infinitesimal-Rechnung vorher giengen, und hat dieser Calkul vor andern den Vorzug auf eine erstaunenswürdige Art die Auflösung der Aufgaben, die die krummen Linien betreffen, zu erleichtern und zu vereinfachen; so besteht derselbe nur darin, daß er die krummen Linien als würklich krumm betrachtet, ohne nöthig zu haben sie zuerst als Polygone, und dann erst als krumm anzusehen. Fast denselben Vortheil hat man also bey der Behandlung mechanischer Aufgaben, wenn man eine direkte Auflösung verlangt und sogleich die Körper, die endliche Maßen haben, als eine Vereinigung von einer unendlichen Menge von Punkten oder Körperchen betrachtet, wovon auf jedes gewisse gegebene Kräfte

Digitized by Google

würken. Durch diese Betrachtung ist nichts leichter als die eben vorhin vorgetragene allgemeine Methode zu vereinfachen und zu verändern.

10) Man bemerke aber ja vor allen andern, daß bey der Anwendung dieser Methode auf Körper von einer endlichen Maße, wovon jeder Punkt durch gewisse Kräfte getrieben wird, zwei Arten von Differentialgrößen vorkommen, die man ja gut zu unterscheiden hat. Die einen beziehen sich auf die verschiedenen Punkte, die die Körper ausmachen; die andern hängen gar nicht von der gegenseitigen Lage dieser Punkte ab, sondern stellen nur die unendlich kleinen Räume vor, die jeder Punkt beschreiben kann; indem man setzt, die Lage des Körpers erleide eine unendlich kleine Veränderung.

Wir hatten bisher nur Differentialien von dieser leztern Art zu betrachten, und sie durch das gewöhnliche Zeichen d angezeigt; jezt aber müssen wir zugleich auf zwei Arten von Differentialien sehen, und daher noch ein neues Zeichen einführen; wir wollen daher durch d ins künftige Differentialgrößen von der erstern Art andeuten, die mit denen übereinkommen, welche man gewöhnlich in der Geometrie betrachtet, die Differentialgrößen von der 2ten Art aber, die dem Gegenstand, den wir hier abhandlen, eigen sind, wollen wir durch δ andeuten, welches Zeichens wir uns ehemals schon beym Variations-Calkul bedient haben, womit der gegenwärtige ganz übereinkommen muß.

Eben aus dieser Ursache wollen wir auch die Differentialgrößen die durch δ angedeutet werden, Variationen nennen, Differentialien aber sollen diejenigen heißen, deren Kennzeichen d ist; übrigens werden dieselben Formeln, die die gewöhnlichen Differentialien geben, auch die Variationen geben, wenn man nur statt d, δ substituirt.

11) Zulezt bemerke ich noch, daß man anstatt eine gegebene Maße als eine unendliche Menge von Punkten zu betrachten, wovon einer immer auf den andern folgt, nach dem Geist der Infinitesimalrechnung, sie vielmehr als aus unendlich kleinen Elementen zusammengesezt sich vorstellen kann, die von derselben Dimension als die ganze Maße selbst seyen. Um nun die Kräfte zu erhalten, die auf jedes dieser Elemente würken; so

muß

Digitized by Google

muß man die Kräfte P, Q, R etc., die man auf jeden Punkt dieser Elemente angebracht setzt, und die man als mit denen analog ansieht, die von der Würkung der Schwere entstehen, mit diesen Elementen selbst multiplicirem.

12) Nennen wir daher m die ganze Maße, dm einen ihrer Elemente; so drücken Pdm, Qdm, Rdm etc die Kräfte aus, die auf's Element dm würken, nach den Direktionen der Linien p, q, r etc. Multiplicirt man daher wiederum diese Kräfte durch die Variationen δp, δq, δr etc.; so erhält man ihre Momente, deren Summe für jedes Element dm durch die Formel

(Pδp + Qδq + Rδr + etc.) dm ausgedrückt werden können. Um nun die Summe der Momente aller Kräfte des Systems zu erhalten, braucht man nur diese Formel mit Rücksicht auf die ganze gegebene Maße zu integriren.

Diese ganzen Integrale d. h. in Ansehung des Umfangs der ganzen Maße, wollen wir durch den großen Buchstaben S andeuten, das gewöhnliche Zeichen ſ aber dazu gebrauchen, die einzelen und unbestimmten Integralien dadurch anzuzeigen.

13) Auf diese Art erhalten wir für die Summe der Momente aller Kräfte des Systems die Integralformel:

S (Pδp + Qδq + Rδr + etc.) dm;

und diese Größe müßte überhaupt = o im Zustande des Gleichgewichts seyn.

Nach der Natur des Systems aber giebt es nothwendig gegebene Verhältnisse zwischen den verschiedenen Variationen δp, δq, δr etc., die sich auf jeden Punkt der Maße beziehen; man muß sie daher auf eine gewisse Anzahl von unabhängigen und unbestimmten Variationen bringen; alsdann werden die durch diese letztern Variationen multiplicirte Glieder = o seyn, und man bekömmt auf diese Art die einzelen Gleichungen für's Gleichgewicht. Diese Reduktionen aber können oft sehr verwickelt

Digitized by Google

seyn; man muß sie daher vermittelst der Methode, die wir in diesem Abschnitte gegeben haben, zu vermeiden suchen.

14) Um diese Methode aber auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden, wollen wir annehmen, $L = 0$, $M = 0$ etc. seyen die Bedingungsgleichungen, die nach der Natur der Aufgabe statt finden müssen in Ansehung jedes Punkts der Masse, und wir wollen sie unbestimmte Bedingungsgleichungen nennen.

Differentiirt man diese Gleichungen nach dem Zeichen δ so erhält man diese; $\delta L = 0$, $\delta M = 0$, etc. Man multiplicire die Größen δL, δM etc. durch die unbestimmten Größen R, μ etc.; und nehme das ganze Integrael davon, welches ist

$$S(R\delta L + \mu\delta M + \text{etc.});$$

man addire hierauf dieses Integrale zu dem des vorhergehenden Artikels; so bekommt man die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht.

Uebrigens ist zu bemerken, daß es nicht nothwendig ist, daß δL, δM etc. vollkommene Variationen der Funktionen x, y, z, dx, dy, etc. sind, sondern, daß es genug ist, wenn nur $\delta L = 0$; $\delta M = 0$ etc. die unbestimmten Bedingungsgleichungen zwischen den Variationen von x, y, z, dx, dy etc. (3) sind.

15) Um aber die Sache so allgemein als möglich zu machen; so bemerke man, daß es gar wohl möglich ist, daß ausser den Kräften, die überhaupt auf alle Punkte der Masse wirken, einige noch vorhanden seyen, die nur auf bestimmte Punkte dieser Masse würken, und diese Punkte sind gewöhnlich diejenigen, die sich an den Enden der gegebenen Masse befinden, d. h. die im Anfang und am Ende des mit S bezeichneten Integrals sind.

Auf gleiche Art können auch einzele Bedingungsgleichungen dieser Punkte statt finden, und diese wollen wir bestimmte Bedingungsgleichungen nennen, um sie von denen zu unterscheiden, die bei dem ganzen Umfange der Masse überhaupt statt finden, und wir wollen sie durch $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, etc. oder vielmehr durch $SA = 0$, $SB = 0$, $SC = 0$, etc. bezeichnen.

Wir

Digitized by Google

Wir wollen mit einem kleinen Strich oder mit zweien dreien, etc. alle Größen andeuten, die sich auf bestimmte Punkte der Masse beziehen, und insbesondere wollen wir durch einen Strich diejenigen anzeigen, die sich auf den Anfang des durch S bezeichneten Integrals beziehen, mit zweien Strichen aber diejenigen, die sich auf's Ende dieses Integrals beziehen, mit dreien und mehrern, die zu den dazwischen liegenden Punkten gehören.

Man muß also zum Integrale S (Pδp + Qδp + Rδr + etc.) dm die Größe P′δp′ + Q′δq′ + R′δr′ + etc. + P″δp″ + Q″δq″ + R″δr″ + etc. hinzuaddiren, und zum Integrale S (λδL + μδM + etc.) die Größe αδA + βδB + γδC + etc.

Auf diese Art erhält die allgemeine Formel für's Gleichgewicht folgende Form:

S (Pδp + Qδq + Rδr + etc.) dm + S (λδL + μδM + etc.) + P′δp′ + Q′δq′ + R′δr′ + etc. + P″δp″ + Q″δq″ + R″δr″ + etc. + αδA + βδB + γδC + etc. = 0.

16) Substituirt man in dieser Gleichung die Werthe von δp, δq, δr, etc.; δL, δM, etc. in δx, δy, δz, δdx, δdy, etc., eben so wie die von δp′, δp″, etc.; δq′, δq″, etc., δA, BB, etc. in x′, x″, etc. δx′, δx″, δx‴, etc., δdx′, etc., die aus einzelen Umständen jeder Aufgabe hergeleitet werden; so erhält man allezeit eine Form, die denen, die der Variations-Calkul zur Bestimmung der maxima und minima der Integralformeln giebt, analog ist; man hat also nur die bekannten Regeln dieses Calkuls hier anzuwenden. Man wird daher erwägen, daß, da die Zeichen d und δ zwei Arten von Differentialgrößen andeuten, die völlig von einander unabhängig sind, es einerley auch ist, wenn sie sich zusammen befinden, in welcher Ordnung sie genommen werden, denn wenn man annimmt, ein Größe leide auf zwei ganz verschiedene Arten eine Veränderung; so bekommt man stets dasselbe Resultat, man mag diese Verände-

Digitized by Google

änderungen in einer Ordnung nehmen als man will. Also wird $\delta dx = d\delta x$ und $d^2 \delta x = \delta d^2 x$ *). u. s. w.

Man kann also jederzeit nach Gefallen die Ordnung dieser Zeichen verändern, ohne doch den Werth der Differentialgrößen zu verändern; für unsre Absicht wird es aber thunlicher seyn, das Zeichen d vor δ zu setzen, damit die vorgegebene Gleichung nur Variationen der Coordinaten und die Differentialien derselben enthalte. Hierinn besteht der erste Fundamentalsatz des Variations-Calkuls.

17) Die Differentialien $d\delta x$, $d\delta y$, $d\delta z$, $d^2\delta x$, etc., die sich unter dem Zeichen S befinden, können aber durch das bekannte Verfahren der partiellen Integrationen weggeschaft werden; denn es ist allgemein

$$\int \Omega d\delta x = \Omega \delta x - \int \delta x d\Omega,$$

$$\int \Omega d^2 \delta x = \Omega d\delta x - d\Omega d x + \int \delta x d^2 \Omega \text{ u. s. f.}$$

wo zu bemerken ist, daß die ausserhalb des Zeichens $\int$ sich befindenden Größen natürlich zu den letzten Punkten der Integralien gehören, aber daß man um diese Integralien vollkommen zu machen, nothwendig die Werthe eben dieser Größen ausserhalb des Zeichens, die zu den ersten Punkten der Integralien gehören, davon abziehen muß, damit alles in diesen Punkten verschwinde; welches aus der Theorie der Integrationen klar ist.

Bezeichnet man also mit einem Strich die Größen die sich auf den Anfang der ganzen durch S bezeichneten Integralien beziehen, und durch zwei Striche diejenigen, die sich auf das Ende derselben beziehen; so hat man folgende Reduktionen:

$$S\Omega d\delta x = \Omega'' \delta x'' - \Omega' \delta x' - S \delta x d\Omega$$

$$S\Omega d^2 \delta x = \Omega'' d\delta x'' - d\Omega'' \delta x'' - \Omega' d\delta x' + d\Omega' \delta x' + S \delta x d^2 \Omega \text{ etc.}$$

und diese können dazu dienen, alle Differentialien wegzuschaffen, die sich unter

*) Im Französischen steht hier wieder $d^2 \delta x$, ein Beweis, daß das Original nicht ganz von Druck- oder Schreibfehlern frey ist. M.

Digitized by Google

unter dem Zeichen S befinden. Diese Reduktionen machen den 2ten Fundamentalsatz des Variations-Calkuls aus.

18) Auf diese Art wird also die allgemeine Formel für's Gleichgewicht auf folgende Form gebracht:

$$S(\Pi \delta x + \Sigma \delta y + \Psi \delta z) + \Delta = 0$$

wo Π, Σ, Ψ Funktionen von x, y, z und ihren Differentialien sind, und wo Δ die Glieder enthält, worinn $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, etc. und ihre Differentialien vorkommen.

Damit also diese Gleichung statt finde, und zwar unabhängig von den Variationen der verschiedenen Coordinaten; so müssen erstlich Π, Σ, $\Psi = 0$ nach dem ganzen Umfang des Integrals S, d. h. in jedem Punkte der Masse seyn. Zweitens aber muß auch jedes Glied von $\Delta = 0$ seyn.

Die unbestimmten Gleichungen $\Pi = 0$, $\Sigma = 0$, $\Psi = 0$, werden überhaupt das Verhältniß geben, das zwischen den veränderlichen Größen x, y, z; Platz finden muß; aber alsdann müßte man die unbestimmten veränderlichen Größen λ, μ, ν, etc., deren Anzahl eben so groß ist, als die der unbestimmten Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, etc. (14), daraus wegschaffen.

Ich bemerke aber, daß die Zahl dieser Gleichungen nicht über drei steigen darf, denn da es die unbestimmten Gleichungen zwischen den 3 veränderlichen Größen x, y, z und ihren Differentialien seyn sollen; so ist klar, daß wenn ihrer mehr wie 3 wären, man mehrere Gleichungen als veränderliche Größen hätte, und alsdann müßte die 4te eine nothwendige Folge aus den 3 erstern seyn, und so auch mit den andern. Nie werden also mehr wie 3 unbestimmte Größen λ, μ, ν, wegzuschaffen seyn; so daß man allezeit die Werthe dieser unbestimmten Größen in Funktionen von x, y, z finden kann.

Uebrigens werden die Gleichungen, die durch diese Wegschaffungen verschwinden, durch die Bedingungsgleichungen selbst wieder ersetzt werden, und durch dies Mittel kann man jederzeit die Werthe von x, y, z erhalten, die beym Gleichgewicht des ganzen Systems statt finden müssen.

Digitized by Google

In Ansehung der andern Gleichungen, die von den verschiedenen Gliedern der Größe Δ herkommen, müssen nur einzele Gleichungen bei bestimmten Punkten der Masse statt finden, die vorzüglich dazu dienen, die beliebigen beständigen Größen zu bestimmen, die die Ausdrückungen von x, y, z die aus den vorhergehenden Gleichungen hergeleitet sind, enthalten können. Um Gebrauch von diesen Gleichungen zu machen, so substituire man darinn die gefundene Werthe von λ, μ, etc., schaffe hierauf die unbestimmten Größen α, β, etc. weg, und verbinde damit die Bedingungsgleichungen A = 0, B = 0, etc., die dazu dienen werden, die Stelle derer zu ersetzen, die die eben genannte Wegschaffung der unbestimmten Größen, verschwinden gemacht hat.

19) Endlich ist hier in Ansehung der rechtwinklichten Coordinaten dieselbe Anmerkung zu machen, die wir schon am Ende des 2ten Abschnitts gemacht haben, indem man auf die Variationen δx, δy, δz, das anwendet, was wir in Ansehung der Differentialien dx, dy, dz gesagt haben; was aber diese leztern hier anbetrifft, so ist es nicht erlaubt, an ihre Stelle andere Differentialien zu setzen, es sey denn, daß sie von der Differentiation der endlichen Ausdrückungen von x, y, z herkommen.

Digitized by Google

Fünfter Abschnitt.

Auflösung verschiedener statischen Aufgaben.

Wir wollen nun den Gebrauch unserer Methoden in verschiedenen Aufgaben über das Gleichgewicht der Körper zeigen; man wird aus der Einfachheit und der Schnelligkeit, wodurch sie zur Auflösung führen, leicht erkennen, wie sehr sie denen vorzuziehen sind, die man bisher in der Statik gebraucht hat.

§. I.

Ueber das Gleichgewicht mehrerer auf einem Punkt angebrachten Kräfte und von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

1) Gesetzt man wollte die Gesetze des Gleichgewichts von soviel Kräften, als man will, P, Q, R, etc. finden, wenn alle auf einem Punkt angebracht sind, und nach gegebenen Punkten ihre Richtungen haben.

Nennt man p, q, r, etc. die geradlinigten Entfernungen zwischen dem gemeinschaftlichen Punkt, wo diese Kräfte angebracht sind, und den Punkten, wornach sie ihre Richtungen haben; so erhält man die Formel

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.},$$

für die Summe der Momente aller Kräfte, und diese muß im Zustande des Gleichgewichts $= 0$ seyn.

2) Es seyen x, y, z, die 3 rechtwinklichten Coordinaten des Punkts, worauf alle Kräfte angebracht sind; ferner a, b, c, die rechtwinklichten Coordinaten für den Punkt, wohin die Kraft P ihre Richtung hat; f, g, h, diejenigen des Punkts, wohin die Kraft Q; l, m, n, aber diejenigen wohin die Kraft R ihre Richtung hat u. s. f. Beziehet man nun diese Coordinaten alle auf dieselben festen Achsen im Raume; so erhält man

Digitized by Google

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$
$$q = \sqrt{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2}$$
$$r = \sqrt{(x-l)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2}$$
etc.

und die Größe $Pdp + Qdq + Rdr +$ etc. verwandelt sich in folgende:

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

worin

$$X = \frac{x-a}{p}P + \frac{x-f}{q}Q + \frac{x-l}{r}R + \text{etc.}$$
$$Y = \frac{y-b}{p}P + \frac{y-g}{q}Q + \frac{g-m}{r}R + \text{etc.}$$
$$Z = \frac{z-c}{p}P + \frac{z-h}{q}Q + \frac{z-n}{r}R + \text{etc.}$$

Es ist nicht unnütz zu bemerken, daß in diesen Ausdrückungen die Größen $\frac{x-a}{p}, \frac{y-b}{p}, \frac{z-c}{p}$ den Cosinussen der Winkel gleich sind, die die Linie p d. h. die Direktion der Kraft P mit den Achsen der x, y, z macht; daß ferner $\frac{x-f}{q}, \frac{y-g}{q}, \frac{z-h}{q}$ den Cosinussen der Winkel gleich ist, die die Direktion der Kraft Q mit eben diesen Achsen bildet u. s. f. (2 Abschn. §. 7.)

3) Dies vorausgesetzt wollen wir zuerst annehmen, der Körper oder Punkt, auf dem die Kräfte P, Q, R, etc. angebracht sind, sey völlig frey; alsdann wird gar keine Bedingungsgleichung zwischen den Cordinaten x, y, z statt finden; und die Größe $Xdx + Ydy + Zdz$ wird $= 0$ seyn müssen unab-

Digitized by Google

unabhängig von den Werthen von dx, dy, dz (2 Abschn. 9); dies giebt sogleich

$$X = o,\ y = b,\ Z = o,$$

diese Gleichungen schliessen also die Gesetze des Gleichgewichts von so vielen Kräften in sich ein, als man will, die alle von einem Punkt ausgehen.

4) Setzt man in den Ausdrückungen von X, Y, Z, $P = p$, $Q = q$, $R = r$ (welches hier geschehen kann, weil es gleichgültig ist, auf welche Punkte man annimmt, daß sie würken, wenn sie nur in den Richtungen der Kräfte liegen); so bekommt man folgende Gleichungen:

$$x - a + x - f + x - l + \text{etc.} = o$$
$$y - b + y - g + y - m + \text{etc.} = o$$
$$z - c + z - h + z - n + \text{etc.} = o$$

woraus man zieht, wenn man annimmt die Zahl der Kräfte P, Q, R, etc. sey $= \mu$:

$$x = \frac{a + f + l + \text{etc.}}{\mu}$$
$$y = \frac{b + g + m + \text{etc.}}{\mu}$$
$$z = \frac{c + h + n + \text{etc.}}{\mu}$$

und diese Ausdrückungen von x, y, z, zeigen, daß der Punkt, worauf die Kräfte angebracht sind, in den Schwerpunkt der Punkte, worauf diese Kräfte würken, fällt.

Hieraus folgt denn Leibnitzens Lehrsatz, daß, wenn soviel Kräfte als man will in einem Punkte im Gleichgewicht sind, und man zieht von diesem Punkte gerade Linien, die sowohl die Größe als Richtung jeder Kraft andeuten; so ist dieser Punkt der Schwerpunkt aller Punkte, worin diese Linien sich endigen.

Digitized by Google

Sind daher nur vier Kräfte vorhanden, und man stellt sich eine Pyramide vor, deren vier Winkel in den Enden der geraden Linien seyen, die die Kräfte vorstellen; so wird ein Gleichgewicht zwischen diesen 4 Kräften statt finden, wenn der Punkt, worauf sie würken, im Schwerpunkte der Pyramide ist; denn aus der Geometrie weiß man, daß der Schwerpunkt jeder Pyramide mit dem von 4 Körpern zusammenfällt, die einander gleich und in den 4 Winkeln derselben gesetzt sind. Man verdankt dies letztere Theorem dem Roberval.

5) Betrachtet man die Gleichung

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} - Xdx - Ydy - Zdz = 0$$

welche mit (2) einerley ist, und folglich allgemein statt finden muß, die Differentialien dx, dy, dz mögen auch beschaffen seyn, wie sie wollen; so ist klar, daß man sie als die Gleichung für's Gleichgewicht zwischen den Kräften P, Q, R. etc. ansehen kann, die nach den Linien p, q, r ihre Richtungen haben, und den Kräften X, Y, Z, deren Richtungen die Linien $-x$, $-y$, $-z$ sind, wenn man annimmt, daß alle diese Kräfte auf ein und demselben Punkt angebracht sind. Die 3 Kräfte X, Y, Z sind also im Gleichgewicht mit den Kräften P, Q, R, etc.; allein es ist klar, daß die Kräfte X, Y, Z, wenn ihre Richtungen die Linien x, y, z sind, mit eben diesen Kräften X, Y, Z im Gleichgewicht seyn werden, wenn ihre Richtungen die Linien $-x$, $-y$, $-z$ sind; folglich werden werden auch diese mit den Kräften P, Q, R, etc. im Gleichgewicht seyn. Hieraus folgt, daß die Größen X, Y, Z nichts anders als die Werthe der Kräfte P, Q, R, etc. sind, die auf die Direktionen der 3 rechtwinklichten Coordinaten gebracht sind, und die diese Coordinaten zu verkleinern trachten. Die Formeln (2) geben also ein sehr einfaches Mittel an die Hand, diese Reduktion zu bewerkstelligen, d. h. die Resultate von soviel Kräften als man will, die in einem Punkt zusammentreffen und die gewisse Direktionen haben.

6) Ueberhaupt wenn gewisse Kräfte P, Q, R, etc., deren Richtungen die Linien p, q, r, etc. sind, auf ein und eben denselben Punkt würken, und man will alle diese Kräfte auf drei andere bringen, Σ, Π, Σ, deren Richtungen die Linien ζ, π, σ seyn sollen; so hat man nur das Gleichgewicht

Digitized by Google

gewicht der Kräfte P, Q, R, etc. und Ξ, Π, Σ, die auf demſelben Punkt angebracht ſind, und nach den Linien p, q, r, etc., Ω ζ, — π, — σ ihre Richtungen haben, zu betrachten; hierdurch wird man dann die Gleichung erhalten:

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} - \Xi d\zeta - \Pi d\pi - \Sigma d\sigma = 0$$

welche ſtatt finden muß, auf welche Art man auch die Lage des Punkts, wo alle Kräfte zuſammentreffen, verändere. Die ζ, π, σ mögen nun aber beſchaffen ſeyn, wie ſie wollen; ſo iſt klar, daß, indem ſie ſich nicht alle in einer Ebene befinden, ſie dazu hinreichen, die Lage dieſes Punkts zu beſtimmen; man kann folglich allezeit die Linien p, q, r, etc. durch Funktionen von ζ, π, σ ausdrücken, und die vorhergehende Gleichung wird in Anſehung der Variationen jeder dieſer 3 Größen beſonders ſtatt finden; man wird alſo haben:

$$\Xi = P\frac{dp}{d\zeta} + Q\frac{dq}{d\zeta} + R\frac{dr}{d\zeta} + \text{etc.}$$

$$\Pi = P\frac{dp}{d\pi} + Q\frac{dq}{d\pi} + R\frac{dr}{d\pi} + \text{etc.}$$

$$\Sigma = P\frac{dp}{d\sigma} + Q\frac{dq}{d\sigma} + R\frac{dr}{d\sigma} + \text{etc.}$$

Dieſe Formeln können in mehrern Fällen von großem Nutzen ſeyn, beſonders wenn man die Reſultate von einer unendlichen Menge von Kräften zu ſuchen hat, die auf einen Punkt würken, ſowie die Anziehung eines Körpers von einer gewiſſen Figur etc.

7) Verlangt man, daß die Direktionen der Kräfte durch gegebene Punkte gehen, und man nennt α, β, γ die rechtwinklichten Coordinaten des Punkts, worauf die Kraft Ξ würken ſoll, ferner ε, ζ, η und λ, μ, ν die rechtwinklichten Coordinaten der Punkte, worauf die Kräfte Π und Σ würken; ſo wird man machen

$$\zeta = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

$$\pi = \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + (y-\zeta)^2 + (z-\eta)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2}$$

Aus

Digitized by Google

Aus diesen Gleichungen ziehe man denn die Werthe von x, y, z, in ζ, π, σ und substituire diese hierauf in den Ausdrückungen von p, q, r, etc. (2).

Man könnte auch die Größen p, q, r, etc. ζ, π, σ als Funktionen von x, y, z gleich ansehen, und indem man jede dieser 3 Größen besonders eine Veränderung erleiden läßt; so erhält man diese Gleichungen:

$$\Xi \frac{d\zeta}{dx} + \Pi \frac{d\pi}{dx} + \Sigma \frac{d\sigma}{dx} = P \frac{dp}{dx} + Q \frac{dq}{dx} + R \frac{dr}{dx} + \text{etc.}$$

$$\Xi \frac{d\zeta}{dy} + \Pi \frac{d\pi}{dy} + \Sigma \frac{d\sigma}{dy} = P \frac{dp}{dy} + Q \frac{dq}{dy} + R \frac{dr}{dy} + \text{etc.}$$

$$\Xi \frac{d\zeta}{dz} + \Pi \frac{d\pi}{dz} + \Sigma \frac{d\sigma}{dz} = P \frac{dp}{dz} + Q \frac{dq}{dz} + R \frac{dr}{dz} + \text{etc.}$$

wodurch man die 3 Kräfte Ξ, Π, Σ, kennen lernt.

Sollte die Kraft Ξ wie vorhin nach einen gewissen festen Punkt gerichtet seyn, die beiden andern Kräfte Π und Σ aber in gegebenen Ebenen auf diese senkrecht stehen; so könnte man statt π und σ, die Bogen eines Zirkels nehmen, der mit dem Radius ζ in den eben genannten Ebenen beschrieben ist; man sieht daher die gerade Linie ζ als einen Radius Vektor an, und es ist klar, daß, wenn man ψ, φ die Winkel nennt, die dieser Radius mit den auf den gegebenen senkrechten Ebenen macht, man erhält $d\pi = \zeta d\psi$, $d\sigma = \zeta d\varphi$. Sonst könnte man allezeit durch die 3 veränderlichen Größen ζ, ψ und φ die Lage des Punkts bestimmen, worauf die Kräfte angebracht sind; Man kann also die Linien p, q, r, etc. durch Funktionen eben dieser veränderlichen Größen ausdrücken; denn man hat alsdann nur die rechtwinklichten Coordinaten x, y, z in ζ, ψ, φ auszudrükken und hernach diese Ausdrücke in die von p, q, r, etc. zu substituiren.

Betrachtet man daher die Größen ζ, ψ und φ als veränderlich; so erhält man folgende 3 Gleichungen:

$\Xi =$

Digitized by Google

$$\Xi = P\frac{dp}{d\zeta} + Q\frac{dq}{d\zeta} + R\frac{dr}{d\zeta} + \text{etc.}$$

$$\Pi = P\frac{dp}{\zeta d\psi} + Q\frac{dq}{\zeta d\psi} + R\frac{dr}{\zeta d\psi} + \text{etc.}$$

$$\Sigma = P\frac{dp}{\zeta d\varphi} + Q\frac{dq}{\zeta d\varphi} + R\frac{dr}{\zeta d\varphi} + \text{etc.}$$

Hieraus sieht man, wie man in allen ähnlichen Fällen verfahren muß, und wie sehr die vorhergehende Methode dazu dient, die Resultate von soviel Kräften als man nur will zu finden, und sie auf gegebene Direktionen zu bringen.

8) Wir wollen nun die Formeln (2) wieder vornehmen und zweitens annehmen, der Körper oder Punkt, worauf die Kräfte P, Q, R, etc. würken, sey nicht ganz frey, sondern er sey gezwungen, sich auf einer gegebenen Oberfläche oder Linie zu bewegen; man erhält alsdann zwischen den Coordinaten x, y, z, eine oder zwey Bedingungsgleichungen, die nichts anders als die Gleichungen der genannten Fläche oder Linie selbst sind.

Es sey daher $L = 0$ die Gleichung für die Fläche, worauf der Körper nur herabrutschen kann; man addire zur Summe der Momente der Kräfte $Xdx + Ydy + Zdz$ das Glied λdL (4 Abschn. §. 4. 5.); so bekommt man zur allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht:

$$Xdx + Ydy + Zdz + \lambda dL = 0$$

wo λ eine unbestimmte Größe ist.

L aber ist eine bekannte Funktion von x, y, z, man erhält daher durch die Differentiation:

$$dL = \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz;$$

Verrichtet man nun die gehörigen Substitutionen, und setzt hernach immer jede Summe der Glieder, wovon jedes durch eine der Differen-

Digitized by Google

tialgrößen dx, dy, dz, multiplicirt ist = 0; so erhält man folgende 3 besondere Gleichungen für's Gleichgewicht:

$$X + \lambda \frac{dL}{dx} = 0,$$

$$Y + \lambda \frac{dL}{dy} = 0,$$

$$Z + \lambda \frac{dL}{dz} = 0.$$

Bringt man hieraus die unbestimmte Größe λ weg; so hat man diese beiden Gleichungen:

$$Y \frac{dL}{dx} - X \frac{dL}{dy} = 0$$

$$Z \frac{dL}{dx} - X \frac{dL}{dz} = 0$$

welche folglich die gesuchten Bedingungen für's Gleichgewicht des Körpers auf der vorgegebenen Oberfläche enthalten.

9) Wendet man nun hier die im 4ten Abschn. Art. 7. vorgetragene Theorie an; so wird man hieraus den Schluß ziehen, daß die Fläche dem Körper einen Widerstand entgegensetzen wird,

$$\text{der} = \lambda \sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)\right]}$$

ist und dessen Richtung die auf der Fläche senkrechte Linie ist, deren Gleichung dL = 0 ist, d. h. die senkrecht auf derselben Fläche ist, worauf der Körper gesetzt ist; man hat aber (8)

$$\lambda \frac{dL}{dx} = -X,$$

$$\lambda \frac{dL}{dy} = -Y,$$

Digitized by Google

$$\lambda \frac{dL}{dz} = -Z$$

folglich ist der Druck des Körpers auf die Fläche (welcher allezeit gleich und gerade entgegengesetzt dem Widerstand der Fläche seyn muß) $= \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$ und seine Richtung ist senkrecht auf diese Fläche. Nur unter dieser Bedingung können die zwey vorhin gefundenen Gleichungen für's Gleichgewicht des Körpers statt finden; wie man sich durch die Methode der Zusammensetzung der Kräfte versichern kann.

10) Uebrigens findet man in dem Falle, daß nur ein Körper durch gegebene Kräfte gezogen werde, noch einfacher die Bedingungen des Gleichgewichts. Denn substituirt man sogleich in der Gleichung $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ an die Stelle des Differentials dz dessen Werth

$$\frac{-\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy}{\frac{dL}{dz}},$$

welchen man aus der Differentialgleichung der gegebenen Fläche, worauf der Körper wegrütschen kann, gezogen hat, und man setzt nun die Coefficienten der Differentialien dx und dy, die unbestimmt sind, nach der allgemeinen Methode (2 Abschn. 10.) $= 0$; so hat man sogleich die 2 Gleichungen:

$$X - Z\frac{\frac{dL}{dx}}{\frac{dL}{dz}} = 0$$

$$Y - Z\frac{\frac{dL}{dy}}{\frac{dL}{dz}} = 0$$

Die mit denen oben gefundenen (8) übereinkommen.

Digitized by Google

Eben so wäre der Körper gezwungen, sich auf einer Linie von einer gegebenen Figur, deren Gleichungen $dy = pdx$, $dz = qdx$ wären, zu bewegen; so hätte man nur diese Werthe von dy und dz in die allgemeine Gleichung $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ zu substituiren, und man erhielte, nachdem man mit dx dividirt hat:

$$X + Yp + Zq = 0$$

für die Bedingung des Gleichgewichts.

Aber in allen Fällen, wo mehrere Körper im Gleichgewicht sind, wird die Methode der unbestimmten Coefficienten (4 Abschn.) immer den Vorzug sowohl wegen der Leichtigkeit als Einfachheit und Gleichförmigkeit des Calkuls haben.

§. II.

Vom Gleichgewicht mehrerer bey einem System von Körpern, die als Punkte betrachtet werden, und durch Faden oder Stangen unter einander verbunden sind, angebrachten Kräfte.

11) Die auf jeden Körper würkende Kräfte mögen auch beschaffen seyn, wie sie wollen; so haben wir oben (2, 5) gesehen, wie man sie immer auf 3 X, Y, Z bringen kann, deren Richtungen die 3 rechtwinklichten Coordinaten x, y, z, eben dieses Körpers sind, und die diese Coordinaten zu verkleinern streben. Wir wollen daher um mehrerer Einfachheit hier und in der Folge immer voraussetzen, daß alle auf einen Punkt würkende äussere Kräfte auf 3, X, Y, Z gebracht seyen. Die Summe der Momente dieser Kräfte wird also jederzeit durch die Formel $Xdx + Ydy + Zdz$ ausgedrückt; folglich wird die Summe der Momente aller Kräfte des Systems durch die Summe von so vielen ähnlichen Formeln ausgedrückt, als bewegliche Körper oder Punkte vorhanden sind, indem man durch ein, zwei, drei u. m. Striche die Größen bezeichnet, die sich auf die verschiedenen Körper, die wir mit den Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. bezeichnen wollen, beziehen.

Auf

Digitized by Google

Auf diese Art erhält man für die Summe der Momente der Kräfte, die auf 3 oder auf eine noch größere Anzahl von Körpern würken die Größe:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \text{etc.}$$

Man hat daher nur noch die Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, etc., die aus der Natur der Aufgabe folgen, zu suchen.

Da man L, M, N, etc. oder nur ihre Differentialien in Funktionen von x', y', z', x'' etc. hat, und man nimmt die unbestimmten Coefficienten λ, μ, ν, etc. an; so hat man zur vorhergehenden Größe die Glieder $\lambda dL + \mu dM + \nu dN + \text{etc.}$ zu addiren, und hierauf die Glieder, worinn jede der Differentialien dx', dy', dz', dx'', etc. vorkömmt, einzeln $= 0$ zu setzen. (4 Abschn. 5).

12) Wir wollen zuerst 3 Körper betrachten, die fest an einen unbehnbaren Faden gebunden seyen. Die Bedingungen der Aufgabe sind alsdenn, daß die Distanzen zwischen dem ersten und 2ten Körper, und zwischen den 2ten und 3ten unveränderlich seyen, indem sie Längen der zwischen dem Körpern enthaltenen Theile des Fadens sind. Nennt man nun f die erstere dieser Distanzen, g die 2te; so sind die Bedingungsgleichungen $df = 0$, $dg = 0$; folglich $dL = df$; $dM = dg$

und die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht dieser drei Körper ist:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda df + \mu dg = 0.$$

Man siehet aber leicht, daß

$$f = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}$$

$$g = \sqrt{(x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2 + (z''' - z'')^2}$$

folglich, wenn man differentiirt:

$df =$

Digitized by Google

$$df = \frac{(x'' - x')(dx'' - dx') + (y'' - y')(dy'' - dy') + (z'' - z')(dz'' - dz')}{f}$$

$$dg = \frac{(x''' - x'')(dx''' - dx'') + (y''' - y'')(dy''' - dy'') + (z''' - z'')(dz''' - dz'')}{g}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe; ſo bekömmt man folgende allgemeine Gleichung als Bedingung des Gleichgewichts der 3 Körper:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz'''$$

$$+ \lambda \frac{(x'' - x')(dx'' - dx')}{f} + \lambda \frac{(y'' + y')(dy'' - dy')}{f}$$

$$+ \lambda \frac{(z'' - z')(dz'' - dz')}{f} + \mu \frac{(x''' - x''')(dx''' - dx'')}{g}$$

$$+ \mu \frac{(y''' - y'')(dy''' - dy'')}{g} + \mu \frac{(z''' - z')(dz''' - dz')}{g}$$

$$= \left[X' - \lambda \frac{(x'' - x')}{f}\right]dx' + \left[Y' - \lambda \frac{(y'' - y')}{f}\right]$$

$$dy' + \left[Z' - \lambda \frac{(z'' - z')}{f}\right]dz' + \left[X'' + \lambda \frac{(x'' - x')}{f}\right.$$

$$\left. - \mu \frac{(x''' - x'')}{g}\right]dx'' + \left[Y'' + \lambda \frac{(y'' - y')}{f}\right.$$

$$\left. - \mu \frac{(y''' - y'')}{g}\right]dy'' + \left[Z'' + \lambda \frac{(z'' - z')}{f} - \mu \frac{(z''' - z'')}{g}\right]$$

$$dz'' + \left[X''' + \mu \frac{(x''' - x'')}{g}\right]dx''' + \left[Y''' + \mu \frac{(y''' - y'')}{g}\right]$$

$$dy'''$$

Digitized by Google

$$dy''' + \left[Z''' + \mu\,\frac{(z''' - z')}{f}\right] dz''' = 0.$$

Setzt man nun (nach Abschn. 2, 5 und Abschn. 5, 11) die Glieder, deren Faktor eine der Differentialgrößen dx', dy', dz', etc. ist, allemal $= 0$; M.) so bekömmt man folgende 9 Gleichungen für die Bedingungen des Gleichgewichts des Fadens:

$$X' - \lambda\left(\frac{x'' - x'}{f}\right) = 0$$

$$Y' - \lambda\left(\frac{y'' - y'}{f}\right) = 0$$

$$Z' - \lambda\left(\frac{z'' - z'}{f}\right) = 0$$

$$X'' + \lambda\left(\frac{x'' - x'}{f}\right) - \mu\left(\frac{x''' - x''}{g}\right) = 0$$

$$Y'' + \lambda\left(\frac{y'' - y'}{f}\right) - \mu\left(\frac{y''' - y''}{g}\right) = 0$$

$$Z'' + \lambda\left(\frac{z'' - z'}{f}\right) - \mu\left(\frac{z''' - z''}{g}\right) = 0$$

$$X''' + \mu\left(\frac{x''' - x''}{g}\right) = 0$$

$$Y''' + \mu\left(\frac{y''' - y''}{g}\right) = 0$$

$$Z''' + \mu\left(\frac{z''' - z''}{g}\right) = 0.$$

Man hat nun also nichts weiter noch nöthig, als die beiden unbekannten Größen λ und μ wegzuschaffen; welches auf verschiedene Art geschehen kann, wodurch man auch verschiedene oder vielmehr unter verschie-

Digitized by Google

schiedener Form für's Gleichgewicht 3er an einem Faden festgemachten Körper vorgestellte Gleichungen erhalten wird; wir wollen diejenige Methode wählen, die am einfachsten scheint.

Man sieht sogleich leicht ein, daß wenn man die 3 erstern Gleichungen zu den 3 folgenden addirt und eben so auch zu den 3 letzten, man diese 3 von den unbekannten Größen λ und μ befreit erhält; (und man bekommt folgende 3 Gleichungen. M)

$$X' + X'' + X''' = 0 \quad (I.)$$

$$Y' + Y'' + Y''' = 0 \quad (II.)$$

$$Z' + Z'' + Z''' = 0 \quad (III.)$$

(indem alle andere Glieder sich gegen einander aufheben. M). Hieraus ersieht man also, daß die Summe aller jeder der 3 Achsen der Coordinaten parallelen Kräfte = 0 seyn muß.

Es ist nun also nur noch übrig 4 andere Gleichungen zu finden; in dieser Hinsicht addire ich, ohne mich um die 3 ersten Gleichungen zu bekümmern, die 3 mitlern zu den 3 letztern, und ich bekomme dadurch folgende, worinn μ sich nicht mehr findet:

$$X'' + X''' + \frac{\lambda}{f}(x'' - x') = 0$$

$$Y'' + Y''' + \frac{\lambda}{f}(y'' - y') = 0$$

$$Z'' + Z''' + \frac{\lambda}{f}(z'' - z') = 0$$

(Aus der erstern Gleichung ziehet man

$$\frac{\lambda}{f} = -\left(\frac{X'' + X'''}{x'' - x'}\right)$$

aus der 2ten

$$\frac{\lambda}{f} = -\left\{\frac{Y'' + Y'''}{y'' - y'}\right\}$$

und

Digitized by Google

und aus der 3ten

$$\frac{\lambda}{f} = -\left(\frac{Z'' + Z'''}{z'' - z'}\right)$$

Setzt man nun 2 solcher Werthe von $\frac{\lambda}{f}$ einander gleich; so erhält man wieder andere Gleichungen, worinn sich $\frac{\lambda}{f}$ nicht mehr befindet. M)

Durch die Wegschaffung von λ gelangt man also zu den 2 folgenden Gleichungen:

$$\text{(IV.)}\quad Y'' + Y''' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(X'' + X''') = 0$$

$$\text{(V.)}\quad Z'' + Z''' - \frac{z'' - z'}{x'' - x'}(X'' + X''') = 0.$$

Betrachtet man endlich die 3 letzten Gleichungen, die μ allein enthalten, und man schafft dies μ weg; so bekömmt man (durch ein dem vorigen völlig ähnliches Verfahren M), diese beiden andern Gleichungen:

$$\text{(VI.)}\quad Y''' - \frac{y''' - y''}{x''' - x''} X''' = 0$$

$$\text{(VII.)}\quad Z''' - \frac{z''' - z''}{x''' - x''} X''' = 0.$$

Diese sieben Gleichungen schließen alle für's Gleichgewicht der 3 Körper nöthige Bedingungen in sich ein.

13) Wäre der Faden, den wir immer als undehnbar annehmen, von 4 Körpern beschwert, die von den Kräften X', Y', Z', X'', Y'', Z'', X''' etc. nach den Direktionen der drei Achsen der rechtwinklichten Coordinaten gezogen würden; so fände man durch ein dem vorigen ähnliches

Digitized by Google

Verfahren, welches ich für unnöthig halte zu wiederholen, folgende 9 Gleichungen für's Gleichgewicht dieser 4 Körper:

(I) $X' + X'' + X''' + X'''' = 0$

(II.) $Y' + Y'' + Y''' + Y'''' = 0$

(III.) $Z' + Z'' + Z''' + Z'''' = 0$

(IV.) $Y'' + Y''' + Y'''' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(X'' + X''' + X'''') = 0$

(V.) $Z'' + Z''' + Z'''' - \frac{z'' - z'}{x'' - x'}(X'' + X''' + X'''') = 0$

(VI.) $Y''' + Y'''' - \frac{y''' - y''}{x''' - x''}(X''' + X'''') = 0$

(VII.) $Z''' + Z'''' - \frac{z''' - z''}{x''' - x''}(X''' + X'''') = 0$

(VIII.) $Y'''' - \frac{y'''' - y'''}{x'''' - x'''} X'''' = 0$

(IX.) $Z'''' - \frac{z'''' - z'''}{x'''' - x'''} X'''' = 0.$

Es ist leicht, diese Auflösung auf eine so große Anzahl von Körpern zu erstrecken, als man nur wünscht, und selbst auf die Kettenlinie; doch wir werden diesen Fall noch besonders durch die am Ende des vorhergehenden Abschnitts gelehrte Methode betrachten.

14) Wollte man, daß der erste Körper fest sey, so würden die Differentialgrößen dx', dy', $dz' = 0$ seyn, und die Glieder, worin diese Differentialgrößen vorkommen, würden in der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht von selbst verschwinden.

Also würden die 3 erstern Gleichungen nämlich:

$$X'' - \frac{\lambda}{f}(x'' - x') = 0$$

Y''

Digitized by Google

$$Y'' - \frac{\lambda}{f}(y'' - y') = 0$$

$$Z'' - \frac{\lambda}{f}(z'' - z') = 0$$

nicht mehr statt finden; alsdann aber würden auch die Gleichungen

$$X' + X'' + X''' + \text{etc.} = 0$$

$$Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} = 0$$

$$Z' + Z'' + Z''' + \text{etc.} = 0$$

nicht mehr statt finden können, alle andere aber würden unverändert bleiben. Dies ist, wie man sieht, der Fall, wo der Faden mit einem seiner Ende fest ist.

Wäre er aber mit seinen 2 Enden fest; alsdann hätte man nicht nur $dx' = 0$, $dy' = 0$, $dz' = 0$; sondern auch dx''' etc. $= 0$, dy''' etc. $= 0$, dz''' etc. $= 0$; und die Glieder, worinn diese 6 Differentialgrößen in der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht vorkommen, würden verschwinden, und folglich auch die 6 davon abhängenden besondern Gleichungen verschwinden machen.

15) Ueberhaupt wenn die 2 Enden des Fadens nicht völlig frey, sondern nach einem gegebenen Gesetze an bewegliche Punkte fest gemacht wären; so würde dieses Gesetz analytisch ausgedrückt, eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Differentialien dx', dy', dz', die sich auf den ersten Körper beziehen, und den Differentialien dx''' etc., dy''' etc., dz''' etc., die zum lezten gehören, verschaffen; und man müßte diese Gleichungen, wenn man jede durch einen neuen unbestimmten Coefficienten multiplicirt, zur allgemeinen oben gefundenen Gleichung für's Gleichgewicht addiren, oder vielmehr man müßte in dieser allgemeinen Gleichung den Werth eines oder mehrerer dieser Differentialgrößen, welchen man aus den genannten Gleichungen gezogen hat, in dieser allgemeinen Gleichung substituiren, und hierauf den Coefficienten von jeder die übrig geblieben ist, $= 0$ setzen, wie oben (9) geschehen ist. Da dies keine Schwürigkeit hat; so halten wir uns nicht weiter dabey auf.

Digitized by Google

16) Verlangte man die Kräfte kennen zu lernen, die von der Reaktion des Fadens auf die verschiedenen Körper herkommen; so hätte man sich nur der im vorhergehenden Abschnitt §. 7. gegebenen Methode zu bedienen.

Man erwäge daher, daß man im gegenwärtigen Falle hat:

$$dL = df = \frac{(x'' - x')(dx'' - dx') + (y'' - y')(dy'' - dy') + (z'' - z')(dz'' - dz')}{f}$$

$$dM = dg = \frac{(x''' - x'')(dx''' - dx'') + (y''' - y'')(dy''' - dy'') + (z''' - z'')(dz''' - dz'')}{g}$$

etc.

Man hat also in Ansehung des ersten Körpers, dessen Coordinaten x', y', z' sind

$$\frac{dL}{dx'} = -\frac{x'' - x'}{f},$$

$$\frac{dL}{dy'} = -\frac{y'' - y'}{f},$$

$$\frac{dL}{dz'} = -\frac{z'' - z'}{f};$$

folglich

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}}{f} = 1.$$

Auf diese Art wird der erste Körper durch die Würkung der andern eine Kraft $= \lambda$ erhalten, deren Direktion auf der durch die Gleichung $dL = df = 0$ wenn man nur x', y', z' als veränderlich annimmt, vorgestellten Fläche senkrecht seyn wird.

Nun

Digitized by Google

Nun aber ist leicht einzusehen, daß diese Fläche nichts anders ist als eine Kugel, deren Radius = f ist und deren Mittelpunkt sich auf die Coordinaten x'' y'' z'' beziehet; folglich wird die Kraft λ nach eben diesen Radius ihre Richtung haben, d. h. nach der Länge des Fadens, der den ersten und 2ten Körper verbindet.

2) Eben so hat man in Ansehung des 2ten Körpers, dessen Coordinaten sind x'', y'', z'', die Gleichungen

$$\frac{dL}{dx''} = \frac{x'' - x'}{f} \text{ *)}$$

$$\frac{dL}{dy''} = \frac{y'' - y'}{f}$$

$$\frac{dL}{dz''} = \frac{z'' - z'}{f}$$

folglich $\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz''}\right)^2\right]} =$

$$\frac{\sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}}{f} = 1$$

Hieraus folgt, daß der 2te Körper auch eine Kraft λ erhalten wird, die senkrecht auf der Fläche steht, deren Gleichung $dL = d\Gamma = 0$ ist, wenn man x'', y'', z'' als veränderlich annimmt; allein diese Fläche ist von neuem eine Kugel, deren Radius f ist, deren Mittelpunkt aber sich auf die Coordinaten x', y', z' des erstern Körpers beziehet; die Kraft λ, die auf den 2ten Körper würkt, wird also auch ihre Richtung nach den Faden f haben, der diesen Körper mit dem 2ten verbindet.

3) Fer-

*) Im Original steht: $\frac{x'' - x'}{df}$, welches vermuthlich ein Druckfehler ist.

M.

Digitized by Google

3) Ferner hat man in Ansehung des 2ten Körpers

$$\frac{dM}{dx''} = -\frac{x''' - x''}{g},$$

$$\frac{dM}{dy''} = -\frac{y''' - y''}{g},$$

$$\frac{dM}{dz''} = -\frac{z''' - z''}{g}, \text{ folglich}$$

$$r\left[\left(\frac{dM}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dz''}\right)^2\right] = r.$$

Der 2te Körper wird also auch durch eine Kraft $= \mu$ getrieben werden, deren Direktion senkrecht auf der durch die Gleichung $dg = 0$, wenn man x'', y'', z'' als veränderlich ansieht, vorgestellten Fläche ist. Diese Fläche aber ist nichts anders als eine Kugel, deren Radius $= g$ ist; es folgt also, daß die Direktion der Kraft μ nach diesem Radius seyn wird, d. h. nach den Faden, der den 2ten Körper mit dem 3ten verbindet.

Eben diese Schlüsse wird man bey den andern Körpern machen, und ähnliche Resultate daraus herleiten.

17) Es ist offenbahr, daß die Kraft λ, die beim ersten Körper nach der Direktion des Fadens hervorgebracht wird, der diesen Körper mit dem folgenden verbindet, und die Kraft λ die der vorigen gleich aber ihr gerade entgegengesetzt ist, und die nach der Direktion desselben Fadens auf den andern Körper würkt, dieselben Kräfte mit denen seyn müssen, die von der Reaktion eben dieses Fadens auf 2 Körpern herkommen, d. h. von der Spannung, welche der zwischen dem ersten und 2ten Körper enthaltene Theil des Fadens leidet; so daß der Coefficient λ die Größe dieser Spannung ausdrückt. Eben so wird der Coefficient μ die Spannung des Theils des Fadens ausdrücken, der zwischen dem 2ten und 3ten Körper enthalten ist, u. s. f.

Uebrigens hat man bey der Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe stillschweigend vorausgesetzt, daß jeder Theil des Fadens nicht nur unausdehn-

Digitized by Google

dehnbar sondern auch unbiegsam sey, so daß er immer die nämliche Länge behält; die Kräfte λ μ etc. drücken also die Spannungen nur in so fern aus, als sie die Körper näher an einander zu bringen suchen; Strebten sie, sie von einander zu entfernen; so würden sie vielmehr die Widerstände ausdrücken, die der Faden vermöge seiner Unbiegsamkeit oder Unzusammendrückbarkeit dem Körper entgegensetzen kann.

18) Um das was wir eben bewiesen haben zu bestätigen, und zugleich eine neue Anwendung unserer Methoden zu geben; so wollen wir annehmen, daß der Faden, woran die Körper fest gemacht sind, elastisch und einer Ausdehnung und Zusammenziehung fähig sey; ferner seyen F, G, etc. die Zusammenziehungskräfte der Theile f, g, etc. des Fadens, die zwischen dem 1ten und 2ten und dem 2ten und 3ten Körper enthalten sind. Alsdann ist (aus 2 Abschn. 5.) klar, daß die Kräfte F, G, etc. die Momente $Fdf + Gdg$ etc. geben werden. Diese Momente muß man also zu denen addiren, die von der Würkung der fremden Kräfte, die, wie wir (10) gesehen haben, durch die Formel $X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' +$ etc. ausgedrückt werden, herkommen; und dadurch erhält man die ganze Summe der Momente des Systems. Sonst ist keine andere besondere Bedingung zu erfüllen, welche auf die Lage der Körper Beziehung hätte, man hat daher die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht, indem man die angeführte Summe $= 0$ setzt; also erhält man:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz''$$
$$+ X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \text{etc.}$$
$$+ Fdf + Gdg + \text{etc.} = 0.$$

Substituirt man nun die (11) gefundene Werthe von df, dg, etc. und setzt allemal die Summe der Glieder, worin jede der Differentialgrößen dx', dy', etc. vorkömmt $= 0$; so hat man folgende Gleichungen für's Gleichgewicht des Fadens für den gegenwärtigen Fall:

X'

Digitized by Google

$$X' = -F\frac{(x''-x')}{f} = 0$$

$$Y' = -F\frac{(y''-y')}{f} = 0$$

$$Z' = -F\frac{(z''-z')}{f} = 0$$

$$X'' + F\frac{(x''-x')}{f} - G\frac{(x'''-x'')}{g} = 0$$

$$Y'' + F\frac{(y''-y')}{f} - G\frac{(y'''-y'')}{g} = 0$$

$$Z'' + F\frac{(z''-z')}{f} - G\frac{(z'''-z'')}{g} = 0$$

$$X''' + G\frac{(x'''-x'')}{g} = 0$$

$$Y''' + G\frac{(y'''-y'')}{g} = 0$$

$$Z''' + G\frac{(z'''-z'')}{g} = 0$$

sie sind, wie man sieht, denen analog, die wir für den Fall, wo der Faden unausdehnbar ist, (11) gefunden haben, wenn man nur $\lambda = F$, $\mu = G$ etc. setzt. Man ersieht also hieraus, daß die Größen F, G, etc. die hier die Kräfte der Faden unter der Voraussetzung, daß sie elastisch sind, ausdrücken, einerley mit denen sind, die wir (16), um eben diese Kräfte der Faden unter der Voraussetzung, daß sie unausdehnbar seyen, gefunden haben.

19) Wir wollen noch einmal den Fall vornehmen, wo der Faden unausdehnbar und mit 3 Körpern beschwert ist; aber wir wollen zugleich voraussetzen, der Körper könne von der Mitte an nach der Länge des Fadens

Digitized by Google

dens rütschen; in diesem Falle wird also die Bedingung der Aufgabe seyn, daß die Summe der Distanzen zwischen dem 1ten und 2ten und zwischen dem 2ten und 3ten Körper beständig sey. Nennt man also wie oben f und g diese Entfernungen; so ist $f + g = \text{Const.}$ und folglich

$$df + dg = 0.$$

Man muß daher die Differentialgröße $df + dg$ durch einen unbestimmten Coefficienten λ multipliciren, und zur Summe der Momente der verschiedenen Kräfte, die, wie man angenommen hat, auf den Körper würken, addiren; dies giebt folgende Gleichung für's Gleichgewicht:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' +$$
$$X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda(df + dg) = 0.$$

Substituirt man hier wieder die Werthe von df und dg und setzt die Summe der Glieder, worin jede der Differentialgrößen dx', dy', etc. vorkommen, jederzeit = 0; so erhält man folgende Gleichungen für's Gleichgewicht des Fadens:

$$X' - \lambda\left(\frac{(x'' - x')}{f}\right) = 0$$

$$Y' - \lambda\left(\frac{y'' - y'}{f}\right) = 0$$

$$Z' - \lambda\left(\frac{z'' - z'}{f}\right) = 0$$

$$X'' + \lambda\left(\frac{x'' - x'}{f} - \frac{x''' - x''}{g}\right) = 0$$

$$Y'' + \lambda\left(\frac{y'' - y'}{f} - \frac{y''' - y''}{g}\right) = 0$$

$$Z'' + \lambda\left(\frac{z'' - z'}{f} - \frac{z''' - z''}{g}\right) = 0$$

Digitized by Google

$$X''' + \lambda\left(\frac{x''' - x''}{g}\right) = 0$$

$$Y''' + \lambda\left(\frac{y''' - y''}{g}\right) = 0$$

$$Z''' + \lambda\left(\frac{y''' - z''}{g}\right) = 0$$

wo man nur noch die unbekannte Größe λ wegzuschaffen hat.

Man siehet hieraus, wie man zu verfahren habe, wenn eine größere Anzahl von Körpern vorhanden wäre, wovon einige fest an einem Faden wären, die anderen aber frey darauf wegrütschen könnten.

20) Wir wollen jetzt annehmen, die 3 Körper seyen durch eine unbiegsame Ruthe mit einander verbunden, so daß sie immer einerley Distanzen unter einander behalten müßten; in diesem Falle müßte nicht allein $df = 0$, und $dg = 0$ seyn, sondern auch das Differential der Distanz zwischen dem ersten und 3ten Körper, welche wir durch h bezeichnen, müßte $= 0$ seyn; nehmen wir daher die 3 unbestimmten Coefficienten λ, μ, ν, an; so erhält man diese allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx'''$$
$$+ Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda df + \mu dg + \nu dh = 0.$$

Was die Werthe von df, dg betrifft; so haben wir sie schon oben gefunden, was dh anlangt so ist klar, daß

$$h = \sqrt{(x''' - x')^2 + (y''' - y')^2 + (z''' - z')^2}$$

und folglich

$$dh = \frac{(x''' - x')(dx''' - dx') + (y''' - y')(dy''' - dy') + (z''' - z')(dz''' - dz')}{h}$$

Macht man diese Substitutionen und setzt man die Summe der Glieder, wovon jede der Differentialgrößen dx', dy', etc. ein Faktor ist, jederzeit $= 0$; so hat man diese 9 besondern Gleichungen:

X'

Digitized by Google

$$X' - \lambda \frac{(x'' - x')}{f} - \nu \frac{(x''' - x')}{h} = 0$$

$$Y' - \lambda \frac{(y'' - y')}{f} - \nu \frac{(y''' - y')}{h} = 0$$

$$Z' - \lambda \frac{(z'' - z')}{f} - \nu \frac{(z''' - z')}{h} = 0$$

$$X'' + \lambda \frac{(x'' - x')}{f} - \mu \frac{(x''' - x'')}{g} = 0$$

$$Y'' + \lambda \frac{(y'' - y')}{f} - \mu \frac{(y''' - y'')}{g} = 0$$

$$Z'' + \lambda \frac{(z'' - z')}{f} - \mu \frac{(z''' - z'')}{g} = 0$$

$$X''' + \mu \frac{(x''' - x'')}{g} + \nu \frac{(x''' - x')}{h} = 0$$

$$Y''' + \mu \frac{(y''' - y'')}{g} + \nu \frac{(y''' - y')}{h} = 0$$

$$Z''' + \mu \frac{(z''' - z'')}{g} + \nu \frac{(z''' - z')}{h} = 0$$

woraus man die 3 unbekannten und unbestimmten Größen λ, μ, ν wegschaffen muß, und dadurch wird die Zahl der Bedingungsgleichungen für's Gleichgewicht sich auf 6 bringen lassen.

21) Man sieht leicht, selbst aus der Form dieser Gleichungen, daß, wenn man die 3 erstern zu den 3 folgenden und hernach zu den 3 letztern addirt, man sogleich 3 Gleichungen bekömmt, worin λ, μ, ν, nicht mehr vorkommen, nämlich:

$$X' + X'' + X''' = 0$$
$$Y' + Y'' + Y''' = 0$$
$$Z' + Z'' + Z''' = 0$$

Digitized by Google

Nichts ist leichter als noch 3 andere Gleichungen durch die Wegschaffung von λ, μ, ν zu erhalten; um aber hiezu auf die einfachste und allgemeinste Art zu gelangen; so ziehe ich zuerst aus den obigen Gleichungen folgende 9 veränderte:

$$X'y' - Y'x' - \lambda\frac{(y'x'' - x'y'')}{f} - \nu\frac{(y'x''' - x'y''')}{h} = 0$$

$$X'z' - Z'x' - \lambda\frac{(z'x'' - x'z'')}{f} - \nu\frac{(z'x''' - x'z''')}{h} = 0$$

$$Y'z' - Z'y' - \lambda\frac{(z'y'' - y'z'')}{f} - \nu\frac{(z'y'' - y'z''')}{h} = 0$$

$$X''y'' - Z''x'' + \lambda\frac{(y'x'' - x'y'')}{f} - \mu\frac{(y''x''' - x''y''')}{g} = 0$$

$$X''z'' - Y''x'' + \lambda\frac{(z'x'' - x'z'')}{f} - \mu\frac{(z''x''' - x''z''')}{g} = 0$$

$$Y''z'' - Z''y'' + \lambda\frac{(y'y'' - y'x'')}{f} - \mu\frac{(z''y''' - y''z''')}{g} = 0$$

$$X'''y''' - Y''x''' + \mu\frac{(y''x''' - x''y''')}{g} + \nu\frac{(y'x''' - x'y''')}{h} = 0$$

$$X'''z''' - Z'''x''' + \mu\frac{(z''x''' - x''z''')}{g} + \nu\frac{(z'x''' - x'z''')}{h} = 0$$

$$Y'''z''' - Zy''' + \mu\frac{(z''y''' - y''y''')}{g} + \nu\frac{(z'y''' - y'z''')}{h} = 0.$$

Diese Gleichungen sind mit ihren ursprünglichen analog, und geben daher auf eben die Weise durch die simple Addition folgende drei *):

$X'y'$

*) Im Original steht $-\mu\frac{(y''x'' - y''')}{g}$. M.

**) Ich halte es für unnöthig, hier wieder von neuem zu zeigen, wie diese Glei-

$$X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' = 0$$
$$X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' + X'''z''' - Z'''x''' = 0$$
$$Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + Y'''z''' - Z'''y''' = 0$$

Die 3 erstern Gleichungen zeigen, daß die Summe der jeder der 3 Achsen der Coordinaten parallelen Kräfte = 0 seyn muß; die 3 letztern aber enthalten den bekannten Grundsatz der Momente; (indem man unter Moment das Produkt der Kraft in den Hebelsarm versteht,) vermöge dem die Summe der Momente aller Kräfte = 0 seyn muß, wenn das System sich um jede der 3 Achsen drehen soll.

22) Wäre der erste Körper fest; so würden die Differentialgrößen dx', dy', $dz' = 0$ seyn, und die 3 erstern der 9 Gleichungen (20) würden nicht mehr statt finden; alsdann hätte man also nur noch 6 Gleichungen, die durch Wegschaffung der 3 unbekannten Größen λ, μ, ν, sich auf drei bringen ließen. Um zu diesen 3 Gleichungen zu gelangen, kann man auf eine mit derjenigen analogen Methode verfahren, deren man sich bedient hat, die 3 letztern Gleichungen (21) zu finden, wenn man nur dergestalt zu Werke geht, daß die veränderten Gleichungen nicht die unbestimmten Größen λ und ν, die in den 3 erstern vorkommen, und die man jetzt ausser Acht lassen muß, enthalten. Durch diese Combinationen bekommt man also

$$X''(y''-y') - Y''(x''-x') - \mu\left[\frac{(y''-y')(x'''-x') - (x''-x')(y'''-y')}{g}\right] = 0$$

$$X''(z''-z') - Z''(x''-x') - \mu\left[\frac{(z''-z')(x'''-x') - (x''-x')(z'''-z')}{g}\right] = 0$$

$$Y''(z''-z') - Z''(y''-y') - \mu\left[\frac{(z''-z')(y'''-y') - (y''-y')(z'''-z')}{g}\right] = 0^{*})$$

Gleichungen aus den vorigen entstehen, indem das Verfahren mit dem vorhin schon mehrmals gebrauchten das nemliche ist. M.

*) Das g im Divisor dieser 2ten Gleichung fehlt im französischen Original ganz. M.

Digitized by Google

$$X'''(y'''-y')-Y'''(x'''-x')+\mu\frac{\left[\begin{array}{c}(y'''-y')(x'''-x')\\-(x'''-x')(y'''-y')\end{array}\right]}{g}=0$$

$$X'''(z'''-z')-Z'''(x'''-x')+\mu\frac{\left[\begin{array}{c}(z'''-z')(x'''-x')\\-(x'''-x')(z'''-z')\end{array}\right]}{g}=0$$

und addirt man die 3 erstern dieser veränderten Gleichungen zu den 3 letztern; so erhält man sogleich folgende 3:

$$X''(y''-y')-Y''(x''-x')+X'''(y'''-y')-Y'''(x'''-x')=0$$
$$X''(z''-z')-Z''(x''-x')+X'''(z'''-z')-Z'''(x'''-x')=0$$
$$Y''(z''-z')-Z''(y''-y')+Y'''(z'''-z')-Z'''(y'''-y')=0$$

welche allezeit statt finden werden, wie auch der Zustand des ersten Körpers beschaffen seyn mag, indem sie gar nicht von den auf diesen Körper sich beziehenden Gleichungen abhängen. Diese Gleichungen enthalten, wie man sieht, den nemlichen Grundsatz der Momente jedoch in Beziehung auf die Achsen, die durch den ersten Körper gehen.

23) Wir wollen jetzt annehmen, es wäre noch ein 4ter Körper an dieselbe unbiegsame Stange fest, dessen rechtwinklichte Coordinaten seyen: x'''', y'''', z'''' und die diesen Coordinaten parallele Kräfte X'''', Y'''', Z''''.

Man müßte daher zur Summe der Momente der Kräfte die Größe $X''''\,dx''''+Y''''\,dy''''+Z''''\,dz''''$ addiren; hierauf erhielte man, da die Distanzen zwischen allen den Körpern beständig bleiben müssen, nach den Bedingungen der Aufgabe nicht nur $df=0$, $dg=0$, $dh=0$; wie im vorhergehenden Falle; sondern auch

$$dl=0,\quad dm=0,\quad dn=0,$$

wenn man l, m, n die Distanzen des 4ten Körpers von den 3 vorhergehenden nennt. Die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht wird also in diesem Falle seyn

X'

Digitized by Google

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + X''''dx'''' + Y''''dy'''' + Z''''dz'''' + \lambda df + \mu dg + \nu dh + \pi dl + \rho dm + \sigma dn = 0$$

Die Werthe von df, dg, dh, sind die nemlichen mit den obigen (16, 20); was aber die von dl, dm, dn angeht; so ist offenbar daß

$$l = \sqrt{[(x'''' - x')^2 + (y'''' - y')^2 + (z'''' - z')^2]}$$

$$m = \sqrt{[(x'''' - x'')^2 + (y'''' - y'')^2 + (z'''' - z'')^2]}$$

$$n = \sqrt{[(x'''' - x''')^2 + (y'''' - y''')^2 + (z'''' - z''')^2}$$

und folglich

$$dl = \frac{(x'''' - x')(dx'''' - dx') + (y'''' - dy') + (dy'''' - dy') (z'''' - z') + (dz'''' - dz')}{l}$$

$$dm = \frac{(x'''' - x'')(dx'''' - dx'') + (y'''' - y'')(dy'''' - dy'') + (z'''' - z'')(dz'''' - dz'')}{m}$$

$$dn = \frac{(x'''' - x''')(dx'''' - dx'') + (y'''' - y''')(dy'''' - dy'') + (z'''' - z''') + (dz'''' - dz''')}{n}$$

Macht man diese Substitutionen, und setzt man die Summe der Glieder, worin jede der Differentialgrößen dy, dx, etc. vorkömmt, = 0; so findet man 12 besondere Gleichungen, wovon die 9 ersten die nemlichen mit denen (20) sind, wenn man zu ihnen folgende Größen addirt:

$$-\pi\frac{(x'''' - x')}{l}, -\pi\frac{(y'''' - y')}{l}, -\pi\frac{(z'''' - z')}{l}$$

$$-\rho\frac{(x'''' - x'')}{m}, -\rho\frac{(y'''' - y'')}{m}, -\rho\frac{(z'''' - z'')}{m}$$

$$-\sigma\frac{(x'''' - x''')}{n}, -\sigma\frac{(y'''' - y''')}{n}, -\sigma\frac{(z'''' - z''')}{n}$$

(Man

Digitized by Google

(Man bekommt nemlich auf diese Art für diese 9 Gleichungen

$$X' - \lambda\frac{(x'' - x')}{f} - \nu\frac{(x''' - x')}{h} - \pi\frac{(x'''' - x')}{l} = 0$$

$$Y' - \lambda\frac{(y'' - y')}{f} - \nu\frac{(y''' - y')}{h} - \pi\frac{(y'''' - y')}{l} = 0$$

$$Z' - \lambda\frac{(z'' - z')}{f} - \nu\frac{(z''' - z')}{h} - \pi\frac{(z'''' - z')}{l} = 0$$

$$X'' + \lambda\frac{(x'' - x')}{f} - \mu\frac{(x''' - x'')}{g} - \rho\frac{(x'''' - x'')}{m} = 0$$

$$Y'' + \lambda\frac{(y'' - y')}{f} - \mu\frac{(y''' - y'')}{g} - \rho\frac{(y'''' - y'')}{m} = 0$$

$$Z'' + \lambda\frac{(z'' - z')}{f} - \mu\frac{(z''' - z'')}{g} - \rho\frac{(z'''' - z'')}{m} = 0$$

$$X''' + \mu\frac{(x''' - x'')}{g} + \nu\frac{(x''' - x')}{h} - \sigma\frac{(x'''' - x''')}{n} = 0$$

$$Y''' + \mu\frac{(y''' - y'')}{g} + \nu\frac{(y''' - y')}{h} - \sigma\frac{(y'''' - y''')}{n} = 0$$

$$Z''' + \mu\frac{(z''' - z'')}{g} + \nu\frac{(z''' - z')}{h} - \sigma\frac{(z'''' - z''')}{n} = 0$$

M.)

Die 3 lezten aber sind

$$X'''' + \pi\frac{(x'''' - x')}{l} + \rho\frac{(x'''' - x'')}{m} + \sigma\frac{(x'''' - x''')}{n} = 0$$

$$Y'''' + \pi\frac{(y'''' - y')}{l} + \rho\frac{(y'''' - y'')}{m} + \sigma\frac{(y'''' - y''')}{n} = 0$$

$$Z'''' + \pi\frac{(z'''' - z')}{l} + \rho\frac{(z'''' - z'')}{m} + \sigma\frac{(z'''' - z''')}{n} = 0$$

24)

Digitized by Google

24) Da man 12 Gleichungen und 6 unbestimmte Größen $\lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma$ wegzuschaffen hat, so bleiben für die Bedingungen des Gleichgewichts nur 6 Hauptgleichungen für den Fall von 3 Körpern übrig, und man findet auf eben die Art wie (21) folgende 6, denen (20) analoge Gleichungen:

$$X' + X'' + X''' + X'''' = 0$$

$$Y' + Y''' + Y''' + Y'''' = 0$$

$$Z' + Z'' + Z''' + Z'''' = 0$$

$$X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' + X''''y'''' - Y''''x'''' = 0$$

$$X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' + X'''z''' - Z'''x''' + X''''z'''' - Z''''x'''' = 0$$

$$Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + Y'''z''' - Z'''y''' + Y''''z'''' - Z''''y'''' = 0$$

Anstatt der 3 letzten kann man auch die 3 folgenden Gleichungen substituiren, die man durch die (22) vorgetragene Methode findet, und die, indem sie gar nicht von den Gleichungen, die sich auf den ersten Körper beziehen, abhängen, noch den Vorzug haben, daß sie immer statt finden, wie auch der Zustand dieses Körpers beschaffen seyn mag:

$$X''(y'' - y') - Y''(x'' - x') + X'''(y''' - y') - Y'''(x''' - x') + X''''(y'''' - y') - Y''''(x'''' - x') = 0$$

$$X''(z'' - z') - Z''(x'' - x') + X'''(z''' - z') - Z'''(x''' - x') + X''''(z'''' - z') - Z''''(x'''' - x') = 0$$

$$Y''(z'' - z') - Z''(y'' - y') + Y'''(z''' - z') - Z'''(y''' - y') + Y''''(z'''' - z') - Z''''(y'''' - y') = 0$$

25) Man sieht hieraus, wie man verfahren müßte, wenn man die Bedingungen des Gleichgewichts einer gewissen an einer unbiegsamen Stange oder Hebel angebrachten Zahl von Körpern finden wollte. Ueberhaupt leuchtet es ein, daß, damit die respektive Lage der Körper unverändert bleibe, die Distanzen der 3 ersten Körper unter einander beständig seyn müssen, und daß eben dies der Fall auch mit jedem der andern Körpern von

Digitized by Google

(Man bekommt nemlich auf diese Art für diese 9 Gleichungen

$$X' - \lambda\frac{(x'' - x')}{f} - \nu\frac{(x''' - x')}{h} - \pi\frac{(x'''' - x')}{l} = 0$$

$$Y' - \lambda\frac{(y'' - y')}{f} - \nu\frac{(y''' - y')}{h} - \pi\frac{(y'''' - y')}{l} = 0$$

$$Z' - \lambda\frac{(z'' - z')}{f} - \nu\frac{(z''' - z')}{h} - \pi\frac{(z'''' - z')}{l} = 0$$

$$X'' + \lambda\frac{(x'' - x')}{f} - \mu\frac{(x''' - x'')}{g} - \rho\frac{(x'''' - x'')}{m} = 0$$

$$Y'' + \lambda\frac{(y'' - y')}{f} - \mu\frac{(y''' - y'')}{g} - \rho\frac{(y'''' - y'')}{m} = 0$$

$$Z'' + \lambda\frac{(z'' - z')}{f} - \mu\frac{(z''' - z'')}{g} - \rho\frac{(z'''' - z'')}{m} = 0$$

$$X''' + \mu\frac{(x''' - x'')}{g} + \nu\frac{(x''' - x')}{h} - \sigma\frac{(x'''' - x''')}{n} = 0$$

$$Y''' + \mu\frac{(y''' - y'')}{g} + \nu\frac{(y''' - y')}{h} - \sigma\frac{(y'''' - y''')}{n} = 0$$

$$Z''' + \mu\frac{(z''' - z'')}{g} + \nu\frac{(z''' - z')}{h} - \sigma\frac{(z'''' - z''')}{n} = 0$$

M.)

Die 3 lezten aber sind

$$X'''' + \pi\frac{(x'''' - x')}{l} + \rho\frac{(x'''' - x'')}{m} + \sigma\frac{(x'''' - x''')}{n} = 0$$

$$Y'''' + \pi\frac{(y'''' - y')}{l} + \rho\frac{(y'''' - y'')}{m} + \sigma\frac{(y'''' - y''')}{n} = 0$$

$$Z'''' + \pi\frac{(z'''' - z')}{l} + \rho\frac{(z'''' - z'')}{m} + \sigma\frac{(z'''' - z''')}{n} = 0$$

24)

Digitized by Google

24) Da man 12 Gleichungen und 6 unbestimmte Größen $\lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma$ wegzuschaffen hat, so bleiben für die Bedingungen des Gleichgewichts nur 6 Hauptgleichungen für den Fall von 3 Körpern übrig, und man findet auf eben die Art wie (21) folgende 6, denen (20) analoge Gleichungen:

$$X' + X'' + X''' + X'''' = 0$$
$$Y' + Y''' + Y''' + Y'''' = 0$$
$$Z' + Z'' + Z''' + Z'''' = 0$$
$$X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' + X''''y'''' - Y''''x'''' = 0$$
$$X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' + X'''z''' - Z'''x''' + X''''z'''' - Z''''x'''' = 0$$
$$Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + Y'''z''' - Z'''y''' + Y''''z'''' - Z''''y'''' = 0$$

Anstatt der 3 letzten kann man auch die 3 folgenden Gleichungen substituiren, die man durch die (22) vorgetragene Methode findet, und die, indem sie gar nicht von den Gleichungen, die sich auf den ersten Körper beziehen, abhängen, noch den Vorzug haben, daß sie immer statt finden, wie auch der Zustand dieses Körpers beschaffen seyn mag:

$$X''(y'' - y') - Y''(x'' - x') + X'''(y''' - y') - Y'''(x''' - x') + X''''(y'''' - y') - Y''''(x'''' - x') = 0$$
$$X''(z'' - z') - Z''(x'' - x') + X'''(z''' - z') - Z'''(x''' - x') + X''''(z'''' - z') - Z''''(x'''' - x') = 0$$
$$Y''(z'' - z') - Z''(y'' - y') + Y'''(z''' - z') - Z'''(y''' - y') + Y''''(z'''' - z') - Z''''(y'''' - y') = 0$$

25) Man sieht hieraus, wie man verfahren müßte, wenn man die Bedingungen des Gleichgewichts einer gewissen an einer unbiegsamen Stange oder Hebel angebrachten Zahl von Körpern finden wollte. Ueberhaupt leuchtet es ein, daß, damit die respektive Lage der Körper unverändert bleibe, die Distanzen der 3 ersten Körper unter einander beständig seyn müssen, und daß eben dies der Fall auch mit jedem der andern Körpern von

Digitized by Google

diesen dreien sey, indem die Lage eines Punkts allezeit durch die Distanzen von 3 andern gegebenen Punkten bestimmt ist. Für jeden neuen Körper, den man noch auf dem Hebel anbringt, hat man also dieselben Schlüsse und dasselbe Verfahren anzuwenden, als (23) in Ansehung des 4ten Körpers geschehen ist; jeder derselben veranlaßt 3 neue Gleichungen, so daß die Hauptgleichungen an Zahl immer denen bey 3 Körpern gleich sind; auch haben sie die nämliche Form, wie die (24) gefundenen.

Ueberdies lassen sich diese Gleichungen offenbar auf diejenigen bringen, welche wir (3. Abschn. 3, 6.) überhaupt für's Gleichgewicht eines gewissen freyen Systems gefunden haben. Denn da wegen der Unbiegsamkeit der Stange die Entfernungen der Körper von einander unveränderlich sind; so folgt daraus, daß das Gleichgewicht statt finden muß, wenn alle fortrückende und drehende Bewegungen aufgehoben worden sind. Man hätte also durch diese einzige Betrachtung das vorhergehende Problem nach den Formeln der angeführten Artikel auflösen können; wir hielten es aber nicht für unnütz, eine direkte und aus den besondern Bedingungen der Aufgabe gezogene Auflösung davon zu geben.

26) Wir wollen nun von neuem den Fall der 3 durch eine Stange verbundenen Körper betrachten und annehmen, sie sey in dem Punkt, worin sich der 2te Körper befindet, elastisch, so daß die Entfernungen dieses Körpers vom ersten und letzten beständig seyen, der Winkel aber, der durch die Linie dieser Entfernungen gebildet wird, sey veränderlich, und die Würkung der Elasticität bestehe darin, diesen Winkel größer zu machen, und folglich den äussern durch eine der Seiten und die verlängerte andere gemachten Winkel zu verkleinern.

Wir wollen die Kraft der Elasticität E nennen, und der äussere Winkel, nachdem sie sich würksam beweiset, sey e; so ist leicht zu schließen, was wir im 2ten Abschnitt festgesetzt haben, daß das Moment der Kraft E durch Ede ausgedrückt werden müsse, so daß die Summe der Momente aller Kräfte des Systems sey:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + Ede$$

Die

Digitized by Google

Die Bedingungen der Aufgabe sind hier die nemlichen, als (11), d. h. $df = o$ und $dg = o$; folglich hat man folgende allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht:

$$X' dx' + Y' dy' + Z' dz' + X'' dx'' + Y'' dy'' + Z'' dz'' + X''' dx''' + Y''' dy''' + Z''' dz''' + Ede + \lambda df + \mu dg = o.$$

Man hat also nur die Werthe von de, df, dg zu substituiren, die von df und dg sind dieselben als in (11); und um den Werth von de zu finden; so bemerke man, daß in dem Dreyeck, dessen 3 Seiten f, g, h, sind (20) der der Seite h entgegengesetzte Winkel $180° - e$ ist, so daß man nach dem bekannten Theorem hat $\text{Cos } e = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg}$, woraus man durch die Differentiation den Werth von de zieht. Man hat aber nach den Bedingungen der Aufgabe $df = o$ und $dg = o$; man braucht daher nur e und h als veränderlich anzunehmen, welches giebt

$$de = \frac{h\,dh}{fg \sin. e}.$$ Substituirt man nun diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung; so ist klar, daß sie dieselbe Form bekommen wird, als die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht in dem Falle (20), wenn man nur in dieser $\nu = \frac{Eh}{fg \sin e}$ setzt. Die besondern Gleichungen sind folglich in beiden Fällen einerley, nur mit dem Unterschied, daß in (20) die Größe ν unbestimmt ist, und folglich weggeschaft werden muß; da im gegenwärtigen Falle diese Größe völlig bekannt ist, und man nur die 2 unbestimmten Größen λ, μ wegzuschaffen hat, so daß eine Hauptgleichung mehr übrig bleiben muß, als im angeführten Falle, d. h. 7 Hauptgleichungen anstatt 6. Da aber nichts hindert, die Größe ν mag bekannt oder nicht seyn, sie nebst den beiden andern λ, μ, wegzuschaffen, so ist klar, daß man auch im gegenwärtigen Falle dieselben Gleichungen hat, die (21, 22) gefunden worden sind, und um die 7te zu finden, hat man nur λ in den 3 erstern und μ in den 3 letztern der 9 besondern Gleichungen

Digitized by Google

(21) wegzuschaffen, und für ν seinen Werth $\frac{Eh}{fg \sin. e}$ zu substituiren.

27) Hätte man übrigens in dem Werthe von dg nicht df und dg = 0 setzen wollen; so würde man einen Ausdruck von der Form

$$de = \frac{hdh}{fg \sin. e} + Adf + Bdg$$ bekommen haben, wo A und B Funktionen von f, g, h sin e sind; alsdenn würden die 3 Glieder $Ede + \lambda df + \mu dg$ der allgemeinen Gleichung sich in

$\frac{Eh}{fg \sin. e} dh + (FA + \lambda) df + (EB + \mu) dg$ verwandelt haben; aber λ und μ sind 2 unbestimmte Größen, man kann also offenbar an ihre Stelle λ — EA, μ — EB; setzen, wodurch die vorgegebene Größe sich in

$\frac{Eh}{fg \sin. e} dh + \lambda df + \mu dg$ verwandelt, eben so als wenn f und g in dem Ausdruck von de beständig gewesen wären.

28) Wären mehrere Körper unter einander durch elastische Ruthen verbunden; so fände man auf gleiche Art die für's Gleichgewicht dieser Körper nöthige Gleichungen und überhaupt giebt unsre Methode allezeit mit eben der Leichtigkeit die Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems von Körpern, die auf eine gewisse Art unter einander verbunden sind, und von gewissen beliebigen äussern Kräften getrieben werden, an die Hand. Der Calkul geht, wie man siehet, immer einen Weg, und das hat man in der That unter die ersten Vorzüge dieser Methode zu rechnen.

§. III.

Vom Gleichgewicht eines Fadens, wovon alle Punkte von gewissen Kräften gezogen werden, und den man entweder vollkommen biegsam oder unbiegsam, oder elastisch und zugleich ausdehnbar oder nicht annimmt.

29)

Digitized by Google

29) Es ist hier der Ort die Methode anzuwenden, die wir im 4ten Abschn. 9 u. f. vorgetragen haben.

Wir wollen um mehrerer Einfachheit willen immer voraussetzen, alle äussere auf jeden Punkt des Fadens würkende Kräfte seyen auf 3 X, Y, Z gebracht, die nach den rechtwinklichten Coordinaten x, y, z dieses Punkts ihre Richtungen hätten. Nennen wir daher dm das Element des Fadens; so haben wir für die Summe der Momente aller dieser Kräfte in Ansehung der ganzen Länge des Fadens diese Integralformel (13. Art.) 4.:

$$\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dm.$$

30) Wir wollen den Fall eines vollkommen biegsamen und unausdehnbaren Fadens betrachten; nennen wir ds das Element der krummen Linie dieses Fadens, das durch $\sqrt{[dx^2 + dy^2 + dz^2]}$ ausgedrückt wird; so muß wegen der Bedingung der Unausdehnbarkeit ds eine unveränderliche Größe seyn, und folglich hätte man in Ansehung jedes Elements des Fadens diese unbestimmte Bedingungsgleichung $\delta ds = 0$.

Multiplicirt man daher δds durch eine unbestimmte Größe λ und nimmt das ganze Integrale; so hat man $S\lambda\delta ds$; und ist weiter keine Bedingungsgleichung vorhanden; so hat man die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts, wenn man die Summe der eben gefundenen Integrale $= 0$ setzt.

Da nun $ds = \sqrt{[dx^2 + dy^2 + dz^2]}$

so bekömmt man, wenn man nach S differentiirt

$$\delta ds = \frac{dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz}{ds}$$

folglich $S\lambda\delta ds = S\frac{\lambda dx}{ds}\delta dx + S\frac{\lambda dy}{ds}\delta dy + S\frac{\lambda dz}{ds}\delta dz$;

Aendert

*) Im französischen steht hier $S\frac{\lambda dx}{dx}\delta dx$ M.

Digitized by Google

Aendert man nun δd in $d\delta$ um und integrirt theilweise um d vor δ wegzubringen, nach denen (4. Abschn. 17.) gegebenen Regeln; so erhält man, (wenn man wie im angeführten Orte mit einem Strich die Größen bezeichnet, die sich auf den Anfang der ganzen durch S angedeuteten Integrale beziehen, und durch 2 Striche die sich auf das Ende derselben beziehen. M.):

$$S\frac{\lambda dx}{ds}\delta dx = \frac{\lambda'' dx''}{ds''}\delta x'' - \frac{\lambda' dx'}{ds'}\delta x' - Sd\frac{\lambda dx}{ds} + \delta y$$

$$S\frac{\lambda dy}{ds}\delta dy = \frac{\lambda'' dy''}{ds''}\delta y'' - \frac{\lambda' dy'}{ds'}\delta y' - Sd\frac{\lambda dy}{ds} + \delta y$$

$$S\frac{\lambda dg}{ds}\delta dz = \frac{\lambda'' dz''}{ds''}\delta z'' - \frac{\lambda' dz'}{ds'}\delta z' - Sd\frac{\lambda dz}{ds} + \delta z.$$

(Im gegenwärtigen Falle ist nämlich

$$\Omega\ (4\text{ Abschn. }17.) = \frac{\lambda dx}{ds} \text{ oder } \frac{\lambda dy}{ds} \text{ oder } \frac{\lambda dz}{ds}$$

$$\Omega' = \frac{\lambda' dx'}{dx'} \text{ oder } \frac{\lambda' dy'}{ds'} \text{ oder } \frac{\lambda' dz'}{ds'}$$

$$\Omega'' = \frac{\lambda'' dx''}{dx''} \text{ oder } \frac{\lambda'' dy''}{ds''} \text{ oder } \frac{\lambda'' dz''}{ds''}$$

und es ist immer

$$S\Omega d\delta x = \Omega'' \delta x'' - \Omega' \delta z' - S\delta x d\Omega \quad M.)$$

Die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht wird also:

$$(S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm$$

$$+ \frac{\lambda'' dx''}{ds''}\delta x'' - \frac{\lambda dx'}{ds'}\delta x' - Sd.\frac{\lambda dx}{ds}\delta x$$

$$+ \frac{\lambda'' dy''}{ds''}\delta y'' - \frac{\lambda dy'}{ds'}\delta y' - Sd.\frac{\lambda dy}{ds}\delta y$$

Digitized by Google

$$+ \frac{\lambda'' dz''}{ds''} \delta z'' - \frac{\lambda dz'}{ds'} \delta z' - Sd. \frac{\lambda dz}{ds} \delta z$$

M.)

$$S\left[\left(Xdm - d. \frac{\lambda dx}{dx}\right)\delta x + \left(Ydm - d. \frac{\lambda dy}{dy}\right)\right.$$

$$\left.\delta y + \left(Zdm - d. \frac{\lambda dz}{ds}\right)\delta z\right] +$$

$$\frac{\lambda'' dx''}{ds''} \delta x'' + \frac{\lambda'' dy''}{ds''} \delta y'' + \frac{\lambda'' dz''}{ds''} \delta z''\ *)$$

$$- \frac{\lambda' dx'}{ds'} \delta x' - \frac{\lambda' dy'}{ds'} \delta y' - \frac{\lambda' dz'}{ds'} \delta z\ **) = 0.$$

31) Man ſetze nun nach (4. Abſchn. 18.) die Coefficienten von δx, δy, δz unter dem Zeichen $S = 0$; ſo bekommt man folgende 3 beſondere unbeſtimmte Gleichungen:

$$Xdm - d. \frac{\lambda dx}{ds} = 0,$$

$$Ydm - d. \frac{\lambda dy}{ds} = 0,$$

$$Zdm - d. \frac{\lambda dz}{ds} = 0.$$

Schafft

*) Im Original ſteht hier $\frac{\lambda'' dx''}{ds''} \delta z''$. M.

**) Hier iſt wieder als ein Druckfehler $\frac{\lambda' dz'}{dz'} \delta z'$ ſtatt $\frac{\lambda' dz'}{ds'} \delta z'$ im franzöſiſchen. M.

Digitized by Google

Schafft man hieraus die unbestimmte Größe λ weg; so bleiben noch 2 Gleichungen übrig, die dazu dienen, die krumme Linie des Fadens zu bestimmen.

Diese Wegschaffung kann aber auf eine sehr leichte Art geschehen, denn man braucht nur die vorhergehenden Gleichungen zu integriren; so erhält man folgende:

$$\frac{\lambda dx}{ds} = A + \int X dm$$

$$\frac{\lambda dy}{ds} = B + \int Y dm$$

$$\frac{\lambda dz}{ds} = C + \int Z dm$$

wo A, B, C, beliebige beständige Größen sind.

Wirft man nun hieraus λ (nach der schon oft gebrauchten Methode M) weg; so hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \int Y dm}{A + \int X dm}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C + \int Z dm}{A + \int X dm}$$

welche Gleichungen mit den bekannten Formeln der Kettenlinie übereinkommen.

§2) Will man direkte zu reinen Differentialgleichungen, worin das Zeichen ∫ nicht vorkomme, gelangen; so bringe man die gefundenen Gleichungen auf folgende Forme:

$$Xdm - \lambda d.\frac{dx}{ds} - d\lambda \frac{dx}{ds} = 0$$

$$Ydm - \lambda d.\frac{dy}{ds} - d\lambda \frac{dy}{ds} = 0$$

Zdm

Digitized by Google

$$Zdm - \lambda d.\frac{dz}{ds} - d\lambda\frac{dz}{ds} = 0$$

woraus man durch Wegschaffung von $d\lambda$ folgende beide Gleichungen ziehet:

$$\frac{Xdy - Ydx}{ds}dm = \lambda\left[\frac{dy}{ds}d.\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}d.\frac{dy}{ds}\right]$$

$$\frac{Xdz - Zdx}{ds}dm = \lambda\left[\frac{dz}{ds}d.\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}d.\frac{dz}{ds}\right];$$

Aber $\frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d.\frac{dz}{ds} =$

$$\tfrac{1}{2}d\left[\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2}\right] = 0$$

Multiplicirt man daher die vorhergehenden Gleichungen durch

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; so ist

$$\frac{Xdx + Ydy + Zdz}{ds}dm = d\lambda$$

und man hat nun noch in dieser letzten Gleichung die aus den vorhergehenden gezogene Werthe von λ zu substituiren.

33) Wir wollen nun die Glieder der allgemeinen Gleichung betrachten, die ausser dem Zeichen S sind, und wir wollen zuerst annehmen, der Faden sey völlig frey; in diesem Falle werden die Variationen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ und $\delta x''$*), $\delta y''$, $\delta z''$, die sich auf die beiden äussern Punkte des Fadens beziehen, unbestimmt und willkührlich seyn, folglich muß jedes Glied, worin eine dieser Variationen vorkömmt, an und für sich $= 0$ seyn. Man hat folglich $\lambda'' = 0$, $\lambda' = 0$; d. h. der Werth von λ muß im Anfang und am Ende des Fadens $= 0$ seyn. Man erfüllet diese Bedingung durch bestän-

*) Im Original steht hier statt $\delta x''$, $\delta z''$. M.

Digitized by Google

beständige Größen. Die 3 ersten Integralgleichungen (32) aber geben für den ersten Punkt des Fadens, wo die Größen, die ein ſ vor ſich haben = o werden

$$\frac{\lambda' dx'}{ds'} = A, \quad \frac{\lambda' dy'}{ds'} = B, \quad \frac{\lambda' dz'}{ds'} = C,$$

und für den letzten Punkt des Fadens, wo ſ ſich in S verwandelt:

$$\frac{\lambda'' dx''}{ds''} = A + SXdm,$$

$$\frac{\lambda'' dy''}{ds''} = B + SYdm,$$

$$\frac{\lambda'' dz''}{ds''} = C + SZdm.$$

Man hat alſo im gegenwärtigen Falle

$$A = o, \; B = o, \; C = o,$$

$$SXdm = o, \; SYdm = o, \; SZdm = o.$$

Dieſe 3 letztern Gleichungen kommen, wie man ſieht, mit den 3 erſten (12) überein.

34) Wir wollen nun 2tens annehmen, der Faden ſey mit einem ſeiner Enden oder mit allen beiden feſt. Iſt der Faden mit dem erſten ſeiner Enden feſt; ſo ſind die Variationen $\partial x', \partial y', \partial z' = o$, und man hat nur die Coefficienten von $\partial x'', \partial y'', \partial z''$, auch $= o$ zu ſetzen, d. h. man muß $\lambda'' = o$ machen. Aus gleicher Urſache hat man, wenn das 2te Ende feſt iſt $\lambda' = o$. Wären aber beide Enden zugleich feſt; ſo hätte man keine beſondere Bedingung zu erfüllen, indem in dieſem Falle die Variationen $\partial x', \partial y', \partial z', \partial x'', \partial y'', \partial z''$ insgeſammt $= o$ wären.

35) Geſetzt nun 3tens die Enden des Fadens wären an krumme Linien oder Flächen feſt gemacht, und ſie könnten der Länge derſelben nach frey wegrütſchen; $dz' = a'dx' + b'dy'$, $dz'' = a''dx'' + b''dy''$ ſeyen z. B. die Differentialgleichungen der Flächen, woran der erſte und letzte

Digitized by Google

letzte Punkt des Fadens fest gemacht sey; so erhält man, wenn man statt d ∂ setzt

$$\partial x' = a' \partial x' + b' \partial y', \quad \partial x'' = a'' \partial x'' + b'' \partial y'';$$

Man substituire daher diese Werthe in den vorgegebenen Gliedern wie vorhin und setze darauf die Coefficienten von $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial x''$, $\partial y''$, $= 0$.

Ueberhaupt aber behandle man den Theil, der ausserhalb des Zeichens in der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht sich befindet, eben so, als wenn er allein stünde, und die Gleichung fürs Gleichgewicht zweier Körper vorstellte, die von einander getrennet und an den Enden des Fadens fest wären.

36) Wir wollen setzen, der Faden sey z. B. mit seinen 2 Enden an den äussersten Enden eines um einen festen Punkt beweglichen Hebels fest gemacht. Es seyen a, b, c die 3 rechtwinklichten Coordinaten, die im Raume die Lage dieses festen Punkts, d. h. des Ruhepunkts des Hebels bestimmen, und es sey ferner f die Distanz zwischen diesem Ruhepunkt und dem Ende des Hebels, woran das erste Ende des Fadens festgemacht ist, g die Distanz zwischen eben diesem Ruhepunkt und dem andern Ende des Hebels, woran das 2te Ende des Fadens fest gemacht ist, h die Distanz zwischen den beiden Enden des Hebels, und folglich auch zwischen den beiden Enden des Fadens; so ist klar, daß diese 6 Größen a, b, c, f, g, h, durch die Natur des Problems gegeben sind. Zugleich sieht man, daß, wenn x', y', z', die Coordinaten für den Anfang der Krümmung des Fadens und x'', y'', z'' die Coordinaten für das Ende eben dieser Krümmung sind, man hat

$$f = \sqrt{[(a - x')^2 + (b - y')^2 + (c - z')^2]}$$
$$g = \sqrt{[(a - x'')^2 + (b - y'')^2 + (c - z'')^2]}$$
$$h = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}$$

Diese Größen f, g, h, aber sind unveränderlich, differentiirt man also nach ∂; so erhält man diese 3 bestimmte Bedingungsgleichungen:

Digitized by Google

$$(a - x')\,dx' + (b - y')\,dy' + (c - z')\,dz' = 0$$

$$(a - x'')\,dx'' + (b - y'')\,dy'' + (c - z'')\,dz'' = 0$$

$$(x'' - x')(dx'' - dx') + (y'' - y')(dy'' - dy') + (z'' - z')(dz'' - dz') = 0.$$

Man multiplicire jede durch einen unbestimmten Coefficienten und addire sie zur allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht. Nimmt man alsdann α, β, γ für diese 3 Coefficienten an, und setzt die Coefficienten der 6 Variationen dx', dy', dz', dx'', dy'', $dz'' = 0$; so erhält man ebensoviele besondere bestimmte Gleichungen, als:

$$\alpha(a - x') - \gamma(x'' - x') - \frac{\lambda' dx'}{ds'} = 0$$

$$\alpha(b - y') - \gamma(y'' - y') - \frac{\lambda' dy'}{ds'} = 0$$

$$\alpha(c - z') - \gamma(z'' - z') - \frac{\lambda' dz'}{ds'} = 0$$

$$\beta(a - x'') + \gamma(x'' - x') + \frac{\lambda'' dx''}{ds''} = 0$$

$$\beta(b - y'') + \gamma(y'' - y') + \frac{\lambda'' dy''}{ds''} = 0$$

$$\beta(c - z'') + \gamma(z'' - z') + \frac{\lambda'' dz''}{ds''} = 0$$

welche durch Wegschaffung der α, β, γ sich auf 3 bringen lassen.

Verbindet man hierauf diese 3 Gleichungen mit den obigen 3 Bedingungsgleichungen; so ist man im Stande die Lage des Hebels zu bestimmen. Man wird hieraus leicht abnehmen können, wie man sich in ähnlichen Fällen zu verhalten habe.

37) Gäbe es überdies noch ausser den Kräften, die jeden Punkt des Fadens ziehen, besondere an den beiden Enden des Fadens angebrachte, und

Digitized by Google

und durch X', Y', Z' für das erste Ende des Fadens, und durch X'', Y'', Z'' für das letzte Ende desselben vorgestellte Kräfte; so gäben diese Kräfte die Momente:

$$X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z' + X''\delta x'' + Y''\delta x'' + Z''\delta z''$$

und man müßte diese Größe noch zum ersten Glied der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht hinzuaddiren, nehmlich zu dem Theil der ausser den Zeichen ist, und der dadurch wird:

$$\left(X'' + \frac{\lambda''dx''}{ds''}\right)\delta x'' + \left(Y'' + \frac{\lambda''dy''}{ds''}\right)\delta y'' +$$

$$\left(Z'' + \frac{\lambda''dz''}{ds''}\right)\delta z'' + \left(X' - \frac{\lambda'dx'}{ds'}\right)\delta x'$$

$$+ \left(Y' - \frac{\lambda'dy'}{ds'}\right)\delta y' + \left(Z' - \frac{\lambda'dz'}{ds'}\right)\delta z'$$

Mit diesem Ausdruck würde man in den verschiedenen Fällen, wie wir eben gesehen haben, so verfahren, wie in den vorhergehenden Artikeln.

38) Man nehme jetzt an, der in allen seinen Punkten durch dieselben Kräfte X, Y, Z getriebene und noch überdies durch die Kräfte X', Y', Z', X'', Y'', Z'' an seinen beiden Enden gezogene Faden, solle auf einer gegebenen krummen Fläche liegen, deren Gleichung $dz = pdx + qdy$ sey, und man verlange die Figur und Lage dieses Fadens zu wissen, wenn er im Gleichgewicht seyn soll.

Diese Aufgabe, die vielleicht nach den gewöhnlichen Grundsätzen der Mechanik sehr schwer zu behandlen seyn würde, wird durch unsre Methode und Formeln leicht aufgelöst. Denn verändert man d in δ; so wird aus der Gleichung der gegebenen Fläche $dz = pdx + qdy$; man hat also nur diesen Werth von δz in den Gliedern, die sich unter dem Zeichen der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht des Fadens befinden, (30) zu substituiren, und hernach die Größen, worin δx und δy vorkommen $= 0$ zu setzen. Hiedurch gelangt man zu folgenden beiden unbestimmten Gleichungen:

Digitized by Google

$$Xdm - d.\frac{\lambda dx}{ds} + p\left(Zdm - d.\frac{\lambda dz}{ds}\right) = o$$

$$Ydm - d.\frac{\lambda dy}{ds} + q\left(Zdm - d.\frac{\lambda dz}{ds}\right) = o$$

welche dazu dienen, die Krümmung des Fadens zu bestimmen, indem man sie mit der Gleichung der Fläche $dz = pdx + qdy$ verbindet, und die unbestimmte Größe λ wegschaft.

39) Da man ferner voraussetzt, der Faden sey mit seiner ganzen Länge an diese Fläche fest; so hat man auch für seine beiden äussersten Punkte:

$$\delta z' = p'\delta x' + q'\delta y', \quad \delta z'' = p''\delta x'' + q''\delta y''.$$

Man substituire daher auch diese Werthe in die Glieder, die sich ausserhalb des Zeichens der allgemeinen Gleichung befinden, oder vielmehr in der (37) gegebenen Formel, worin man auch auf die Kräfte X' Y' etc. Rücksicht genommen hat, hierauf aber setze man die Größen, wovon jede der übrigen 4 Variationen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$ vorkommen $= o$, wodurch man diese 4 neuen bestimmten Gleichungen erhält:

$$X' - \frac{\lambda' dx'}{ds'} + p'\left(Z' - \frac{\lambda' dz'}{ds'}\right) = o$$

$$Y' - \frac{\lambda' dy'}{ds'} + q'\left(Z' - \frac{\lambda' dz'}{ds'}\right) = o$$

$$X'' + \frac{\lambda'' dx''}{ds''} + p''\left(Z'' + \frac{\lambda'' dz''}{ds''}\right) = o$$

$$Y'' + \frac{\lambda'' dy''}{ds''} + q''\left(Z'' + \frac{\lambda'' dz''}{ds''}\right) = o$$

wozu man noch gewisse beständige Größen addiren muß.

40) Aber anstatt, wie wir eben gethan haben, den Werth von δz in δx und δy, den man aus der Gleichung $\delta z - p\delta x - q\delta y = o$ gezo-

gen

Digitized by Google

gen hat, zu substituiren; könnte man eben diese Gleichung als eine neue unbestimmte Bedingungsgleichung ansehen, alsdann müßte man diese Gleichung durch einen andern unbestimmten Coefficienten multipliciren, das ganze Integrale davon nehmen, und zur allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts addiren (30).

Hiedurch wird der Theil unter dem Zeichen

$$S\left[\left(Xdm - d.\frac{\lambda dx}{ds} - \mu p\right)\delta x + \left(Ydm - d.\frac{\lambda dy}{ds} - \mu q\right)\delta y + \left(Zdm - d.\frac{\lambda dz}{ds} + \mu\right)\delta z\right]$$

und man erhält also sogleich diese 3 unbestimmte Gleichungen:

$$Xdm - d.\frac{\lambda dx}{ds} - \mu p = 0$$

$$Ydm - d.\frac{\lambda dy}{ds} - \mu q = 0$$

$$Zdm - d.\frac{\lambda dz}{ds} - \mu = 0$$

welche durch Wegschaffung der Größe μ die (38) gefundene Gleichungen geben. Diese letztern aber haben noch den Vortheil zugleich den Druck zu erkennen zu geben, den jedes Element des Fadens auf die Fläche nach der (4 Abschn. 7.) gegebenen Theorie ausübt.

41) In der That ist es leicht aus dieser Theorie herzuleiten, daß die Glieder $\mu(\delta z - p\delta x - q\delta y$, die aus der Bedingungsgleichung $\delta z - p\delta x - q\delta y = 0$ entspringen, die Würkung einer Kraft $= \mu\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ andeuten können, die an jedem Element dm des Fadens in einer auf der Oberfläche, deren Gleichung ist $\delta z - p\delta x - q\delta y = 0$ oder vielmehr $dz - pdx - qdy = 0$ d. h. auf derselben Oberfläche, worauf wir den Faden liegend angenommen haben, senkrechten Richtung. Diese Fläche thut daher die Würkung der erwähnten Kraft, die folglich dem durch den Faden

Digitized by Google

Faden auf eben dieser Fläche ausgeübten Drucke gleich und entgegengesetzt ist (4 Abschn. 8.). Der Druck jedes Punkts des Fadens wird daher seyn $= \frac{\mu\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{dm}$ oder wenn man die Werthe von μ, μp, μq, die aus den obigen Gleichungen gezogen werden, substituirt

$$= \sqrt{\left[\left(X - \frac{1}{dm}\cdot d.\frac{\lambda dx}{ds}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{dm}\cdot d.\frac{\lambda dy}{ds}\right)^2 + \left(Z - \frac{1}{dm} + d.\frac{\lambda dz}{ds}\right)^2\right]}.$$

Eben diese Schlüsse wird man bei dem Theile der allgemeinen Gleichung anwenden, die ausser dem Zeichen S ist, und man wird auch den vorhergehenden analoge Folgerungen daraus ziehen.

42) Bisher haben wir angenommen, der Faden sey unausdehnbar; jezt wollen wir ihn, als elastisch und der Ausdehnung und Zusammenziehung fähig betrachten. Es sey daher F die Kraft, womit jedes Element ds der Krümmung des Fadens sich zusammenzuziehen strebt; alsdann erhält man wie (18) (indem man ds an die Stelle von f setzt, und d in δ umändert) $F\delta ds$ für das Moment dieser Kraft und $SF\delta ds$ für die Summe der Momente aller Zusammenziehungskräfte, die auf die ganze Länge des Fadens würken. Man addire daher dieses Integrale $SF\delta ds$ zu dem Integrale $S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$, welches die Summe der Momente aller äussern Kräfte ausdrückt, die auf den Faden würken (29). Setzt man nun das Ganze $= 0$; so erhält man die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht des elastischen Fadens.

Man siehet aber leicht, daß diese Gleichung von derselben Form seyn wird, als die (30) für den Fall eines unausdehnbaren Fadens, und daß, wenn man F in λ verwandelt, die beiden Gleichungen sogar einerley werden werden. Man hat daher im gegenwärtigen Falle dieselben besondern Gleichungen für's Gleichgewicht des Fadens, als man in dem Falle (31) gefunden hat, wenn man nur in dieser F an die Stelle des λ setzt. Da aber die Größe F als bekannt vorausgesetzt wird; so hat man nicht

nöthig

Digitized by Google

nöthig sie wegzuschaffen; man hat also hier eine Gleichung mehr für's Gleichgewicht des Fadens als im angeführten Falle; weil aber sonst die Wegschaffung einer Größe allezeit erlaubt ist; so folgt hieraus, daß die aus dieser Wegschaffung entspringenden Gleichungen gleichfals bey einem unausdehnbaren Faden sowie bey einem ausdehnbaren und elastischen statt finden werden.

Man kann hieraus den Schluß ziehen, daß die unbestimmte Größe λ der Auflösung (31), eigentlich nur die Kraft ausdrückt, womit jedes Element des Fadens der Würkung der äussern Kräfte widersteht, die ihn zu verlängern streben, d. h. was man gewöhnlich Spannung des Fadens nennet. Eben dies hätte man auch direkte durch die Theorie (4 Abschn. 7.) finden können, so wie wir dies in Ansehung des durch den Faden auf eine Fläche ausgeübten Drucks gethan haben (41).

43) Man setze jetzt von neuem, der Faden sey unausdehnbar, aber anstatt ihn zugleich als vollkommen biegsam, wie bisher geschehen ist, anzusehen, setze man, er sey elastisch, so daß er in jedem Punkte eine Kraft habe, die ich E nennen will, die sich der Biegung des Fadens entgegensetze, und die folglich strebt den Berührungswinkel zu vermindern. Nennen wir diesen Winkel e; so haben wir wie (26) (wenn wir nur d in δ umändern) Ede für das Moment jeder Kraft E; folglich ist SEde die Summe der Momente aller Kräfte der Elasticität, die in der ganzen Länge des Fadens würken, welche folglich zum ersten Gliede der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht, in dem Falle, daß der Faden unausdehnbar und vollkommen biegsam sey (30) hinzuaddirt werden muß. Die ganze Schwierigkeit besteht also darin, das Integrale SEde auf eine schickliche Form zu bringen; in dieser Absicht suche man zuerst den Werth von e;

Wir haben aber (26) gefunden, daß

$$\text{Col. } e = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg}$$

Digitized by Google

woraus man zieht

$$\left(\text{da } \sin^2 e = 1 - \cos^2 e = 1 - \frac{(f^2 + g^2 - h^2)^2}{2fg}\right)$$

M.

$$\sin^2 e = \frac{4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2}{4f^2g^2}$$

Um diese Formel auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden, hat man nur nöthig zu bemerken, daß die Coordinaten x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''' wodurch wir die Größen f, g, h (11, 20) ausgedrückt haben, sich in x, y, z; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; $x + 2dx + d^2x$, $y + 2dy + d^2y$, $z + 2dz + d^2z$; hier verwandeln so daß man hat

$$f^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

$$g^2 = (dx + dy^2)^2 + (dy + d^2y)^2 + (dz + d^2z)^2$$

$$= dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2$$

$$= ds^2 + 2dsd^2s + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2;$$

$$h^2 = (2dx + d^2x)^2 + (2dy + d^2y)^2 + (2dz + d^2z)^2$$

$$= 4ds^2 + 4dsd^2s + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2$$

folglich $f^2 + g^2 - h^2 = -2ds^2 - 2dsd^2s$

und $4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2 = 4ds^4 + 8ds^3d^2s + 4ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - 4(ds^2 + dsd^2s)^2$

$$= 4ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2dz^2 - d^2s^2)$$

folglich $\sin^2 e = \frac{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}{ds^2}$.

Da dieser Werth von $\sin^2 e$ ein unendlich kleines von der 2ten Ordnung ist; so folgt daraus, daß $\sin e$ und daher auch der Winkel e ein unendlich kleines 1ter Ordnung sey; so daß

e =

Digitized by Google

$$e = \frac{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^3}}{ds}$$

und dies ist der Ausdruck für den Berührungswinkel e in einer krummen Linie von doppelter Krümmung.

44) Man differentiire jetzt nach δ, um den Werth von δe zu erhalten, und da man vermöge der Bedingung der Unausdehnbarkeit des Fadens schon hat $\delta ds = 0$ (21) und folglich auch $d\delta ds = \delta d^2 s = 0$; so kann man bey der eben genannten Differentiation ds und d^2s als beständig annehmen; auf diese Art erhält man

$$\delta e = \frac{d^2x\delta d^2x + d^2y\delta d^2y + d^2z\delta d^2z}{ds\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + \delta^2z^2 d^2s^2)}}$$

Substituirt man diesen Werth von δs in $SE\delta e$ und man setzt Kürze halber

$$J = \frac{E}{ds\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}}$$

so hat man

$$SE\delta e = SId^2x\delta d^2x + SId^2y\delta d^2y + SId^2z\delta d^2z.$$

Behandelt man diese Ausdrücke nach den gegebenen Regeln (4 Abschn. 17.), indem man zuerst δd in $d\delta$ verwandelt, und theilweise hernach integrirt um d vor δ wegzuschaffen; so erhält man folgende veränderte Gleichungen:

$$SJd^2x\delta d^2x = J''d^2x''d\delta x'' - d.(J''d^2x'')\delta x''$$
$$- J'd^2x'd\delta x' + d(J'd^2x')\delta x' + Sd^2(Jd^2x)\delta x$$
$$SJd^2y\delta d^2y = J''d^2y''d\delta y'' - d.(J''d^2y'')\delta y''$$
$$- J'd^2y'd\delta y' + d(J'd^2y')\delta y' + Sd^2(Jd^2y)\delta y$$
$$SJd^2z\delta d^2z = J''d^2z''d\delta z'' - d.(J''d^2z'')\delta z''$$
$$- J'd^2z'd\delta z' + d.(J'd^2z')\delta z' + Sd^2(Jd^2z)\delta z.$$

Digitized by Google

woraus man zieht

$$\left(\text{da } \sin^2 e = 1 - \cos^2 e = 1 - \frac{(f^2 + g^2 - h^2)^2}{2fg}\right)$$

M.

$$\sin^2 e = \frac{4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2}{4f^2g^2}$$

Um dieſe Formel auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden, hat man nur nöthig zu bemerken, daß die Coordinaten x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''' wodurch wir die Größen f, g, h (11, 20) ausgedrückt haben, ſich in x, y, z; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; $x + 2dx + d^2x$, $y + 2dy + d^2y$, $z + 2dz + d^2z$; hier verwandeln ſo daß man hat

$$f^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

$$g^2 = (dx + dy^2)^2 + (dy + d^2y)^2 + (dz + d^2z)^2$$

$$= dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2$$

$$= ds^2 + 2dsd^2s + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2;$$

$$h^2 = (2dx + d^2x)^2 + (2dy + d^2y)^2 + (2dz + d^2z)^2$$

$$= 4ds^2 + 4dsd^2s + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2$$

folglich $f^2 + g^2 - h^2 = -2ds^2 - 2dsd^2s$

und $4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2 = 4ds^4 + 8ds^3d^2s + 4ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - 4(ds^2 + dsd^2s)^2$

$$= 4ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2dz^2 - d^2s^2)$$

folglich $\sin^2 e = \frac{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}{ds^2}$.

Da dieſer Werth von $\sin^2 e$ ein unendlich kleines von der 2ten Ordnung iſt; ſo folgt daraus, daß $\sin e$ und daher auch der Winkel e ein unendlich kleines 1ter Ordnung ſey; ſo daß

e =

Digitized by Google

$$e = \frac{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}}{ds}$$

und dies ist der Ausdruck für den Berührungswinkel e in einer krummen Linie von doppelter Krümmung.

44) Man differentiire jetzt nach δ, um den Werth von δe zu erhalten, und da man vermöge der Bedingung der Unausdehnbarkeit des Fadens schon hat $\delta ds = 0$ (21) und folglich auch $d\delta ds = \delta d^2 s = 0$; so kann man bey der eben genannten Differentiation ds und d^2s als beständig annehmen; auf diese Art erhält man

$$\delta e = \frac{d^2x\delta d^2x + d^2y\delta d^2y + d^2z\delta d^2z}{ds\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + \delta^2z^2\, d^2s^2)}}$$

Substituirt man diesen Werth von δe in $SE\delta e$ und man setzt Kürze halber

$$J = \frac{E}{ds\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}}$$

so hat man

$$SE\delta e = SJd^2x\delta d^2x + SJd^2y\delta d^2y + SJd^2z\delta d^2z.$$

Behandelt man diese Ausdrücke nach den gegebenen Regeln (4 Abschn. 17.), indem man zuerst δd in $d\delta$ verwandelt, und theilweise hernach integrirt um d vor δ wegzuschaffen; so erhält man folgende veränderte Gleichungen:

$$SJd^2x\delta d^2x = J''d^2x''d\delta x'' - d.(J''d^2x'')\delta x'' - J'd^2x'd\delta x' + d(J'd^2x')\delta x' + Sd^2(Jd^2x)\delta x$$

$$SJd^2y\delta d^2y = J''d^2y''d\delta y'' - d.(J''d^2y'')\delta y'' - J'd^2y'd\delta y' + d(J'd^2y')\delta y' + Sd^2(Jd^2y)\delta y$$

$$SJd^2z\delta d^2z = J''d^2z''d\delta z'' - d.(J''d^2z'')\delta z'' - J'd^2z'd\delta z' + d.(J'd^2z')\delta z' + Sd^2(Jd^2z)\delta z.$$

Digitized by Google

Man addire daher diese verschiedenen Glieder zu denen, die das erste Glied der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts (30) ausmachen; und man erhält die Gleichung für's Gleichgewicht eines unausdehnbaren und elastischen Fadens.

45) Setzt man die Coefficienten der Variationen δx, δy, dz, die sich unter dem Zeichen S befinden $= 0$; so erhält man diese 3 unbestimmten Gleichungen:

$$Xdm - d\frac{\lambda dx}{ds} + d^2(Jd^2x) = 0$$

$$Ydm - d\frac{\lambda dy}{ds} + d^2(Jd^2y) = 0$$

$$Zdm - d\frac{\lambda dz}{ds} + d^2(Jd^2z) = 0$$

woraus man die unbestimmte Größe λ wegschaffen muß, welches sie auf 2 bringt, die dazu hinreichen, die Krümmung des Fadens zu bestimmen.

Die erste Integration giebt

$$\frac{\lambda dx}{ds} - d(Jd^2x) = A + \int Xdm$$

$$\frac{\lambda dy}{ds} - d(Jd^2y) = B + \int Ydm$$

$$\frac{\lambda dz}{ds} - d(Jd^2z) = C + \int Zdm$$

wo A, B, C gewisse beliebige beständige Größen sind; bringt man λ weg; so hat man

$$dxd.(Jd^2y) - dyd.(Jd^2x) = [A + \int Xdm]\,dy - [B + \int Ydm]\,dx$$

$$dxd.(Jd^2z) - dzd.(Jd^2x) = [A + \int Xdm]\,dz - [C + \int Zdm]\,dx$$

dy d.

Digitized by Google

$$dy\,d.(\int d^2z) - dz\,d.(\int d^2y) = [B + \int Ydm]\,dz - [C + \int Zdm]\,dy;$$

wovon die letzte Gleichung in den beiden erstern schon enthalten ist.

Diese Gleichungen sind von neuem integrabel und man erhält dadurch

$$\int (dxd^2y - dyd^2x) = F + \int [A + \int Xdm]\,dy - \int [B + \int Ydm]\,dx$$

$$\int (dxd^2z - dzd^2x) = g + \int [A + \int Xdm]\,dz - \int [C + \int Zdm]\,dx$$

$$\int (dyd^2z - dzd^2y) = H + \int [B + \int Ydm]\,dz - \int [C + \int Zdm]\,dy$$

wo F, G, H, neue beständige Größen sind.

Wir haben aber (44) angenommen

$$I = \frac{E}{ds^2\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}};$$

Das Quadrat des Nenners dieser Größe ist

$$= ds^2[d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2] - ds^2d^2s^2$$

$$= [dx^2 + dy^2 + dz^2][d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2] - [dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z]^2$$

$$= (dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dxd^2z - dzd^2x)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2.$$

Addirt man also die Quadrate der 3 vorhergehenden Gleichungen; so bekommt man

$$E^2 = [F + \int(A + \int Xdm)\,dy - \int(B + \int Ydm)\,dx]^2 + [G + \int(A + \int Xdm)\,dz - \int(C + \int Zdm)\,dx]^2 + [H + \int(B + \int Ydm)\,dz - \int(C + \int Zdm)\,dy]^2$$

Digitized by Google

und dividirt man zwei dieser Gleichungen mit einander; so erhält man folgende, worin die Elasticität E nicht mehr vorkömmt:

$$\frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{G + \int(A + \int X dm)\,dz - \int(C + \int Z dm)\,dz}{F + \int(A + \int X dm)\,dy - \int(B + \int Y dm)\,dx}$$

Diese beiden Gleichungen dienen auf die einfachste Art die elastische Krümmung zu bestimmen, indem man auf die doppelte Krümmung Rücksicht nimmt.

46.) Wir wollen jetzt die Glieder der allgemeinen Gleichung betrachten, die ausserhalb des Zeichens S liegen; sie sind

$$\left[\frac{\lambda''dx''}{ds''} - d.(J''d^2x'')\right]\delta x'' + J''d^2x''d\delta x''$$

$$+\left[\frac{\lambda''dy''}{ds''} - d.(J''d^2y'')\right]\delta y'' + J''d^2y''d\delta y''$$

$$+\left[\frac{\lambda''dz''}{ds''} - d.(J''d^2z'')\right]\delta z'' + J''d^2z''d\delta z''$$

$$-\left[\frac{\lambda'dx'}{ds'} - d.(J'd^2x')\right]\delta x' - J'd^2x'd\delta x'$$

$$-\left[\frac{\lambda'dy'}{ds'} - d.(J'd^2y')\right]\delta y' - J'd^2y'd\delta y'$$

$$-\left[\frac{\lambda'dz'}{ds'} - d.(J'd^2z')\right]\delta z' - J'd^2z'd\delta z';$$

und man muß sie unabhängig von den Werthen von $\delta x''$, $\delta y''$, etc. verschwinden machen.

1) also, wenn der Faden völlig frey ist, müssen die Coefficienten der 12 Größen $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\delta x''$, $d\delta y''$, $d\delta z''$, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $d\delta x'$, $d\delta y'$, $d\delta z'$ jeder ins besonders $= 0$ seyn.

Aus

Aus den ersten Integralgleichungen (45) aber sieht man, daß wenn man die Integrationen beim ersten Punkt des Fadens anfangen läßt, die Coefficienten $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ den Größen A, B, C, gleich sind, und die Coefficien von $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ werden, $A + S\,Xdm$, $B + S\,Ydm$, $C + SZdm$. Im gegenwärtigen Falle muß man also haben $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ und $S\,Xdm = 0$, $S\,Ydm = 0$, $SZdm = 0$. Es muß aber auch seyn $J'''d^2x'' = 0$, $J'''d^2y'' = 0$, $J'''d^2z'' = 0$ und $J'd^2x' = 0$, $J'd^2y' = 0$, $J'd^2z' = 0$ damit die Glieder, worin $dd\delta x''$, $dd\delta y''$, etc. vorkommen, verschwinden; auch ist klar, daß die 2ten Integralgleichungen (45) geben werden:

$F = 0$, $G = 0$, $H = 0$; $S(\int Xdm.\,dy - \int Ydm.\,dx) = 0$,

$S(\int Xdm.\,dz - \int Zdm.\,dx) = 0$, $S(\int Ydm.\,dz - \int Zdm.\,dy) = 0$.

2) Wenn das erste Ende des Fadens fest ist; so ist

$$\delta x' = 0,\ \delta y' = 0,\ \delta z' = 0;$$

folglich werden A, B, C, nicht $= 0$ seyn; aber die Bedingung, daß die Coefficienten von $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z'' = 0$ seyen, giebt

$$A = -S\,Xdm$$
$$B = -S\,Ydm$$
$$C = -S\,Zdm;$$

und wäre die Lage der Tangente gegen dieses Ende auch gegeben; so hätte man ferner $dd\delta x' = 0$, $dd\delta y' = 0$, $dd\delta z' = 0$ folglich F, G, H nicht $= 0$, aber die Bedingung, daß die Coefficienten von $dd\delta x''$, $dd\delta y''$, $dd\delta z'' = 0$ seyen, giebt

$$F = S[(B + \int Ydm)\,dx - (A + \int Xdm)\,dy]$$
$$G = S[(C + \int Zdm)\,dx - (A + \int Xdm)\,dz]$$
$$H = S[(C + \int Zdm)\,dy - (B + \int Ydm)\,dz].$$

Eben diese Schlüsse wird man in Ansehung des Zustandes des 2ten Endes des Fadens machen können.

3) Gäbe

Digitized by Google

3) Gäbe es endlich ausser den Kräften, die auf alle Punkte des Fadens würkten, besondere X', Y', Z', Y'', X'', Z'', die an beiden Enden angebracht wären; so hätte man nur noch zu den obigen Gliedern folgende hinzuzuaddiren

$$X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z' + X''\delta x'' + Y''\delta y'' + Z''\delta z'',$$

und wären noch andere Bedingungen die sich auf den Zustand dieser Enden bezögen, vorhanden; so würde man immer auf dieselbe Art und nach einerley Grundsätzen zu Werke gehen.

47) Wollte man, daß der Faden auf eine bedoppelte Art elastisch sey, nemlich sowohl in Ansehung der Ausdehnbarkeit als in Ansehung der Biegsamkeit; so hätte man in der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts anstatt des Glieds $S\lambda d\delta s$ das Glied $SFd\delta s$ d. h. nur F statt λ, wenn man F die Kraft der Elasticität nennt, die der Ausdehnung des Fadens widersteht (42). Allein in diesem Falle müßte man ausserdem noch ds als veränderlich in der Ausdrückung von de annehmen; folglich müßte man zum Werth von de (44) diese 2 Glieder hinzuaddiren, worin ich Kürze halber setze $\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)} = \sigma$

$$-\frac{\sigma\delta ds}{ds^2}, \quad -\frac{d^2s\,\delta d^2s^*)}{\sigma ds}$$

; zum Werth von SEde eben dieses Artikels würde man also die Glieder

$$-S\frac{E\sigma}{ds^2}\delta ds, \quad -S\frac{Ed^2s}{\sigma ds}, \delta d^2s$$

hinzuaddiren müssen, wovon das letzte nach (4 Abschn. 17.) so ausgedrückt werden kann:

$$-\frac{E''d^2s''}{\sigma''ds''}d\delta s'' + \frac{E'd^2s'}{\sigma'ds'}d\delta s' + Sd.\frac{Ed^2s}{\sigma ds}.\delta ds;$$

Zum Werthe von $SE\delta e$ müssen also noch die Glieder

*) Im franz. Original steht $-\frac{de^2\delta ds}{\sigma ds}$, welches offenbar falsch ist. M.

Digitized by Google

$$-\frac{E''d^2s''}{\sigma''ds''}\,d\delta s'' + \frac{E'd^2s'}{\sigma'ds'}\,d\delta s' + S\left(d.\frac{Ed^2s}{\sigma ds} - \frac{E\sigma}{ds^2}\right)\delta ds$$

hinzuaddirt werden. Das letzte Glied dieses Ausdrucks ist dem Gliede $S F \delta ds$ analog, und ist folglich ähnlicher Reduktionen fähig; in Ansehung der beiden andern hat man nur für $d\delta s$ dessen Werth

$$\frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{ds}$$

zu substituiren, indem man alle Buchstaben mit einem oder zweien Strichen bezeichnet.

Hieraus ist leicht abzunehmen, daß man für die Auflösung des gegenwärtigen Falles eben die Formeln erhalten wird als (31, 32), wenn man nur

$$F + d.\frac{Ed^2s}{\sigma ds} - \frac{E\sigma}{ds^2}$$

an die Stelle des λ setzt, und zu den Coefficienten $d\delta x''$, $d\delta y''$, $d\delta z''$, $d\delta x'$, $d\delta y'$, $d\delta z'$, die Größen $\omega'' dx''$, $\omega'' dy''$, $\omega'' dz''$, $\omega' dx'$, $\omega' dy'$, $\omega' dz'$ addirt, wo $\omega = -\frac{Ed^2s}{\sigma ds^2}$.

48) Wir kommen endlich zu dem Fall, wo der Faden unausdehnbar und unbiegsam ist; man erhält da für die Summe der Momente der Kräfte dieselbe Integral-Formel als in dem Fall (30) nemlich $S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm$; endlich giebt die Bedingung, daß der Faden unausdehnbar sey, wie a. a. O., $\delta ds = 0$ und die der Unbiegsamkeit $de = 0$, weil der Berührungswinkel unveränderlich seyn muß; aber diese beiden Bedingungen sind in dem Falle, wo die krumme Linie von doppelter Krümmung ist, wie wir bald sehen werden, nicht zureichend.

49) Um die vorgegebene Frage auf die einfachste und direkteste Art zu behandlen; so merke ich an, daß alles darauf hinausgeht, daß die verschiedenen Punkte der Krümmung des Fadens unter einander immer

Digitized by Google

einerley Distanzen behalten. Betrachtet man nun mehrere auf einander folgende Punkte, deren Coordinaten seyen

$$x, y, z, x + dx, y + dy, z + dz$$
$$x + 2dx + d^2x, y + 2dy + d^2y, z + 2dz + d^2z; \text{ etc.}$$

so ist klar, daß die Quadrate der Distanzen zwischen dem ersten dieser Punkte und den folgenden durch die Größen $dx^2 + dy^2 + dz^2$, $(2dx + d^2x)^2 + (2dy + d^2y)^2 + (2dz + d^2z)^2$, $(3dx + 3d^2x + d^3x)^2 + (3dy + 3d^2y + d^3y)^2 + (3dz + 3d^2z + d^3z)^2$ etc. ausgedrückt werden müssen.

Wir wollen Kürze halber setzen

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \alpha$$
$$d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 = \beta$$
$$d^3x^2 + d^3y^2 + d^3z^2 = \gamma.$$
etc.

Alsdann wird aus den vorhergehenden Größen werden

$$\alpha, 4\alpha + 2d\alpha + \beta, 9\alpha + 9d\alpha + 9\beta + 3(d^2\alpha - 2\beta) + 3d\beta + \gamma \text{ etc.}$$

Die Variationen dieser Größen müssen daher im ganzen Umfange der Krümmung $= 0$ seyn, wodurch man zu folgenden Gleichungen gelangt:

$$\delta\alpha = 0, 4\delta\alpha + 2\delta d\alpha + \delta\beta = 0,$$
$$9\delta\alpha + 9\delta d\alpha + 3\delta\beta + 3\delta d^2\alpha + 3\delta\beta + \delta\gamma = 0$$
etc.

Aber wenn $\delta\alpha = 0$; so ist auch $d\delta\alpha = \delta d\alpha = 0$;

folglich auch $\delta\beta = 0$ und daher auch

$$d^2\delta\alpha = \delta d^2\alpha = 0, d\delta\beta = \delta d\beta = 0;$$

folglich $\delta\gamma = 0$; u. s. w.

Die

Digitized by Google

Die Bedingungsgleichungen für die Unausdehnbarkeit und Unbiegsamkeit des Fadens sind also:

$\delta\alpha = 0$, $\delta\beta = 0$, $\delta\gamma = 0$, etc. d. h. wenn man differentiirt und δd in $d\delta$ verwandelt:

$$dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z = 0$$

$$d^2x\,d^2\delta x + d^2y\,d^2\delta y + d^2z\,d^2\delta z = 0$$

$$d^3x\,d^3\delta x + d^3y\,d^3\delta y + d^3z\,d^3\delta z = 0$$

etc.

Es ist klar, daß man nur 3 dieser Gleichungen nöthig hat, um die 3 Variationen δx, δy, δz zu bestimmen; woraus man sogleich schliessen kann, daß wenn man den 3 ersten genug gethan hat, alle andere, die man bis ins unendliche finden könnte, vor sich statt finden werden; hievon kann man sich auch durch den Kalkul selbst überzeugen, wie man unten (55) sehen wird.

50) Man erhält also durch unsre Methode diese allgemeine Gleichung des Gleichgewichts:

$$0 = S\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm + S\lambda\,(dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z) + S\mu\,(d^2x\,d^2\delta x + d^2y\,d^2\delta y + d^2z\,d^2\delta z) + S\nu\,(d^3x\,d^3\delta x + d^3y\,d^3\delta y + d^3z\,d^3\delta z)$$

welche durch die angezeigten Transformationen auf folgende Form sich bringen läßt:

$$0 = S\,[X\,dm - d(\lambda\,dx) + d^2(\mu\,d^2x) - d^3(\nu\,d^3x)]\,\delta x + S\,[Y\,dm - d(\lambda\,dy) + d^2(\mu\,d^2y) - d^3(\nu\,d^3y)]\,\delta y + S\,[Z\,dm - d(\lambda\,dz) + d^2(\mu\,d^2z) - d^3(\nu\,d^3z)]\,dz + [\lambda''\delta x'' - d(\mu''d^2x'') + d^2(\nu''d^3x'')]\,\delta x''$$

Digitized by Google

$$+ [\mu'' d^2 x'' - d(\nu'' d^3 x'')] d\delta x'' + \nu'' d^3 x'' d^2 \delta x''$$

$$+ [\lambda'' dy'' - d(\mu'' d^2 y'') + d^2(\nu'' d^3 y'')] \delta y''$$

$$+ [\mu'' d^2 y'' - d(\nu'' d^3 y'')] d\delta y'' + \nu'' \delta^3 y'' d^2 \delta y''$$

$$+ [\lambda'' dz'' - d(\mu'' d^2 z'') + d^2(\nu'' d^3 z'')] \delta z''$$

$$+ [\mu'' d^2 z'' - d(\nu'' d^3 z'')] d\delta z'' + \nu'' d^3 z'' d^2 \delta z''$$

$$- [\lambda' dx' - d(\mu' d^2 x') + d^2(\nu' d^3 x')] \delta x'$$

$$- [\mu' d^2 x' - d(\nu' d^3 x')] d\delta x' - \nu' d^3 x' d^2 \delta x'$$

$$- [\lambda' dy' - d(\mu' d^2 y') + d^2(\nu' d^3 y')] \delta y'$$

$$- [\mu' d^2 y' - d(\nu' d^3 y')] d\delta y' - \nu' d^3 y' d^2 \delta y'$$

$$- [\lambda' dz' - d(\mu' d^2 z') + d^2(\nu' d^3 z')] \delta z'$$

$$- [\mu' d^2 z' - d(\nu' d^3 z')] d\delta z' - \nu' d^3 z' d^2 \delta z'.$$

51) Setzt man die Coefficienten von δx, δy, δz unter dem Zeichen $S = 0$; so bekommt man folgende unbestimmte 3 Gleichungen:

$$X dm - d(\lambda dx) + d^2(\mu d^2 x) - d^3(\nu d^3 x) = 0$$

$$Y dm - d(\lambda dy) + d^2(\mu d^2 y) - d^3(\nu d^3 y) = 0$$

$$Z dm - d(\lambda dz) + d^2(\mu d^2 z) - d^3(\nu d^3 z) = 0$$

welche 3 unbestimmte Größen λ, μ, ν enthalten, und daher nur dazu dienen diese 3 Größen zu bestimmen, so daß keine unbestimmte Gleichung zwischen den verschiedenen Kräften X, Y, Z, die man an alle Punkte der Ruthe sich angebracht denkt, statt findet.

Um die genannten Größen zu bestimmen, ist es klar, daß man die vorhergehenden Gleichungen integriren muß. Dies ist sehr leicht, und man erhält folgende 3:

$$\int X dm$$

Digitized by Google

$$X\,dm - \lambda dx + d(\mu d^2x) - d^2(\nu d^3x) = A$$

$$\int Y\,dm - \lambda dy + d(\mu d^2y) - d^2(\nu d^2y) = B$$

$$\int Z\,dm - \lambda dz + d(\mu d^2z) - d^2(\nu d^3z) = C$$

wo A, B, C gewisse willkührliche beständige Größen sind.

Ich bemerke ferner, daß, wenn man die erstere durch dy oder dz multiplicirt, und davon die 2te oder 3te abzieht, nachdem man sie vorher mit dx multiplicirt hat, um λ aus diesen 3 Gleichungen wegzuschaffen; man erhält:

$$dy\int X\,dm - dx\int Y\,dm + dy\,d.(\mu d^2x) - dx\,d(\mu d^2y) - dy\,d^2.(\nu d^3x) + dx\,d^2.(\nu d^3y) = Ady - Bdx,$$

$$dz\int X\,dm - dx\int Z\,dm + dz\,d.(\mu d^2x) - dx\,d.(\mu d^2z) - dz\,d^2(\nu d^3x) + dx\,d^2(\nu d^3z) = Adz - Cdx$$

$$dz\int Y\,dm - dy\int Z\,dm + dz\,d(\mu d^2y) - dy\,d(\mu d^2z) - dz\,d^2(\nu d^3y) + dy\,d^2(\nu d^3z) = Bdz - Cdy;$$

welche Gleichungen auch integrabel sind, und deren Integralien sind:

$$y\int X\,dm - x\int Y\,dm - \int(Xy - Yx)\,dm + \mu(dy\,d^2x - dx\,d^2y) - dy\,d(\nu d^3x) + dx\,d(\nu d^3y) + \nu(d^2y\,d^3x - d^2x\,d^3y) = Ay - Bx + F$$

$$z\int X\,dm - x\int Z\,dm - \int(Xz - Zx)\,dm + \mu(dz\,d^2x - dx\,dz) - dz\,d(\nu d^3x) + dx\,d(\nu d^3z) + \nu(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) = Az - Cx + G$$

$$z\int Y\,dm - y\int Z\,dm - \int(Yz - Zy)\,dm + \mu(dz\,d^2y - dy\,d^2z) - dz\,d(\nu d^3y) + dy\,d(\nu d^3z) + \nu(d^2z\,d^3y - d^2y\,d^3z) = Bz - Cy + H$$

wo F, G, H neue beliebige beständige Größen sind.

Digitized by Google

Diese 3 letztern Gleichungen dienen die 3 Größen $\mu\ \nu$ und δv zu bestimmen, und die 3 ersten Integral-Gleichungen geben die Werthe von λ, $d\mu$, $d^2\nu$. Man hat also alle unbekannte Größen, die in den Gliedern der allgemeinen Gleichung (50), die ausserhalb des Zeichens S liegen, vorkommen. Man hat zu dieser Absicht nichts weiter nöthig, als in den 6 ersten Gleichungen, die man eben gefunden hat, alle Buchstaben mit einem oder mit 2 Strichen, zu bezeichnen, ausser gewissen willkührlichen beständigen Größen, indem man im ersten Falle die Größen, die das Zeichen $\int$ vor sich haben $= 0$ setzt, welche am ersten Punkt des Fadens anfangen sollen, und indem man im 2ten Falle $\int$ in S bey eben diesen Größen verwandelt, um sie auf den letzten Punkt des Fadens zu beziehen.

52) Dies vorausgesetzt, wollen wir jetzt die Bedingungen sehen, die aus dem Verschwinden der in der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts (50) ausserhalb des Zeichens S befindlichen Glieder entspringen. Setzt man zuerst die Stange völlig frey; so werden die Variationen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $d\delta x'$, $d\delta y'$, $d\delta z'$, $d^2\delta x'$, $d^2\delta y'$, $d^2\delta z'$, und $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\delta x''$, etc. alle unbestimmt seyn, folglich muß man jeden ihrer Coefficienten $= 0$ setzen, und es ist offenbar, daß alsdann die Größen λ', μ', ν', $d\mu'$, $d\nu'$, $d^2\nu'$ sowie auch λ'', μ'', ν'', $d\mu''$, $d\nu''$, $d^2\nu''$, auch alle $= 0$ seyn müssen.

Die 3 ersten Integralgleichungen (51) geben also diese Bedingungen:

$$0 = A,\quad 0 = B,\quad 0 = C,\quad SXdm = A,\quad SYdm = {}^{*})\ B,$$
$$SZdm = C$$

und die 3 letzten geben diese

$$0 = Ay' - Bx' + F$$
$$0 = Az' - Cx' + G$$
$$0 = Bz' - Cy' + H$$
$$y''SXdm - x''SYdm - S(Xy - Yx)\,dm =$$
$$Ay'' - Bx'' + F,$$

Z''

*) Im franz. steht $SYdm$, $SZdm = C$. M.

Digitized by Google

$$z''SXdm - x''SZdm - S(Xz - Zx)\,dm = Az'' - Cx'' + G.$$

$$z''SYdm - y''SZdm - S(Yz - Zy)\,dm = Bz'' - Cy'' + H.$$

Folglich $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$,
$F = 0$, $G = 0$, $H = 0$,

daher auch

$$SXdm = 0,\quad SYdm = 0,\quad SZdm = 0,$$

$$S(Xy - Yx)\,dm = 0,$$

$$S(Xz - Zx)\,dm = 0,$$

$$S(Yz - Zy)\,dm = 0.$$

Diese 6 Bedingungen sind folglich allein zum Gleichgewicht einer unbiegsamen Stange nöthig, wenn kein fester Punkt vorhanden ist; und dies stimmt mit dem sehr gut überein, was wir oben (25) gesagt haben, man hätte es auch gleich aus der im 3ten Abschn. gegebenen Theorie, so wie wir auch a. a. O. bemerkt haben, herleiten können.

53) Wir wollen jetzt annehmen, es gäbe in der Stange ein fester Punkt, und es sey dieser Punkt das erste Ende derselben; in diesem Falle hat man $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, $\delta z' = 0$; so daß die Glieder, worin diese Variationen vorkommen, vor sich verschwinden. Man hat daher nur die Coefficienten von $d\delta x'$, $d\delta y'$, $d\delta z'$, $d^2\delta x'$, $d^2\delta y'$, $d^2\delta z'$ so wie die Coefficienten von $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\delta x''$, $d\delta y''$, etc. $= 0$ zu setzen.

Es ist aber leicht einzusehen, daß man in dieser Hinsicht nur $\mu' = 0$, $\nu' = 0$, $d\nu' = 0$ und hierauf auch $\lambda'' = 0$, $\mu'' = 0$, $\nu'' = 0$, $d\mu'' = 0$, $d\nu'' = 0$, $d^2\nu'' = 0$ wie im vorhergehenden Falle zu setzen hat;

Digitized by Google

hat; und man wird die nämlichen Bedingungen als im vorhergehenden Artikel finden, auſſer daß hier A, B, C nicht = o ſind.

Man hat daher $A = SXdm$, $B = SYdm$, $C = SZdm$,

und $F = Bx' - Ay'$, $G = Cx' - Az'$, $H = Cy' - Bz'$

und die 3 letztern Gleichungen verwandlen ſich in folgende:

$$-S(Xy - Yx)\,dm = Bx' - Ay'$$

$$-S(Xz - Zx)\,dm = Cx' - Az',$$

$$-S(Yz - Zy)\,dm = Cy' - Bz';$$

d. h.

$$S(Xy - Yx)\,dm + x'SYdm - y'SXdm = o$$

$$S(Xz - Zx)\,dm + x'SZdm - z'SXdm = o$$

$$S(Yz - Zy)\,dm + y'SZdm - z'SYdm = o$$

oder

$$S(X(y - y') - Y(x - x'))\,dm = o$$

$$S(X(z - z') - Z(x - x'))\,dm = o$$

$$S(Y(z - z') - Z(y - y'))\,dm = o.$$

Dies ſind die einzigen zum Gleichgewicht nöthigen Bedingungen und es iſt klar, daß ſie mit denen übereinkommen, die man (24) gefunden hat.

54) Wäre die Ruthe mit ihrem erſten Ende feſt, ſo daß nicht nur der erſte Punkt der krummen Linie, ſondern auch die Tangente an dieſem erſten Punkte feſt ſey, ſo erhielte man $\delta x' = o$, $\delta y' = o$, $\delta z' = o$, und $\delta dx' = d\delta y' = o$, $\delta dy' = d\delta y' = o$, $\delta dz' = d\delta z' = o$; folglich werden alle Glieder, worin dieſe Gröſſen vorkommen, von ſich ſelbſt verſchwinden, und es iſt nichts weiter übrig als daß auch die Glieder, worin $d^2\delta x'$, $d^2\delta y'$, $d^2\delta z'$ und $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\delta x''$, $d\delta y''$, etc. vorkommen, verſchwinden.

In

Digitized by Google

In diesem Falle hat man also diese Bedingungen

$\mu' = 0$, $\lambda'' = 0$, $\mu'' = 0$, $\nu' = 0$, $d\mu'' = 0$, $d\nu'' = 0$, $d^2\nu'' = 0$.

Folglich wird $A = SXdm$, $B = SYdm$, $C = SZdm$.

Reducirt man endlich die 3 letztern Gleichungen (51) auf den letzten Punkt der Stange; so hat man

$$F = S(Yx - Xy)\,dm$$
$$G = S(Zx - Xz)\,dm$$
$$H = S(Zy - Yz)\,dm$$

und wenn man eben diese Gleichungen auf den ersten Punkt anwendet; so hat man:

$$\mu'(dy'\,ddx' - dx'\,ddy') - d\nu'(dy'\,d^1x' - dx'd^1y') = Ay' - Bx' + F$$

$$\mu'(dz'\,ddx' - dx'\,ddz') - d\nu'(dz'\,d^1x' - dx'd^1z') = Az' - Cx' + G$$

$$\mu'(dz'\,ddy' - dy'\,ddz') - d\nu'(dz'\,d^1y' - dy'\,d^1z') = Bz' - Cy' + H.$$

Schafft man hieraus μ' und $d\nu'$ weg; so erhält man diese Bedingung für's Gleichgewicht:

$$A(y'dz' - z'dy') + B(z'dx' - x'dz') + C(x'dy' - y'dx') + Fdz' - Gdy' + Hdx' = 0.$$

Einen ähnlichen Fall sehe man (59).

Auf eben die Art könnte man alle die andern Fälle auflösen und besonders den eines Körpers von einer beliebigen Figur. Doch diese letztere Aufgabe verdient sorgfältiger und auf eine noch einfachere Art als die vorhergehende ist, betrachtet zu werden.

Digitized by Google

§. IV.

Vom Gleichgewicht eines festen Körpers von einer merklichen Größe und einer gewissen Figur, wovon alle Punkte durch gewisse Kräfte gezogen werden.

55) Weil die beygefügte Bedingung der Solidität des Körpers darin besteht, daß alle seine Punkte beständig unter einander einerley Lage und Distanz behalten; so hat man zwischen den Variationen δx, δy, δz, dieselben Bedingungsgleichungen als (49); vermittelst derselben kann man also die Werthe dieser Variationen sogleich bestimmen. Ich bemerke daher, daß, indem man zu den Differentialgrößen der 2ten Ordnung übergeht, man allezeit eine der Differentialgrößen der 1ten Ordnung als beständig annehmen kann; man nehme daher $dx = \text{Const.}$ und folglich

$$d^2x = 0, \quad d^3x = 0 \text{ etc.}$$

Hiedurch wird die 2te und 3te Gleichung (49)

$$d^2y\,d^2\delta y + d^2z\,d^2\delta z = 0$$

$$d^1y\,d^1\delta y + d^1z\,d^1\delta z = 0$$

Die erstere giebt sogleich

$$d^2\delta y = -\frac{d^2z}{d^2y}\,d^2\delta z \text{ und wenn man differentiirt}$$

$$d^1\delta y = -\frac{d^2z}{d^2y}\,d^1\delta z - \left(\frac{d^1z}{d^2y} - \frac{d^2z\,d^1y}{d^2y^2}\right)d^2\delta z;$$

Dieser Werth in der 2ten Gleichung substituirt giebt

$$d^1z\,d^1\delta z - \frac{d^1y\,d^2z}{d^2y}\,d^1\delta z - \left(\frac{d^1z}{d^2y} - \frac{d^2z\,d^1y}{d^2y^2}\right)$$

$$d^1y\,d^2\delta z = 0$$

über

Digitized by Google

aber

$$\left(d^1z - \frac{d^1y\,d^2z}{d^2y}\right)d^1\delta z - \left(d^1z - \frac{d^2z\,d^1y}{d^2y}\right)\frac{d^1y}{d^2y}\,d^2\delta z \qquad (M.)$$

dieser Ausdruck aber kann durch $d^1z - \frac{d^1y\,d^2z}{d^2y}$ dividirt werden, und man bekommt nach der Division

$$d^1\delta z - \frac{d^1y}{d^2y}\,d^2\delta z = 0$$

woraus man durch die Integration zieht

$d^2\delta z = \delta L\,d^2y$, wo δL eine gewisse beständige Größe ist.

Hat man $d^2\delta z$; so findet man $d^2\delta y = -\delta L\,d^2z$; folglich wenn man von neuen integrirt und die beständigen Größen $-\delta M\,dx$, $+\delta N\,dx$ hinzuaddirt:

$$d\delta z = \delta L\,dy - \delta M\,dx$$
$$d\delta y = -\delta L\,dz + \delta N\,dx;$$

und diese Werthe in die erste Bedingungsgleichung substituirt nämlich in

$$dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z = 0$$

giebt $d\delta x = -\delta N\,dy + \delta M\,dz$.

Endlich erhält man durch eine 3te Integration und durch die Addition neuer beständiger Größen

$\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$:

$$\delta x = \delta\lambda - y\delta N + z\delta M$$
$$\delta y = \delta\mu + x\delta N - z\delta L$$
$$\delta z = \delta\nu - x\delta M + y\delta L.$$

Es ist leicht, sich davon zu überzeugen, daß diese Ausdrücke nicht nur den 3 ersten Bedingungsgleichungen (49) genug thun, sondern auch

Digitized by Google

allen andern, die man bis ins Unendliche finden könnte, und die alle in dieser allgemeinen Gleichung enthalten sind:

$$d^n x\, d^n \delta x + d^n y\, d^n \delta y + d^n z\, d^n \delta z = 0.$$

Dies sind folglich die Werthe von δx, δy, δz für ein gewisses System von Punkten, die unter einander so verbunden sind, daß sie immer einerley Distanzen von einander behalten; diese Werthe dienen daher nicht nur für den Fall einer gewissen beweglichen, und in ihrer Figur unveränderlichen krummen Linie, sondern auch für den Fall eines festen Körpers von irgend einer Figur.

56) Da also schon die vorhergehenden Werthe von δx, δy, δz den Bedingungsgleichungen der Aufgabe genug thun; so ist klar, daß man sie nur in der Formel

$$S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dm$$

zu substituiren und zu machen hat, daß sie $= 0$ unabhängig von den Größen $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, δL, δM, δN werde, welches die einzigen unbestimmten Größen sind, die noch übrig sind.

Da nun aber diese Größen für alle Punkte des Körpers einerley sind; so muß man sie bey der Substitution ausserhalb des Zeichens S bringen; hiedurch erhält man diese allgemeine Gleichung des Gleichgewichts eines Körpers von einer gewissen Figur:

$$\delta\lambda SX\,dm + \delta\mu SY\,dm + \delta\nu SZ\,dm$$
$$+ \delta N S(Yx - Xy)\,dm + \delta M S(Xz - Zx)\,dm$$
$$+ \delta L S(Zy - Yz)\,dm = 0$$

woraus man die besondern Gleichungen für's Gleichgewicht erhält, indem man auf die Bedingungen der Aufgabe Rücksicht nimmt.

57) Setzen wir nun zuerst, der Körper sey völlig frey, so sind die 6 Variationen $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, δL, δM, δN, alle unbestimmt, und man muß die Größen $= 0$ setzen, womit sie multiplicirt sind, hiedurch gelangt man zu folgenden schon bekannten Gleichungen:

$$SX\,dm =$$

Digitized by Google

$$S X dm = 0, \; S Y dm = 0, \; S Z dm = 0,$$
$$S (Yx - Xy)\, dm = 0$$
$$S (Xz - Zx)\, dm = 0$$
$$S (Zy - Yz)\, dm = 0.$$

58) Gäbe es zweitens bey dem Körper einen festen Punkt, um den er nur die Freyheit hätte sich nach allen Richtungen drehen zu können, und man nennte a, b, c die Werthe der Coordinaten x, y, z für diesen Punkt; so müßte man haben

$$\delta a = 0, \; \delta b = 0, \; \delta c = 0;$$

folglich
$$\delta\lambda - b\delta N + c\delta M = 0,$$
$$\delta\mu + a\delta N - c\delta L = 0,$$
$$\delta\nu - a\delta M - b\delta L = 0;$$

woraus man zieht

$$\delta\lambda = b\delta N - c\delta M$$
$$\delta\mu = c\delta L - a\delta N$$
$$\delta\nu = a\delta M - b\delta L.$$

Man substituire diese Werthe in der allgemeinen Gleichung (57) und bringe unter das Zeichen S die Größen a, b, c, die in Ansehung der verschiedenen Punkte des Körpers beständig sind, man erhält dadurch folgende veränderte Gleichung

$$\delta N S (Y (x - a) - X (y - b))\, dm +$$
$$\delta M S (X (z - c) - Z (x - a))\, dm +$$
$$\delta L S (Z (y - b) - Y (z - c))\, dm = 0$$

woraus nur folgende 3 Gleichungen entstehen

$$S (Y (x - a) - X (y - b))\, dm = 0$$
$$S (X (z - c) - Z (x - a))\, dm = 0$$
$$S (Z (y - b) - Y (z - c))\, dm = 0.$$

Digitized by Google

59) Giebt es 2tens bey dem Körper 2 feste Punkte und sind f, g, h die Werthe von x, y, z, für den 2ten dieser Punkte; so hat man noch

$$\delta\lambda = g\delta N - h\delta M$$
$$\delta\mu = h\delta L - f\delta N$$
$$\delta\nu = f\delta M - g\delta L$$

vergleicht man daher diese Werthe von $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, mit denen (58); so hat man

$$(g - b)\,\delta N - (h - c)\,\delta M = 0$$
$$(f - a)\,\delta N - (h - c)\,\delta L = 0$$
$$(f - a)\,\delta M - (g - b)\,\delta L = 0.$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen geben

$$\delta L = \frac{f - a}{h - c}\,\delta N,\quad \delta M = \frac{g - b}{h - c}\,\delta N$$

und da diese Werthe auch der 3ten Gleichung genug thun; so folgt, daß die Variation δN unbestimmt bleibt.

Verrichtet man diese Substitutionen in der veränderten Gleichung (58); so erhält man

$$\delta N\,[(h - c)\,S\,(Y\,(x - a) - X\,(y - b))\,dm +$$
$$(g - b)\,S\,(X\,(z - c) - Z\,(x - a))\,dm +$$
$$(f - a)\,S\,(Z\,(y - b) - Y\,(z - c))\,dm] = 0.$$

Die Bedingungen des Gleichgewichts werden also in dieser einzigen Gleichung enthalten seyn:

$$(h - c)\,S\,(Y\,(x - a) - X\,(y - b))\,dm +$$
$$(g - b)\,S\,(X\,(z - c) - Z\,(x - a))\,dm +$$
$$(f - a)\,S\,(Z\,(y - b) - Y\,(z - c))\,dm = 0.$$

60)

Digitized by Google

60) Ueberhaupt wären die beiden Punkte des Körpers, die wir eben als fest angenommen haben, es nicht, sondern auf gegebenen Linien oder Flächen beweglich, oder selbst auf eine gewisse Art mit einander verbunden; so hätte man alsdann eine oder mehrere Differentialgleichungen zwischen den Variationen der Coordinaten a, b, c, f, g, h, die zu diesen Punkten gehören, und setzt man an die Stelle dieser Variationen ihre Werthe in $\partial\lambda$, $\partial\mu$, $\partial\nu$, ∂L, ∂M, ∂N, nach den allgemeinen Formeln (55); so hat man eben so viele Gleichungen zwischen diesen letztern Variationen, durch deren Hülfe man einige dieser Variationen durch die andern bestimmt. Substituirt man hernach diese Werthe in der allgemeinen Gleichung, und setzt jeden der Coefficienten der übrigen Variationen $= 0$; so erhält man alle zum Gleichgewicht nöthige Gleichungen.

Man geht hier, wie man sieht, mit dem Calkul immer einerley Weg, und dies muß man für einen der Hauptvorzüge der gegenwärtigen Methode erkennen.

61) Uebrigens zeigen die (55) gefundenen Ausdrücke der Variationen ∂x, ∂y, ∂z, daß dieselben nichts als die Resultate der fortrückenden und drehenden Bewegungen sind, die wir im allgemeinen im 3ten Abschn. betrachtet haben.

In der That sieht man, daß die Glieder $\partial\lambda$, $\partial\mu$, $\partial\nu$, die allen Punkten des Körpers gemein sind, die kleinen Räume die der Körper nach den Richtungen der Coordinaten x, y, z, durch eine gewisse fortrückende Bewegung durchlaufen hat, vorstellen; auch erkennt man aus den Formeln (3 Abschn. 3.), daß die Glieder

$$z\partial M - y\partial N,\quad x\partial N - z\partial L,\quad y\partial L - x\partial M$$

die kleinen Räume ausdrücken, die durch jeden Punkt des Körpers nach eben diesen Richtungen durch 3 drehende Bewegungen ∂L, ∂M, ∂N um die 3 Achsen der x, y, z durchlaufen worden sind, wo diese Größen ∂L, ∂M, ∂N den Größen $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, a. a. O. entsprechen. Man hätte also die gegenwärtigen Ausdrücke sogleich aus der bloßen Betrachtung dieser Bewegungen herleiten können, welches zwar einfacher jedoch weniger direkt gewesen seyn würde. Die vorhergehende Analyse führt ganz natürlich auf diese Aus-

Digitized by Google

Ausdrückungen, und beweißt dadurch auf eine allgemeine und direkte Art, daß, wenn die verschiedenen Punkte eines Systems ihre respektive Lage immer beibehalten, das System nur in jedem Augenblicke fortrückende Bewegungen im Raume und drehende Bewegungen um die 3 auf einander senkrechten Achsen haben kann.

Sechster Abschnitt.

Von den Grundlehren der Hydrostatik.

Ohnerachtet wir die innere Beschaffenheit der flüssigen Körper nicht kennen; so können wir dennoch nicht daran zweifeln, daß die Theile, woraus sie bestehen, materiel sind, und daß aus dieser Ursache die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts ihnen eben so zukommen, wie den festen Körpern. In der That besteht auch die vornehmste Eigenschaft der flüssigen Körper, die allein sie von den festen unterscheidet, darin, daß alle ihre Theile dem geringsten Drucke weichen, und mit der größten Leichtigkeit sich unter einander bewegen können, die Verbindung und gegenseitige Würkung dieser Theile mag übrigens beschaffen seyn, wie sie will. Da nun diese Eigenschaft leicht sich durch den Kalkul ausdrücken läßt; so folgt, daß die Gesetze des Gleichgewichts der flüssigen Cörper keine besondere Theorie erfodern, sondern daß sie nur ein besonderer Fall der allgemeinen Theorie der Statik seyn müssen. Unter diesem Gesichtspunkt wollen auch wir sie betrachten; aber wir glauben damit den Anfang machen zu müssen, daß wir kurz die verschiedenen Grundsätze hererzählen, die bis jetzt in diesem Theile der Statik, den man gemeiniglich Hydrostatik nennt, angewandt worden sind.

Archimedes ist der älteste Schriftsteller, der uns einige Grundsätze über das Gleichgewicht der flüssigen Massen hinterlassen hat. Sein

Traktat

Digitized by Google

Traktat *de insidentibus humido* ist nie griechisch gefunden worden, man hatte auch nur eine sehr fehlerhafte lateinische Uebersetzung davon bis Commendin es unternahm, ihn wieder herzustellen und durch Noten zu erläutern; er erschien durch die Sorgfalt dieses geschickten Commentators im Jahr 1565. unter dem Titel *de Iis quae vehuntur in aqua*. Dies Werk, das man als ein der kostbarsten Reste des Alterthums ansehen kann, ist in 2 Bücher abgetheilt. Im ersten setzt Archimedes folgende 2 Grundsätze fest, die er als Erfahrungssätze annimmt, und worauf er seine ganze Theorie baut: 1) daß die Natur der flüssigen Körper so beschaffen ist, daß die weniger gedrückten Theile durch die mehr gedrückten weggetrieben werden, und daß jeder Theil jederzeit durch das Gewicht der Säule gedrückt wird, die ihm vertikal entspricht. 2) daß alles, was durch eine flüssige Masse in die Höhe getrieben wird, nach einer senkrechten Linie in die Höhe getrieben wird, die durch dessen Schwerpunkt geht.

Aus dem ersten Satze schließt Archimedes sogleich, daß die Oberfläche einer flüssigen Masse, deren Theile alle gegen den Mittelpunkt der Erde schwer angenommen werden, eine sphärische Gestalt haben müsse, wenn die flüssige Masse im Gleichgewicht seyn soll. Hierauf zeigt er, daß ein Körper, der eben so schwer als ein gleiches Volumen der flüssigen Masse ist, darin völlig untersinken muß, denn wenn man 2 gleiche Pyramiden der flüssigen Masse betrachtet, die um das Centrum der Erde im Gleichgewicht seyen; so würde diejenige, worin der Körper nur zum Theil eingesunken wäre, einen geringern Druck auf das Centrum der Erde oder überhaupt auf eine gewisse sphärische Oberfläche, die man sich um dies Centrum denkt, ausüben, als die andere. Auf gleiche Art beweißt er, daß Körper die leichter als ein gleiches Volumen der flüssigen Masse sind, nur soweit niedersinken können, bis daß der niedergesunkene Theil die Stelle eines Volumens der flüssigen Masse einnimmt, das eben so schwer ist, als der ganze Körper; hieraus leitet er denn diese beiden hydrostatischen Theoreme her, daß Körper, die leichter sind als gleiche Volumina der flüssigen Masse, wenn sie darin eingetaucht werden, mit einer Kraft von unten in die Höhe getrieben werden, die dem Ueberschuß des Gewichts der flüssigen Masse, die aus der Stelle getrieben ist, über das Gewicht des eingetauchten Körpers gleich ist, und daß die schwerern Körper darinn

Digitized by Google

einen Theil ihres Gewichts verlieren, der dem Gewichte der aus der Stelle getriebenen flüssigen Masse gleich ist.

Archimedes bedient sich hierauf seines 2ten Grundsatzes, um die Gesetze des Gleichgewichts der Körper, die auf einer flüssigen Masse schwimmen, festzusetzen; er erweißt, daß jeder Kugelschnitt, der leichter ist als ein gleiches Volumen der flüssigen Masse, wenn er darum eingetaucht wird, nothwendig eine solche Lage annehmen muß, daß die Basis horizontal sey; sein Beweis besteht darin, daß er zeigt, daß wenn die Basis geneigt wäre, das ganze Gewicht des Körpers, das man im Schwerpunkt sich vereinigt vorstellen kann, und die Kraft, vermöge der die flüssige Masse alles vertikal in die Höhe zu treiben strebt, und die man sich auch im Schwerpunkt gleichsam concentrirt denken kann, allezeit so lange dem Körper eine drehende Bewegung mittheilen würden, bis daß seine Basis horizontal geworden wäre.

Dies ist der Inhalt des ersten Buchs. Im 2ten giebt Archimedes nach eben diesen Grundsätzen die Gesetze des Gleichgewichts verschiedener durch die Umwälzung der Kegelschnitte gebildeter Körper an, wenn sie in flüssige Massen eingetaucht werden, die schwerer als diese Körper selbst sind; er betrachtet den Fall, wo diese Conoiden darin geneigt seyn können, diejenigen, wo sie sich aufrecht erhalten müssen, und diejenigen, wo sie sich umkehren oder sich wieder aufrichten müssen. Dies Buch ist eins der schönsten Monumente des Genies des Archimedes, und enthält eine Theorie der schwimmenden Körper, wozu die Neuern nur weniges hinzugefügt haben.

So leicht es auch nach dem was Archimedes gezeigt hatte, war, den Druck einer flüssigen Masse auf den Boden oder die Seitenwände des Gefäßes, worin sie verschlossen ist, zu bestimmen; so ist doch Stevin der erste, der diese Untersuchung unternahm, und der das hydrostatische Paradox erfand, daß eine flüssige Masse einen weit größeren Druck ausüben kann, als ihr eigen Gewicht ist. Diese hydrostatische Theorie Stevin's findet sich im 3ten *Tom.* der *Hypomnemata Mathematica*, die Snellius aus dem holländischen übersetzt und 1608 zu Leyden herausgegeben hat. Nachdem er erwiesen hat, daß ein fester Körper von einer gewissen Figur

und

Digitized by Google

und von derselben Schwere als das Wasser, darin in jeder Lage bleiben kann, weil er immer einerley Platz einnimmt, und so viel wiegt als wenn es Wasser wäre; so stellt er sich ein rechtwinklichtes mit Wasser angefülltes Gefäß vor, und zeigt leicht, daß sein Boden das ganze Gewicht des Wassers tragen muß, welches das Gefäß erfüllet. Er nimmt hierauf an, daß man in dies Gefäß einen festen Körper von irgend einer Figur und von einerley Schwere mit dem Wasser tauche; alsdann ist klar, daß der Druck derselbe bleiben wird; so daß, wenn man dem eingetauchten festen Körper eine solche Figur gäbe, daß er nur eine Röhre der flüssigen Masse von irgend einer Figur bleibe, der Druck dieser Röhre auf die Grundfläche noch immer derselbe, und folglich dem Gewichte einer vertikalen Säule von Wasser von eben der Grundfläche gleich seyn wird. Nun bemerkt Stevin, daß wenn man diesen festen Körper fest an einer Stelle sich vorstellt, keine Veränderung in der Würkung des Wassers auf den Boden des Gefäßes erfolgen kann; der Druck auf diesen Boden wird also immer dem Gewichte eben dieser Wassersäule gleich seyn, die Figur des Gefäßes mag auch auf irgend eine Art beschaffen seyn. Stevin geht hierauf weiter und bestimmt den Druck des Wassers auf senkrechte oder geneigte Wände, er theilt ihre Oberfläche durch horizontale Linien in mehrere kleine Theile, und zeigt, daß jeder Theil mehr gedrückt wird, als wenn er horizontal und in der Höhe des obern Randes wäre, und daß er zugleich weniger gedrückt wird, als wenn er horizontal in der Höhe des untern Randes wäre. Er verringert nun die Breite der Theile immer mehr, vermehrt aber zugleich ihre Zahl bis ins Unendliche, und beweißt durch die Methode der Grenzen, daß der Druck auf eine geneigte ebene Seitenwand dem Gewicht einer Säule gleich ist, davon diese Seitenwand die Grundfläche und deren Höhe der halben Höhe des Gefäßes gleich ist. Endlich bestimmt er den Druck auf einen gewissen Theil einer ebenen geneigten Seitenwand, und findet, daß er dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, die entsteht, wenn man an jedem Punkte dieses Theiles gerade Linien senkrecht anbringt, die der Tiefe dieses Punkts unter dem Wasser gleich sind. Nachdem dieses Theorem für gewisse Ebenen, wie auch ihre Lage beschaffen seyn mag, erwiesen ist; so ist es leicht, es auf gewisse krumme Flächen zu erstrecken und daraus den Schluß zu ziehen, daß der durch ein schweres Fluidum gegen irgend eine Fläche ausgeübte Druck das

Digitized by Google

Gewicht einer Säule von eben diesem Fluido zum Maaße hat, welche dieselbe Fläche zur Basis hat, die, wenn es nöthig ist, in eine ebene Fläche verwandelt werden könne, und deren Höhen, die den verschiedenen Punkten der Grundfläche entsprechen, den Distanzen der correspondirenden Punkte der Oberfläche von der horizontalen Linie des Fluidums gleich sind, oder, welches auf eins hinauskommt, dieser Druck wird von dem Gewichte einer Säule gemessen werden, die zur Grundfläche die gedrückte Fläche und zur Höhe die vertikale Distanz des Schwerpunkts eben dieser Fläche von der oberen Fläche des Fluidum's hat.

Die vorhergehenden Theorien des Gleichgewichts und des Drucks der flüssigen Masse hängen, wie man sieht, nicht im geringsten von den allgemeinen Principien der Statik ab; sie gründen sich vielmehr völlig auf Erfahrungssätze, die den flüssigen Massen allein eigen sind. Diese Methode die Gesetze der Hydrostatik zu erweisen, indem man aus einer auf die Erfahrung sich gründenden Erkenntniß einiger dieser Gesetze die aller andern herleitet, ist von den meisten neuern Schriftstellern angenommen worden, und hat aus der Hydrostatik eine von der Statik ganz verschiedene und unabhängige Wissenschaft gemacht.

Es war jedoch von Wichtigkeit diese beiden Wissenschaften zu verbinden, und beide von einem und eben demselben Princip abhängen zu lassen. Unter den verschiedenen Principien, die der Statik zur Basis dienen können, und wovon wir eine kurze Erzählung im ersten Abschnitt gegeben haben, sieht man, ist keins als das Princip des Bestrebens nach Geschwindigkeit, das sich eben so natürlich beim Gleichgewicht flüssiger Körper anwenden läßt. Auch hat sich Galiläus, der Urheber dieses Princips, desselben auf gleiche Weise bedient die vornehmsten Lehrsätze sowohl der Statik als Hydrostatik zu erweisen. In seiner Unterredung *intorno alle cose che stanno in su l' aqua o che in quelle si muovono* leitet er sogleich aus diesem Princip das Gleichgewicht des Wassers in einem Heber her, indem er zeigt, daß wenn man die flüssige Masse von einerley Höhe in den beiden Armen annimmt, sie weder in dem einen fallen, noch in dem andern steigen kann, wenn nicht die Momente in dem Theil des Fluidums der fällt, und in demjenigen, der steigt, gleich sind. Auf eine ähnliche Art

erweißt

erweißt Gallilaus das Gleichgewicht der flüssigen Massen mit den festen Körpern, die darin eingetaucht werden; und ohnerachtet seine Beweise die gehörige Strenge, die man hier erwarten konnte, nicht zu haben scheinen; so ist es doch leicht sie hier anzubringen, wenn man nur das genannte Princip in seiner ganzen Allgemeinheit betrachtet, wie dies nachher auch der Abt Grandi in seinen Noten zu eben diesem Traktat des Gallilaus gethan hat. Des Cartes und Pascal wendeten eben dies Princip des Bestrebens nach Geschwindigkeit ebenfalls in der Hydrostatik an, besonders bediente sich letzterer desselben sehr in seinem Traktat *de l'equilibre des liqueurs*, und bewies dadurch die vornehmste Eigenschaft der flüssigen Körper; nehmlich daß irgend ein an einem Punkte ihrer Oberfläche angebrachter Druck sich gleichförmig nach allen andern Punkten verbreitet *).

Sosehr dieses Princip aber vor andern den Vorzug hat, daß es einfach und doch allgemein ist sowohl für das Gleichgewicht der flüssigen Körper als für das der festen Körper, so ist es dem ohngeachtet doch von den meisten neuern Schriftstellern, die über die Hydrostatik geschrieben haben besonders aber von denjenigen hindangesetzt worden, welche es unternahmen die Grenzen dieser Wissenschaft zu erweitern, und die Gesetze des Gleichgewichts heterogener Flüssigkeiten zu suchen, deren Theile insgesammt durch gewisse Kräfte getrieben werden; diese Untersuchung ist besonders deswegen sehr wichtig, weil sie mit dem berühmten Problem der Figur der Erde in Verbindung steht.

*) Es ist dies die nämliche Eigenschaft die nachher unter andern besonders Hr. Euler zur Grundlage für die Theorie flüssiger Körper angenommen hat. *Quaelibet pressio*, sagt er im 13. Bande der neuen Petersburgischen Commentarien, *fluidis applicata per totam eorum massam ita diffunditur, ut omnes eorum partes eamdem sentiant pressionem, quatenus scilicet fluidum in aequilibrio persistit.* Eben diese Eigenschaft nahm er auch in vielen andern Orten so wie auch in mehrern Abhandlungen in den Schriften der Petersburger und Berliner Akademie zur Grundlage an. Eben dies that auch d'Alembert in s. *traité d'équilibre et du mouvement des fluides.* Uebrigens sind dergleichen Eigenschaften an sich nicht geschickt genug, unmittelbar auf eine Gleichung zu führen, allen sie sind vorzüglich geschickt dem Calkul zur Grundlage zu dienen, indem sie die damit versehenen Körper vorzüglich bezeichnen. M.

Digitized by Google

[illegible] bey dieser Untersuchung zum Grundsatz des Gleichgewichts an, daß die Schwere auf die Oberfläche senkrecht sey. Newton ging von dem Grundsatz der Gleichheit der Gewichte centraler Säulen aus. Bruguer merkte hierauf an, daß oft diese beiden Grundsätze nicht einerlei Resultat gäben, und schloß daraus, daß, wenn das Gleichgewicht einer flüssigen Masse statt finden sollte, beide Grundsätze zugleich statt haben, und sich vereinigen müßten der Oberfläche des Fluidum's einerley Gestalt zu geben. Aber der verstorbene Hr. Clairaut bewies, daß es Fälle geben könne, wo auch diese Uebereinstimmung statt finde, und wo dennoch kein Gleichgewicht vorhanden wäre. Maclaurin machte Newtons Princip noch allgemeiner, indem er festsetzte, daß bey einer flüssigen im Gleichgewicht sich befindenden Masse jeder Theil durch alle geradlinigte Säulen des Fluidums gleich gedrückt werde, welche auf diesen Theil sich stützen und an der Oberfläche sich endigen. Herr Clairaut machte diesen Grundsatz noch allgemeiner, indem er zeigte, daß das Gleichgewicht einer flüssigen Masse es erfodere, daß die Kräfte aller Theile des Fluidum's, die in einer gewissen Röhre eingeschlossen sind, bey der Oberfläche sich endigen oder in sich selbst zurückkehren und sich so gegenseitig aufheben. Endlich leitete er auch zuerst aus diesem Grundsatze die wahren Fundamentalgesetze des Gleichgewichts einer flüssigen Masse her, deren Theile durch gewisse Kräfte getrieben werden, und fand die Gleichungen in partiellen Differentialien, wodurch man diese Gesetze ausdrücken kann. Diese Entdeckung gab der Hydrostatik ein ganz anderes Ansehen, und schuf sie gleichsam zu einer neuen Wissenschaft um.

Der Grundsatz des Hrn. Clairaut ist nur eine nothwendige Folge von dem Grundsatz der Gleichheit des Drucks nach allen Seiten. Auch hat Hr. D'Alembert sogleich aus diesem Grundsatze die nämlichen Differentialgleichungen hergeleitet, die Hr. Clairaut durch den seinigen gefunden hatte. In der That muß man auch gestehen, daß dieser Grundsatz die einfachste und allgemeinste Eigenschaft enthält, die die Erfahrung beim Gleichgewicht der flüssigen Körper hat wahrnehmen können. Aber ist die Erkenntniß dieser Eigenschaft bey der Untersuchung der Gesetze des Gleichgewichts flüssiger Körper wohl nothwendig? Kann man diese Gesetze wohl nicht aus der Natur der flüssigen Körper selbst herleiten, indem

Digitized by Google

indem man sie als eine Menge von Theilchen betrachtet, die sehr wenig unter einander verbunden sind, gar nicht von einander abhängen, und nach allen Richtungen vollkommen beweglich sind? Dies will ich in den folgenden Abschnitten zu thun suchen, und nur das allgemeine Grundgesetz des Gleichgewichts dabey anwenden, dessen ich mich schon bey den festen Körpern bedient habe. Dieser Theil meiner Arbeit wird nicht nur eine der schönsten Anwendungen dieses Princips geben, sondern auch dazu dienen, in einigen Stücken die Theorie der Hydrostatik zu vereinfachen.

Bekanntlich werden die flüssigen Körper in 2 Arten eingetheilt: in unpreßbare (fluides incompressibles), deren Theile zwar ihre Figur verändern können, ohne jedoch ihr Volumen zu verändern, und in preßbare (fluides compressibles) oder elastische, deren Theile zugleich an Figur und Volumen eine Aenderung leiden können, und allezeit mit einer bekannten Kraft sich auszubreiten streben, die man gewöhnlich einer Funktion der Dichtigkeit proportional annimmt.

Das Wasser, das Queckſilber u. ſ. w. gehören zur erstern Art; die Luft, der Dampf des kochenden Wassers u. ſ. w. aber zur 2ten Art *).

Wir

*) Die Natur kennt freilich den Unterschied zwischen preßbaren und unpreßbaren flüssigen Massen wahrscheinlich eben so wenig als sie völlig harte und völlig weiche Körper kennt; ein Ding besitzt eine Eigenschaft immer in einem höhern Grade als ein anderes, und so giebt es eine unendliche Verschiedenheit. Aber der Mensch, dem es um Eigenschaften zu thun ist, die in die Sinne fallen, und wodurch er im Stande ist eins vom andern zu unterscheiden, spricht einem Dinge eine Eigenschaft ab, die es in einem zu geringen Grade besitzt, als daß er sie mit seinen schwachen Sinneswerkzeugen bemerke, und auf gleiche Weise schreibt er einem Dinge eine Eigenschaft ohne Einschränkung zu, wo er nur nicht im Stande ist, diese Einschränkung wahrzunehmen. So ist die Luft weder unbearenzt elastisch, noch das Wasser völlig unpreßbar oder der Zusammendrückung unfähig. Vom erstern haben uns zwar noch zur Zeit keine Versuche überzeugt, allein wir können aus andern Gründen mit der größten Wahrscheinlichkeit schlieſſen, daß es sowohl eine Grenze für die Verdichtung gebe, bey der die Luft keiner fernern Verminderung ihres Volumens mehr fähig ist, als

auch

Digitized by Google

Wir wollen zuerst vom Gleichgewicht der unpreßbaren Flüssigkeiten handlen, und hierauf von dem der preßbaren oder elastischen.

auch ein gewisser Grad der Ausbreitung oder Verdünnung statt findet, bey der ihr die Elasticität entgeht. Vom andern aber sind wir auch a posteriori überzeugt, denn geschweige daß die Verminderung und Zunahme des Volumens beim Wasser sehr in die Augen fallend bey der Aenderung der Wärme und Kälte erfolgt, wovon uns ein mit Wasser angefülltes Thermometer hinlänglich überzeugen kann, so ist es auch einigen Physikern geglückt, durch eine sehr große Gewalt das Wasser um eine geringe Größe, die aber darum doch eine Größe bleibt, zusammenzudrücken. Wir haben das Wasser und die Luft hier besonders angeführt, weil sie am bekanntesten sind, allein was wir von ihnen gesagt haben, gilt eben so gut von andern, und wir glauben dreiste behaupten zu können, es gäbe kein Fluidum, das nicht in einem gewissen Grade elastisch sey, und wo diese Elasticität nicht eine gewisse Grenze habe. M.

Digitized by Google

Siebenter Abschnitt.

Vom Gewicht der unpreßbaren flüssigen Massen.

1) Es sey m eine flüssige Masse, wovon alle Punkte durch die Schwere oder durch gewisse Kräfte P, Q, R, etc., deren Richtungen die Linien p, q, r, etc. sind, getrieben werden, alsdenn erhält man nach (4 Abschn. 12.), wenn man die daselbst gebrauchten Benennungen beibehält, für die Summe der Momente aller Kräfte die Integralformel

$$S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.})\,dm$$

welche = 0 überhaupt seyn muß, wenn das Fluidum im Gleichgewicht seyn soll.

2) Wir wollen zuerst das Fluidum in eine Röhre, die unendlich eng und von einer gegebenen Figur ist, uns eingeschlossen denken, und es uns in unendlich kleine Schichten oder Theile eingetheilt vorstellen, deren Höhe ds und die Breite = ω ist; man könnte alsdann $dm = \omega ds$ setzen, weil die Breite der Röhre ω als unendlich klein angenommen worden ist, und ds das Element der Krümmung der Röhre ist. Stellen wir uns nun vor, die flüssige Masse erhalte eine kleine Bewegung und verändere unendlich wenig ihre Stelle in der Röhre, und es sey δs der kleine Raum den die Schichte oder das Theilchen dm in der Röhre durchlauft; so ist klar, daß $\omega\delta s$ die Größe der flüssigen Masse seyn wird, die zu gleicher Zeit durch jede der Schnitte ω der Röhre gehen wird. Wegen der Unpreßbarkeit der flüssigen Masse aber muß diese Größe überall einerley seyn, setzt man also $\omega\delta s = \alpha$; so wird die Größe α in Ansehung der Krümmung der Röhre beständig seyn.

Man hat aber $\omega = \frac{\alpha}{\delta s}$ und folglich $dm = \frac{\alpha ds}{\delta s}$. Setzt man also

Digitized by Google

die beſtändige Größe α auſſerhalb des Integralzeichens S ſo wird aus der Formel, die die Summe der Momente der Kräfte ausdrückt:

$$\alpha S (P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}) \frac{ds}{\delta s}.$$

Man ſieht aber leicht, daß weil δp, δq, δr die Variationen der Linien P, q, r, etc. ſind, die von der Variation δs herkommen, ſie dieſelben Verhältniſſe haben müſſen, als die Differentialien dp, dq, dr, etc. ds wegen der gegebenen Figur der Röhre.

Man hat alſo $\frac{\delta p}{\delta s} = \frac{dp}{ds}$, $\frac{\delta q}{\delta s} = \frac{dq}{ds}$,

$$\frac{\delta r}{\delta s} = \frac{dr}{ds} \text{ etc.}$$

Es wird daher aus der vorhergehenden Formel:

$$\alpha S (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.})$$

wo die Differentialien dp, dq, dr, etc. ſich auf die Krümmung der Röhre beziehen, und wo das Zeichen S ein Integral andeutet, das nach den ganzen Umfang der Röhre genommen iſt. Seßt man daher dieſe Größe $= 0$ ſo hat man

$$S (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}) = 0$$

welche Gleichung das allgemeine Geſeß des Gleichgewichts einer flüſſigen Maſſe enthält, die in einer Röhre von einer gewiſſen Figur eingeſchloſſen iſt.

3) Gäbe es auſſer den Kräften P, Q, R, etc., die auf jeden Punkt der flüſſigen Maſſe würken, noch eine äuſſere Kraft Π' an einem der Enden der Röhre die mit Hülfe eines Stempels auf die Fläche des Fluidums und ſenkrecht auf die Seitenwände der Röhre würkte; und bezeichnen wir alsdenn durch δ' den kleinen Raum, den die Schichte des Fluidums, das nach der Vorausſeßung von der Kraft Π' gedrückt worden iſt, durchläuft, während daß die andern Schichten die verſchiedenen Räume δs durchlaufen;

ſo

Digitized by Google

so müßte man zur Summe der Momente der Kräfte P, Q, R, etc. das Moment der Kraft Π' welches durch $\Pi' \delta s'$ vorgestellt wird, addiren. Nennt man daher ω' den Schnitt der Röhre an dem Ort, wo die Kraft Π' würkt; so hat man $\omega' \delta s'$ für die Größe der flüssigen Masse, die durch den Schnitt ω' geht, während daß durch einen andern Schnitt ω die Größe der flüssigen Masse $\omega \delta s$ geht.

Die Unpreßbarkeit des Fluidum's aber erfordert, daß diese Größen überall einerlei seyen; hat man daher $\omega \delta s = \alpha$ gesetzt; so hat man auch $\omega' \delta s' = \alpha$; folglich $\delta s' = \frac{\alpha}{\omega'}$. Folglich wird die ganze Summe der Momente der Kräfte die auf die flüssige Masse würken, durch die Formel

$\alpha \left(\frac{\Pi'}{\omega'} + S(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}) \right)$ ausgedrückt werden können, so daß die Gleichung für's Gleichgewicht seyn wird

$$\frac{\Pi'}{\omega'} + S(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}) = 0.$$

4) Es ist offenbar, daß im Zustande des Gleichgewichts die Kraft Π' durch den Druck der flüssigen Masse auf den Stempel aufgehalten wird, dessen Breite $= \omega'$ ist; dieser Druck wird folglich $= -\Pi'$ seyn, und folglich $= \omega' S(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.})$.

Daher wird überhaupt der Druck der flüssigen Masse auf jeden Punkt des Stempels durch die Integralformel

$$S(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.})$$

ausgedrückt, wenn man dieses Integrale für die ganze Länge der Röhre annimmt. Dieser Druck wird auch der nämliche seyn, wenn man anstatt eines beweglichen Stempels einen unbeweglichen Boden annimmt, der die Röhre auf einer Seite verschließt.

5) Wäre am andern Ende der Röhre eine andere Kraft Π'' angebracht, die ebenfals vermittelst eines Stempels würkte; so fände man

Digitized by Google

auf gleiche Weise, wenn man ω'' den Schnitt der Röhre an diesem Orte nennte, die Gleichung:

$$\frac{\Pi'}{\omega'} + \frac{\Pi''}{\omega''} + S(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}) = 0$$

für das Gleichgewicht der flüssigen Masse.

6) Wird also das Fluidum nur durch die beiden äussern Kräfte Π' Π'' gedrückt, die an den Flächen ω' und ω'' angebracht sind; so müßte man für's Gleichgewicht haben $\frac{\Pi'}{\omega'} + \frac{\Pi''}{\omega''} = 0$; woraus man sieht, daß die beiden Kräfte Π' Π'' entgegengesetzte Richtungen haben müssen, und zu gleicher Zeit umgekehrt den Flächen ω', ω'', worauf sie würken, proportional seyn müssen. Diesen Satz sieht man gemeiniglich blos als einen Erfahrungssatz an, oder wenigstens als eine Folge der Gleichheit des Drucks nach allen Seiten, worin der größte Theil der Schriftsteller der Hydrostatik die Natur der flüssigen Körper setzen.

7) Sind die Gesetze des Gleichgewichts einer in einer sehr engen Röhre von einer gewissen Figur eingeschlossenen flüssigen Masse bekannt; so ist es nicht schwer die Gesetze des Gleichgewichts einer flüssigen Masse herzuleiten, sie mag nun entweder in einem Gefäße eingeschlossen seyn oder nicht.

Denn es ist offenbar, daß, wenn eine flüssige Masse im Gleichgewicht ist, und man sich eine gewisse Röhre vorstellt, die mitten durch dieselbe geht, die in dieser Röhre enthaltene flüssige Masse auch im Gleichgewicht von selbst d. h. unabhängig von allen übrigen Theilen des Fluidums seyn wird. Man hat also für das Gleichgewicht dieser Röhre, wenn man auf die äussern Kräfte keine Rücksicht nimmt (10)

$$S(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}) = 0$$

und da die Figur der Röhre unbestimmt seyn muß; so muß die vorhergehende Gleichung immer statt finden, indem man dieser Figur eine gewisse Veränderung giebt.

Wir

Digitized by Google

Wir wollen durch φ überhaupt den Werth des Integrals

$$S(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}),$$

welches für die ganze Länge der Röhre genommen ist, ausdrücken, so daß die Gleichung für's Gleichgewicht der Röhre seyn wird: $\Phi = 0$ und wenn man die Variationen durch das Zeichen δ ausdrückt; so wird man allgemein haben: $\delta\Phi = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Aber } \delta\Phi &= \delta S(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.})\\ &= S\delta(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.})\\ &= S(P\delta dp + Q\delta dq + R\delta dr + \text{etc.}\\ &\quad + \delta Pdp + \delta Qdq + \delta Rdr + \text{etc.}).\end{aligned}$$

Verwandelt man nun δd in $d\delta$ und läßt hernach das doppelte Zeichen $d\delta$ durch Integrationen, die man theilweise verrichtet, nach den bekannten Grundsätzen des Variations-Calkuls verschwinden; so hat man

$$\begin{aligned}\delta\Phi = {} & P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\\ & + S(\delta Pdp - dP\delta p + \delta Qdq - dQ\delta q\\ & + \delta Rdr - dR\delta r + \text{etc.}).\end{aligned}$$

wo die Glieder, die sich außerhalb des Zeichens S befinden, sich auf die Enden des durch dies Zeichen angedeuteten Integrals beziehen, und folglich der Oberfläche der flüssigen Masse entsprechen.

Da nun die Größen P, Q, R, etc., die die Kräfte andeuten, immer als Funktionen von p, q, r, etc. angesehen werden können; so ist klar, daß der Theil von $\delta\Phi$ der das Zeichen S vor sich hat, keiner Reduktion mehr fähig ist, damit man also im allgemeinen habe $\delta\Phi = 0$, muß 1) dieser Theil an sich $= 0$ seyn, und man muß also für jeden Punkt der flüssigen Maße die identische Gleichung haben:

$$\delta Pdp - dP\delta p + \delta Qdq - dQ\delta q +$$
$$\delta Rdr - dR\delta r + \text{etc.} = 0,$$

Digitized by Google

2) Muß man für die äußere Oberfläche des flüssigen Körpers haben

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.} = 0,$$

wo man annimt, daß die Differentialien δp, δq, δr etc. sich auf diese Oberfläche beziehen.

Die erstere Eigenschaft wird dazu dienen, die Natur der Kräfte P, Q, R etc. zu bestimmen, wodurch daß Fluidum im Gleichgewicht seyn kann, und die 2te wird die Figur selbst angeben, die das Fluidum wegen dieser Kräfte annehmen muß.

8) Wir wollen setzen, die Größen P, Q, R. etc, seyen so beschaffen, daß die erstere Bedingung statt hat, in diesem Fall hat man sehr einfach

$$\delta\Phi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$$

Nun ist $\delta\Phi$ offenbar ein volkommenes Differential in Ansehung des Zeichens δ; folglich ich auch $P\delta p + Q\delta q + R\delta r +$ etc. ein volkommenes Differential; verwandelt man also δ in d; so hat man das volkommene Differential: $Pdp + Qdq + Rdr +$ etc. wovon Φ das Integrale ist.

Wiederum ist $Pdp + Qdq + Rdr +$ etc. ein volkommenes Differential; so muß die erstere Bedingung nothwendig statt finden. Denn alsdann wird das Integrale Φ dieser Größe eine Funktion von p, q, r etc. seyn, so daß, wenn man differentiirt, man hat:

$$d\Phi = Pdq + Qdq + Rdr + \text{etc. und}$$

$$\delta\Phi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc. folglich}$$

$$\delta d\Phi = Pd\delta p + \delta Qdq + \delta Rdr + \text{etc.}$$

$$+ P\delta dp + Qd\delta q + Rd\delta r + \text{etc. und}$$

$$d\delta\Phi = dP\delta p + dQ\delta q + dR\delta r + \text{etc.}$$

$$+ Pd\delta p + Qd\delta q + Rd\delta r + \text{etc.}$$

Aber

Digitized by Google

Aber nach den Grundsätzen des Variations-Kalküls ist $\delta d = d\delta$; folglich ist auch

$$\delta d\Phi - d\delta\Phi = \delta P dp + \delta Q dq + \delta R dr + \text{etc.}$$
$$- dP\delta p - dQ\delta q - dR\delta r - \text{etc.} = 0,$$

welches die gesuchte Bedingung ist. Diese Bedingung besteht also darin, daß die Kräfte P, Q, R etc. so beschaffen sind, daß $Pdp + Qdq + Rdr +$ etc. eine integrabele Größe ist.

Nennen wir also Φ das Integrale dieser Größe, so ist die 2te Bedingung des Gleichgewichts $\delta\Phi = 0$ oder vielmehr $d\Phi = 0$ für die äussere Fläche des flüssigen Körpers; so daß, wenn man integrirt erhält: $\Phi =$ Const für die Gleichung dieser Fläche.

9) Betrachtet man nun die (7) gefundene Gleichung:

$$\delta P dp - dP\delta p + \delta Q dq - dQ\delta q + \delta R dr - dR\delta r$$
$$+ \text{etc.} = 0,$$

so kann man daraus die analytischen Bedingungen herleiten, die zwischen den Ausdrückungen der Kräfte P, Q, R etc. statt finden; denn sieht man diese Ausdrückungen als gewisse Funktionen von p, q, r etc. an; so erhält man bekanntermaaßen

$$dP = \frac{dP}{dp} dp + \frac{dP}{dq} dq + \frac{dP}{dr} dr + \text{etc.}$$

und $$\delta P = \frac{dP}{dp} \delta p + \frac{dP}{dq} \delta q + \frac{dP}{dr} \delta r + \text{etc.}$$

und eben so geht es mit den andern Differentialien; substituirt man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung, und ordnet die Glieder; so bekommt sie diese Form:

$$\left(\frac{dP}{dq} - \frac{dQ}{dp}\right)(\delta q dp - dq\delta p) +$$

(dP

$$\left(\frac{dP}{dr} - \frac{dR}{dp}\right)(\partial r dp - dr\partial p) +$$

$$\left(\frac{dQ}{dr} - \frac{dR}{dq}\right)(\partial r dq - dr\partial q) + \text{etc.} = 0,$$

und sie muß unabhängig von den Differentialien dp, dq, dr etc. ∂p, ∂q, ∂r etc. statt finden.

10) Ist also keine gewisse Verhältniß zwischen den Variabeln p, q, r, etc. angegeben; so muß man einzeln setzen:

$$\frac{dP}{dq} - \frac{dQ}{dp} = 0,$$

$$\frac{dP}{dr} - \frac{dR}{dp} = 0,$$

$$\frac{dQ}{dr} - \frac{dR}{dq} = 0,$$

etc.

Dies sind die bekannten Bedingungsgleichungen für die Integrabilität der Formel:

$$P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

Hinge aber z. B. die variabele Größe r, von den beiden variabeln Größen p und q ab; so daß

$$dr = A dp + B dq,$$

so hätte man ebenfalls

$$\partial r = A\partial p + B\partial q;$$

folglich $\partial r dp - dp\partial r = B(\partial q dp - dq\partial p)$,

$\partial r dq - dr\partial q = A(\partial p dq - dp\partial q)$;

Sub-

Digitized by Google

Substituirt man also diese Werthe in der allgemeinen Gleichung, und setzt den Coefficienten von $\delta q\,dp - dq\,\delta p = 0$; so erhielte man die Gleichung

$$\frac{dP}{dq} - \frac{dQ}{dp} + B\left(\frac{dP}{dr} - \frac{dR}{dp}\right) - A\left(\frac{dQ}{dr} - \frac{dR}{dq}\right) = 0,$$

welche statt der 3 ersten Bedingungsgleichungen dienen kann u. s. w.

11) Hat die flüssige Masse nur 2 Dimensionen; so hängt die Lage jedes Punkts derselben nur von 2 variabeln Größen ab; die verschiedenen variabeln Größen p, q, r, können also immer nur auf 2 gebracht werden, und alsdann findet nur eine Bedingungsgleichung statt. Hat aber flüssige Masse 3 Dimensionen; so hängt die Lage ihrer Punkte überhaupt von 3 veränderlichen Größen ab; alle verschiedene variabeln Größen p, q, r etc. lassen sich also auf 3 bringen, und man erhält auch 3 Bedingungsgleichungen.

12) Bisher haben wir die Dichtigkeit der flüssigen Masse ausser Acht gelassen, oder wir haben sie vielmehr als beständig und $= 1$ angesehen; wollte man sie aber ebenfals veränderlich setzen; so erhielte man, wenn man Δ die Dichtigkeit eines gewissen Theilchens dm nennte (2)

$dm = \Delta \varpi ds$; hiedurch fände man also die Größen P, Q, R etc. insgesammt durch Δ multiplicirt.

Man erhält alsdann für das Gleichgewicht der flüssigen Massen von veränderlicher Dichtigkeit, dieselben Gesetze als für das Gleichgewicht der Flüssigkeiten von einerley Dichtigkeit, wenn man nur die verschiedenen Kräfte durch die Dichtigkeit des Punkts multiplicirt, worauf sie würken d. h. indem man nur ΔP, ΔQ, ΔR etc. an die Stelle von P, Q, R, setzt.

13) Wir haben angefangen die Gesetze des Gleichgewichts einer in einer unendlich engen Röhre eingeschlossenen flüssigen Masse zu suchen, und daraus die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts einer gewissen flüssigen Masse hergeleitet. Indessen kann man auch unmittelbar zu diesen leztern

Digitized by Google

Gesetzen gelangen, wenn man die Aufgabe sogleich in ihrer ganzen Allgemeinheit betrachtet, und die im 4ten Abschnitt vorgetragene Methode dabei anwendet.

Wir wollen um mehrerer Einfachheit annehmen, alle auf die Theilchen des flüssigen Körpers würkende Kräfte seyen auf 3 gebracht, die unter X, Y, Z vorgestellt werden, und die ihre Richtungen nach den rechtwinklichten Coordinaten x, y, z haben, d. h. die diese zu verringern streben. Wir haben (5, Abschn. 5) die allgemeinen Formeln für diese Reduktion gegeben. Nennt man dm die Masse eines gewissen Theilchens; so erhält man für die Summe der Momente der Kräfte X, Y, Z die Integralformel $S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm$.

Das Volumen des Theilchens dm aber kann durch dx, dy, dz ausgedrückt werden; bedeutet also Δ die Dichtigkeit, so ist klar, daß man hat $dm = \Delta\,dx, dy, dz$; und das Integrationszeichen S wird zugleich zugleich zu den 3 veränderlichen Größen x, y, z gehören.

Man muß aber ferner auf die aus der Unpreßbarkeit des Fluidums entspringende Bedingungsgleichungen Rücksicht nehmen, welche unter $L = o$ vorgestellt wird. Differentiirt man daher nach δ, multiplicirt durch einen unbestimmten Coefficienten λ und integrirt; so erhält man die Formel $S\lambda\delta L$, die man zur vorhergehenden hinzu addiren muß. Sind gar keine beschleunigende auf die Oberfläche der flüssigen Masse würkende Kräfte, und auch keine besondere Bedingungen in Ansehung dieser Oberfläche vorhanden; so hat man für's Gleichgewicht folgende einfache Gleichung:

$$S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm + S\lambda\delta L = o,$$

wo man das Integrale mit Rücksicht auf die ganze Maße des Fluidum's nehmen muß.

14) Wir wollen jetzt die Werthe von L und dessen Variation δL suchen. Es ist offenbar, daß die Bedingung der Unpreßbarkeit darin besteht, daß das Volumen jedes Theilchens eine beständige Größe sey; hat man also dieses Volumen durch dx, dy, dz ausgedrückt; so hat man $dx, dy, dz = Const$ für die Bedingungsgleichung; folglich wird

L =

Digitized by Google

$L = dx, dy, dz$ — Const und

$\delta L = \delta (dx, dy, dz$ — Const seyn.

Um die Variation $\delta, (dx, dy, dz)$ zu erhalten; so sollte man denken hätte man weiter nichts nöthig als dx, dy, dz nach δ zu differentiiren; allein man hat hier noch eine besondere Betrachtung anzustellen, ohne die der Calkul unmöglich die gehörige Strenge erlangen würde. Die Größe dx, dy, dz drückt nehmlich das Volumen eines Theilchens nur in so weit aus, als man annimmt, die Figur dieses Theilchens sey ein rechtwinklichtes Parallelepipedium, dessen Seiten den Achsen der x, y, z parallel seyen. Diese Voraussetzung kann immer gar wohl gestattet werden, weil man sich das Fluidum in unendlich kleine Theile von jeder Figur getheilet vorstellen kann.

Es drückt $\delta (dx, dy, dz)$ die Variation aus, die dies Volumen leidet, wenn das Theilchen eine unendlich geringe Veränderung in seiner Lage bekommt, in dem seine Coordinaten x, y, z werden $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, und es ist klar, daß wenn bei dieser Veränderung des Orts das Theilchen auch in Ansehung seiner Figur und seiner Lage in Beziehung auf die Achsen der x, y, z eine Veränderung erlitt, man sein Volumen nicht mehr durch das Produkt der Differentialien $d(x + dx)$, $d(y + dy)$, $d(z + dz)$ seiner Coordinaten wird ausdrücken können. Um also die genaue Veränderung des Volumens zu erhalten, muß man zugleich auf die Veränderungen, die das Theilchen in Ansehung seiner Lage und Figur leidet, sehen.

Man muß daher die Coordinaten, die zu den Winkeln des Parallelepipedum's dx, dy, dz in seinem ersten und in seinem veränderten Zustande gehören, betrachten. Im ersten Zustande sind diese Coordinaten offenbar x, y, z;

$x + dx, y, z$;
$x, y + dy, z$;
$x, y, z + dz$;
$x + dx, y + dy, z$;
$x + dx, y, z + dz$,
$x, y + dy, z + dz$,
$x + dx, y + dy, z + dz$,

Digitized by Google

Nimmt man nun die Wurzeln der Summe der Quadrate der Differentialien der Coordinaten für 2 gewisse Winkel; so erhält man die gerade Linie die diese Winkel verbindet, und die entweder eine Seite oder eine Diagonallinie des Parallelipipedum's seyn wird; man findet so also dx, dy, dz für die Seiten, und $\surd(dx^2 + dy^2)$, $\surd(dx^2 + dz^2)$, $\surd(dy^2 + dz^2)$, $\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ für die Diagonallinien. Wir wollen jetzt setzen, die Coordinaten x, y, z verwandelten sich in $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, und δx, δy, δz, als gewisse Funktionen von x, y, z ansehen; läßt man nach und nach die x, y, z, und dx, dy, dz sich verändern, so findet man, welche Veränderung die andern Coordinaten $x + dx$, y, z; x, $y + dy$, z; etc. erleiden.

Läßt man daher x sich nur um dx verändern; so bekommt man

$x + dx + \delta x + \frac{d\delta y}{dx} dx$, $y + \delta y + \frac{d\delta y}{dx} dx$,

$z + \delta z + \frac{d\delta z}{dx} dx$ für die Veränderungen, die die Coordinaten $x + dx$, y, z leiden. Läßt man y um dy sich verändern; so hat man

$x + \delta x + \frac{d\delta x}{dy} dy$, $y + dy + \delta y + \frac{d\delta y}{dy} dy$,

$z + \delta z + \frac{d\delta z}{dy} dy$ für die Veränderungen von x, $y + dy$, z;

und läßt man endlich z eine Veränderung $= dz$ leiden; so hat man

$x + \delta x + \frac{d\delta x}{dz} dz$, $y + \delta y + \frac{d\delta y}{dz} dz$,

$z + dz + \delta z + \frac{d\delta z}{dz} dz$ für das was aus x, y, $z + dz$ wird.

Eben

Digitized by Google

Eben so läßt man zugleich x um dx und y um dy sich verändern; so hat man $x + dx + \delta x + \frac{d\delta x}{dx} dx + \frac{d\delta x}{dy} dy$,

$y + dy + \delta y + \frac{d\delta y}{dx} dx + \frac{d\delta y}{dy} dy$,

$z + dz + \frac{d\delta z}{dx} dx + \frac{d\delta z}{dy} dy$ für das was aus

$x + dx$, $y + dy$, z, wird u. s. f.

Nimmt man also die Wurzel von der Summe der Quadrate der Differentialien dieser neuen Coordinaten für 2 gewisse Winkel des Rhomboid's, worin sich das Parallelepipedum dx, dy, dz verwandelt hat; so findet man bis auf unendlich kleine Größen von der 3ten Ordnung folgende Ausdrücke für die Seiten:

$$dx + \frac{d\delta x}{dx} dx,$$

$$dy + \frac{d\delta y}{dy} dy,$$

$$dz + \frac{d\delta z}{dz} dz,$$

und diese für die Diagonallinien

$$r\left[\left(dx + \frac{d\delta x}{dx} dx\right)^2 + \left(dy + \frac{d\delta y}{dy} dy\right)^2\right]$$

$$r\left[\left(dx + \frac{d\delta x}{dx} dx\right)^2 + \left(dz + \frac{d\delta z}{dz} dz\right)^2\right]$$

$$r\left[\left(dy + \frac{d\delta y}{dy} dy\right)^2 + \left(dz + \frac{d\delta z}{dz} dz\right)^2\right]$$

Digitized by Google

$$r\left[\left(dx + \frac{d\delta x}{dx}dx\right)^2 + \left(dy + \frac{d\delta y}{dy}dy\right) + \left(dz + \frac{d\delta z}{dz}dz\right)^2\right]$$

woraus leicht zu schließen ist, daß dies Rhomboid wiederum ein rechtwinklichtes Parallelepipedum ist, und daß folglich sein Inhalt durch das Produkt der Seiten,

$$dx\left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right), dy\left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right), dz\left(1 + \frac{d\delta z}{dz}\right)$$

ausgedrückt werden kann.

Die Variation des Volumens des ersten Parallelepipedum's d. h. der Werth von $\delta(dx, dy, dz)$ wird also durch

$$dx, dy, dz\left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right)\left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right)\left(1 + \frac{d\delta z}{dz}\right) - dx\,dy\,dz$$

folglich hat man, wenn man die angezeigten Multiplicationen würklich verrichtet, und die unendlich kleinen Größen der höhern Ordnungen vernachläßigt:

$$\delta(dx\,dy\,dz) = dx\,dy\,dz\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)$$

und dies ist der Werth von δL, den man in der Gleichung (13) substituiren muß.

15) Setzt man in dieser Gleichung für dm dessen Werth $\Delta dx\,dy\,dz$; so hat man

$$S\left(\Delta X\delta x + \Delta Y\delta y + \Delta Z\delta z + \lambda\frac{d\delta x}{dx} + \lambda\frac{d\delta y}{dy} + \lambda\frac{d\delta z}{dz}\right)dx\,dy\,dz = 0.$$

Man

Digitized by Google

Man hat jetzt nur noch die doppelten Zeichen $d\delta$ nach (4 Absch. 17.) wegzubringen.

Man betrachte in dieser Absicht zuerst die Größe

$S\lambda \frac{d\delta x}{dx} dx dy dz$, wo das Zeichen S ein dreifaches Integral in Anse-

hung der Größen x, y, z bedeutet; es ist klar, daß, da dies Differen-tiale von δx nur sich auf die Variation von x bezieht, man, um es zum verschwinden zu bringen, nur auf die Integration in Beziehung auf x zu sehen hat; man braucht dieser Größe daher nur die Form $S\,dy\,dz$, $S\lambda \frac{d\delta x}{dx}$ zu geben, und das einfache Integral

$$S\lambda \frac{d\delta x}{dx} dx \text{ in } \lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x' - S \frac{d\lambda}{dx} \delta x dx$$

zu verwandlen, wo die mit einem Strich bezeichneten Größen sich auf den Anfang der Integration beziehen, und die mit 2 bezeichneten zu den Punk-ten gehören, wo sie sich endigt nach denen (4 Absch. 17.) angenommenen Bedeutungen. Die vorige Größe verwandelt sich also in folgende:

$$S\,dy\,dz\,(\lambda''\delta x'' - \lambda'\delta x') - S\,dy\,dz\,S\frac{d\lambda}{dx}\delta x dx,$$

oder, welches einerley ist

$$S\,(\lambda''\delta x'' - \lambda'\delta x')\,dy\,dz - S\frac{d\lambda}{dx}\delta x\,dx\,dy\,dz.$$

Durch ein gleiches Verfahren und durch ähnliche Schlüsse verwandelt man auch die Größen

$S\lambda \frac{d\delta y}{dy} dx\,dy\,dz$ und $S\lambda \frac{d\delta z}{dz} dx\,dy\,dz$ in diese

$S\,(\lambda''\delta y'' - \lambda'\delta y')\,dx\,dz - S\frac{d\lambda}{dy}\delta y\,dx\,dy\,dz$ und

S (λ''

Digitized by Google

$$S(\lambda'' \partial z'' - \lambda' \partial z') \, dx \, dy - S \frac{d\lambda}{dz} \partial z \, dx \, dy \, dz.$$

Verrichtet man nun diese Substitutionen, so erhält man für das Gleichgewicht der flüssigen Masse diese allgemeine Gleichung:

$$S\left[\left(\Delta X - \frac{d\lambda}{dx}\right)\partial x + \left(\Delta Y - \frac{d\lambda}{dy}\right)\partial y + \left(\Delta Z - \frac{d\lambda}{dz}\right)\partial z\right] dx \, dy \, dz +$$

$$S(\lambda'' \partial x'' - \lambda' \partial x') \, dy \, dz +$$

$$S(\lambda'' \partial y'' - \lambda' \partial y') \, dx \, dz +$$

$$S(\lambda'' dz'' - \lambda' \partial z') \, dx \, dy = 0.$$

Man hat nun nur noch die Coefficienten der unbestimmten Variationen ∂x, ∂y, ∂z (4 Abschn. 8.) $= 0$ zu setzen.

16) Man erhält also sogleich diese 3 unbestimmte Gleichungen

$$\Delta X - \frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

$$\Delta Y - \frac{d\lambda}{dy} = 0,$$

$$\Delta Z - \frac{d\lambda}{dz} = 0,$$

welche für alle Punkte der flüssige Massen statt finden müssen.

Ist endlich die flüssige Masse von allen Seiten frey; so würden die Variationen $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$, $\partial x''$, $\partial y''$, $\partial z''$, die sich auf die Punkte der Oberfläche der flüssigen Masse beziehen, auch unbestimmt seyn, und folglich müßte man

Digitized by Google

man alsdann noch ihre Coefficienten besonders = o setzen; dies gäbe $\lambda' = o$, $\lambda'' = o$ d. h. überhaupt $\lambda = o$ für alle Punkte der Oberfläche des Fluidum's; und diese Gleichung wird dazu dienen, die Figur dieser Fläche zu bestimmen.

Eben dies wird, wenn der flüssige Körper in einem Gefäße eingeschlossen ist, in Ansehung des Theils der Oberfläche, wo das Gefäß offen ist, statt finden; in Ansehung des Theils aber, der an die Seitenwände stößt, ist klar, daß die Variationen $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$, $\partial x''$, $\partial y''$, $\partial z''$, untereinander Verhältnisse haben müssen, die durch die Figur dieser Seitenwände gegeben werden, weil der flüssige Körper nur nach ihrer Direktion fließen kann. Wir werden aber unten erweisen, (20, 21.), daß, wie auch ihre Figur beschaffen seyn mag, die Glieder, die die erwähnten Variationen enthalten, jederzeit von selbst = o seyn werden, so daß es keine Bedingung in Ansehung dieses Theils der Oberfläche des flüssigen Körpers geben wird.

17) Die 3 eben gefundenen Gleichungen für die Bedingungen des Gleichgewichts des flüssigen Körpers geben

$$\frac{d\lambda}{dx} = \Delta X, \quad \frac{d\lambda}{dy} = \Delta Y, \quad \frac{d\lambda}{dz} = \Delta Z,$$

$$\text{Aber } d\lambda = \frac{d\lambda}{dx}dx + \frac{d\lambda}{dy}dy + \frac{d\lambda}{dz}dz;$$

folglich hat man $d\lambda = \Delta(Xdx + Ydy + Zdz)$; woraus man sieht, daß die Größe

$$\Delta(Xdx + Ydy + Zdz)$$

ein vollkommenes Differential in x, y, z seyn muß, und diese einzige Bedingung schließt allein die Gesetze des Gleichgewichts der flüssigen Körper in sich.

Man sieht auch, daß sie mit dem übereinkommt, was wir oben (8, 11.) gefunden haben; denn wir haben (5 Abschn. 5.) gezeigt, daß allgemein ist:

$$Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$

Digitized by Google

Bringt man die Größe λ aus eben diesen Gleichungen weg; so erhält man folgende:

$$\frac{d.\Delta X}{dy} = \frac{d.\Delta Y}{dx},$$

$$\frac{d.\Delta X}{dz} = \frac{d.\Delta Z}{dx},$$

$$\frac{d.\Delta Y}{dz} = \frac{d.\Delta Z}{dy}.$$

Diese Gleichungen sind von einander verschieden, und die eine könnte nicht als eine Folge der beiden andern angesehen werden.

Diese Bedingungen sind also in Ansehung der Kräfte X, Y, Z nothwendig, wenn die flüssige Masse im Gleichgewicht seyn soll. Finden sie vermöge der Natur dieser Kräfte statt; so ist man davon versichert, daß das Gleichgewicht möglich ist, und man hat jetzt nur die Figur, die die flüssige Masse annehmen muß, um im Gleichgewicht zu seyn, d. h. die Gleichung für die äussere Fläche des flüssigen Körpers zu finden. Wir haben aber (16) gesehen, daß man in jedem Punkte dieser Oberfläche haben muß $\lambda = 0$. Da nun $d\lambda = \Delta(Xdx + Ydy + Zdz)$; so erhält man durch die Integration

$$\lambda = \int \Delta (Xdx + Ydy + Zdz) + \text{const.};$$

folglich wird die Gleichung für die äussere Fläche seyn:

$$\int \Delta (Xdx + Ydy + Zdz) = K$$

wo K eine gewisse beständige Größe ist, und diese Gleichung wird allezeit aus endlichen Gliedern bestehen, weil die Größe $\Delta(Xdx + Ydy + Zdz)$ als ein vollkommenes Differential angenommen worden ist.

18) Ist die Größe $Xdx + Ydy + Zdz$ selbst ein vollkommenes Differential, welches allezeit statt findet, wenn die Kräfte X, Y, Z das Resultat einer oder mehrern Anziehungen sind, die gewissen Funktionen

Digitized by Google

nen der Distanzen von den Mittelpunkten gleich sind, weil man überhaupt (5 Abschn. 5.) hat

$$Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$

und man nennt diese Größe $d\varphi$; so hat man

$$d\lambda = \Delta d\varphi;$$

Δ muß also eine Funktion von Φ seyn, damit $d\lambda$ ein vollkommenes Differential sey. Es wird also auch $\lambda = \int \Delta d\varphi$ eine Funktion von Φ seyn.

Man hat also in diesem Falle für die Figur der Oberfläche die Gleichung:

$$\text{funct. } \Phi = K \text{ d. h. } \Phi = \text{Const.};$$

Eben dies fände statt, wenn die Dichtigkeit der flüssigen Masse überall gleichförmig wäre. Weil ferner Φ auf der Oberfläche beständig ist, und $\Delta =$ funct. Φ; so muß auch die Dichtigkeit Δ in allen Punkten der äussern Oberfläche einer im Gleichgewicht sich befindenden flüssigen Masse einerley seyn.

Im Innern der flüssigen Masse kann die Dichtigkeit auf eine gewisse Art zwar verschieden seyn, aber sie muß allezeit eine Funktion von Φ bleiben; sie muß folglich beständig überall da seyn, wo φ beständig ist, so daß $\Phi = h$ überhaupt die Gleichung für Schichten von einerley Dichtigkeit seyn wird, wenn h eine gewisse beständige Größe bedeutet. Differentiirt man also; so erhält man $d\Phi = 0$ oder

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

für die allgemeine Gleichung dieser Schichten, und man sieht leicht, daß diese Gleichung zu Oberflächen gehört, worauf die Richtung der vereinigten Würkung der Kräfte X, Y, Z senkrecht ist, und die Herr Clairaut Wasserpaß-Ebenen nennt. Hieraus folgt, daß die Dichtigkeit in jeder Schichte des Wasserpasses, die durch 2 solcher unendlich nahe an einander liegenden Wasserpaß-Ebenen gebildet wird gleichförmig seyn muß. Dieses Gesetz muß sowohl bey der Erde als bey den Planeten statt finden, wenn man annimmt, daß diese Körper Anfang's flüssig gewesen seyen, und indem sie sich verhärte-

Digitized by Google

härteten, die Form beibehalten hatten, die sie vermöge der Attraktion ihrer Theile in Verbindung mit der Centrifugal-Kraft, annahmen.

19) Die Gleichung $\int \Delta (X dx + Y dy + Z dz) = K$ für die Fläche der im Gleichgewicht sich befindenden flüssigen Körper findet gleichfalls bey solchen flüssigen Körpern statt, die von allen Seiten frey, und für solche die in Gefäßen eingeschlossen sind, wenigstens in Ansehung des Theils ihrer Oberfläche, der den Oeffnungen des Gefäßes entspricht (17).

Was die zusammenhängende Fläche an den Seitenwänden des Gefäßes betrifft; so ist klar, daß sie dieselbe Figur haben muß als diese Seitenwände, so daß, wenn das Gefäß unbiegsam ist, diese Figur gegeben ist, und gar nicht von den Bedingungen des Gleichgewichts abhängt. In Ansehung dieses Theiles der Oberfläche des flüssigen Körpers müssen also die Glieder der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht, die die Variationen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ enthalten, von selbst verschwinden, weil man sie durch keine besondere Bedingung zum Verschwinden bringen könnte; es ist dies gut zu untersuchen, damit nichts übrig bleibe, was einen Zweifel wegen der Richtigkeit und Allgemeinheit unserer Methoden erregen könnte.

20) Wir wollen jetzt irgend einen Punkt der Oberfläche an den Seitenwänden des unbiegsam und von einer gegebenen Figur angenommenen Gefäßes zusammenhängenden flüssigen Masse betrachten; dieser Punkt entspricht nothwendig dem Anfang oder dem Ende jeder der Integrationen in Beziehung auf x, y, z, oder dem Anfang der einen und dem Ende der beiden andern, und so umgekehrt (15). Wir wollen zuerst setzen, er gehöre zum Ende jeder der 3 Integrationen; alsdenn werden die Variationen von x, y, z, in Ansehung dieses Punkts seyn: $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ und die Glieder, worinn diese Variationen vorkommen: $\lambda'' \delta x''$, $dy\, dz$, $\lambda'' \delta y\, dx dz$, $\lambda'' \delta z'' dx dy$. Auf diese Art erhält man für alle ähnliche Punkte der Oberfläche der flüssigen Körpers die Integralien $S \lambda'' \delta x'' dy dz$, $S \lambda'' \delta y'' dx dz$, $S \lambda'' \delta z'' dx dy$ *), wovon das erstere so genommen werden muß,

*) Im Original steht hier $S \lambda'' dz dx dy$. M.

Digitized by Google

muß, daß y z jedes besonders veränderlich ist, nachdem man für x dessen Werth in y und z, der durch die Natur der Fläche oder der Wand des Gefäßes gegeben ist, substituirt hat; das 2te aber muß so genommen werden, daß man jedes besonders x und z veränderlich annimmt, und für y dessen Werth, der in x und z durch die nämliche Fläche gegeben ist, substituirt; das 3te endlich muß ebenfals so genommen werden, daß man nach und nach sowohl x als y variabel annimmt, und statt z dessen Werth, der in x und y durch die nämliche Fläche gegeben ist, substituirt.

Man sieht aber leicht, daß man diese 3 Integralien auf einerlei Form bringen kann, wenn man nur in den beiden erstern an die Stelle des z dessen Werth in x und y substituirt, und hierauf in der erstern x und in der 2ten y anstatt des z variabel annimmt.

Stellt man also unter $dz = p\,dx + q\,dy$ die Gleichung der gegebenen Oberfläche vor; so hat man nur in dem Integral $S\lambda''\,\delta x''\,dy\,dz$. $p\,dx$ an die Stelle von dz und im Integral $S\lambda''\,\delta y''\,dx\,dy$, $q\,dy$ an die Stelle der dz zu setzen, und hernach beide in Beziehung auf z und auf y zu integriren.

Man bemerke aber ja, daß die Differentialien dx, dy, dz immer positiv angenommen werden müssen, weil sie in dem rechtwinklichten Parallelepipedum dx, dy, dz, welches das Volumen des Theilchens dm ausdrückt, und das also der Beschaffenheit der Sache nach nicht negativ werden kann, vorkommen. Folglich muß man auch bei den Substitutionen von $p\,dx$ und $q\,dy$ an die Stelle des dz allezeit p und q positiv annehmen.

Setzen wir daher überhaupt, daß die Gleichung für die Seitenwände des Gefäßes durch $dz = \pm p\,dx \pm q\,dy$ ausgedrückt werde, worin p und q jederzeit positive Größen sind; so werden wir statt der 3 Integrale:

$$S\lambda''\,\delta x''\,dy\,dz,\quad S\lambda''\,\delta y''\,dx\,dz,\quad S\lambda''\,\delta z''\,dx\,dy;$$

dieses einzige bekommen:

$$S\lambda''(p\,\delta x'' + q\,\delta y'' + \delta z'')\,dx,\,dy.$$

Digitized by Google

Wir haben aber vorausgesetzt, daß die Punkte, die wir von der Oberfläche der flüssigen Masse betrachtet haben, zum Ende von jeder der 3 Integrationen in Beziehung auf x, y, z gehören, jetzt ist es leicht sich davon zu überzeugen, daß diese Voraussetzung nur alsdann statt finden kann, wenn die Coordinaten x, y, z dieser Punkte alle auf eine Seite der erwähnten Oberfläche d. h. auf die nämliche Seite der Ebenen fallen, die diese Fläche in eben diesen Punkten berühren.

Soll dies aber statt finden; so muß die Differentialgleichung der Oberfläche nothwendig in diesen Punkten seyn: $dz = -pdx - qdy$ damit wenn x und y wachsen, z abnimmt. Aber $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ sind (per hyp.) die Variationen von x, y, z in eben diesen Punkten, folglich müssen sie auch dieselben Verhältnisse unter einander haben als die Differentialien dx, dy, dz, wenigstens in so fern man die Figur der Oberfläche als unveränderlich ansiehet. Man hat daher $\delta z'' = -p\delta x'' - q\delta y''$. Dieser Werth in das obige Integral substituirt, macht es offenbar $= 0$.

21) Gehörten die erwähnten Punkte anstatt zum Ende der 3 Integrationen in Beziehung auf x, y, z zum Anfang derselben; so hätte man in der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts (15) in Beziehung auf diese Punkte die 3 Integrale $-S\lambda'\delta x'\,dy\,dz - S\lambda'\delta y'\,dx\,dz - S\lambda'\delta z'\,dx\,dy$ die sich in diese einzige verwandlen würden

$$-S\lambda'(p\delta x' + q\delta y' + \delta z')\,dx\,dy;$$

und auch in diesem Falle hätte man:

$$dz = -pdx - qdy,$$

und folglich auch

$$\delta z' = -p\delta x' - q\delta y';$$

welches gleichfals dies Integral $= 0$ machen würde. Gehörten aber diese Punkte z. B. zum Anfang der Integration in Beziehung auf x und zum Ende der beiden Integrationen in Beziehung auf y und z; alsdann würden die Variationen der Coordinaten x, y, z für diese Punkte seyn, $\delta x'$, $\delta y''$, $\delta z''$ und die correspondirenden Integrale

$-S$.

Digitized by Google

$$- S\lambda' \partial x' dy dz + S\lambda'' \partial y'' dx dz + S\lambda''' \partial z''' dx dy$$

worin λ' einerley seyn würde mit λ'''. Hiedurch verwandeln diese Integrale sich also in folgende:

$$S\lambda''' (- p\partial x'' + q\partial y'' + \partial z'') dx dy.$$

Es ist aber leicht zu begreiffen, daß, wenn dieser Fall eintreten soll, die beiden Coordinaten y und z sich auf einer Seite und die Coordinate x sich auf der andern Seite von jeder Ebene, die die Oberfläche in den erwähnten Punkten berührt, befinden müssen. Die Gleichung der Oberfläche muß also für diese Punkte von der Form

$$dz = p dx - q dy$$ seyn, so daß man auch hat

$$\partial z'' = p\partial x'' - q\partial y''.$$

Substituirt man nun dies in das vorhergehende Integral, so wird es dasselbe auch $= o$ machen.

Eben dies Resultat findet man für die andern Fälle, worin man Punkte betrachtet in Beziehung auf den Anfang der Integrale nach x und y, und auf das Ende der Integration nach z, oder auf den Anfang der Integrationen nach x und z, und auf das Ende der Integration nach y oder etc.

22) Aus dem was wir eben in Beziehung auf verschiedene Fälle erwiesen haben, kann man den Schluß ziehen, daß, wenn man mit einem Strich die Größen andeutet, die sich auf den Anfang der Integration in Rücksicht auf z beziehen, d. h. die Größen, die zum vordern Theile der Fläche des flüssigen Körpers in Ansehung der Ebene der x und y gehören, und mit 2 Strichen die Größen, die dem Ende der nämlichen Integration nach z entsprechen, bezeichnet, d. h. die Größen in Ansehung der nämlichen Ebene der x und y; und hierauf überhaupt durch $dz + p dx + q dy = o$ die Differentialgleichung der Oberfläche des flüssigen Körpers vorstellt, (wo p, q positiv oder negativ seyn können) man allezeit die 3 Integralausdrücke

$$S(\lambda'' \partial x'' - \lambda' \partial x') dy dz + S(\lambda'' \partial y'' - \lambda' \partial y') dx dz$$

$$+ S(\lambda'' \partial z'' - \lambda' \partial z') dx dy$$ der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts (15) auf folgende 2 bringen kann:

$S\lambda''$

Digitized by Google

$$S\,\lambda''\,(\delta z'' + p''\,\delta x'' + q''\,\delta y'')\,dx\,dy = S\,\lambda'\,(\delta z' + p'\delta x' + q'\delta y')\,dx\,dy.$$

Es ist aber $dz + p\,dx + q\,dy = o$ die Gleichung einer krummen Oberfläche, folglich wird es nach der bekannten Theorie ein Multiplikator r geben, der diese Gleichung integrabel macht, so daß man immer haben wird

$$r\,(dz + p\,dx + q\,dy) = du$$

wo du das vollkommene Differential der Größe u ist, die eine Funktion von x, y, z ist.

Verwandelt man also d in δ bei der Differentiation von u; so hat man auch

$$r\,(dz + p\,\delta x + q\,\delta y) = \delta u;$$

folglich $\delta z + p\,\delta x + q\,\delta y = \frac{\delta u}{r}$.

Bezeichnet man also alle Größen mit einem oder 2 Strichen in Beziehung auf die vordere oder hintere Fläche des flüssigen Körpers, und substituirt dieselben in den obigen Integralausdrücken; so werden diese

$$S\,\frac{\lambda''\,\delta u''}{r''}\,dx\,dy - S\,\frac{\lambda'\,\delta u'}{r'}\,dx\,dy.$$

23) Es sey jetzt ds das Element der Fläche des flüssigen Körpers, dessen allgemeine Gleichung ist:

$$dz + p\,dx + q\,dy = o$$

so hat man bekanntlich

$$ds = dx\,dy\,\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}.$$

Sieht man also u als eine Funktion von x, y, z an; so hat man der bekannten Bezeichnung gemäß

r =

Digitized by Google

$$r = \frac{du}{dz}, \quad rp = \frac{du}{dx}, \quad rq = \frac{du}{dy};$$

folglich $\frac{dx\,dy}{r} = \frac{ds}{r\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$

$$= \frac{ds}{\sqrt{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]}}$$

Setzt man also Kürze halber

$$V = \sqrt{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]}$$

und bezeichnet man alle Größen mit einem oder zweien Strichen, um sie auf die vordere oder hintere Oberfläche des flüssigen Körpers zu beziehen; so kann man den vorigen Integralausdrücken folgende Form geben:

$$S\,\frac{\lambda''\,\partial u''}{V''}\,ds'' - S\,\frac{\lambda'\,\partial u'}{V'}\,ds'$$

Nach dem aber was (2 Abschn. 8) gesagt ist, sieht man, daß die Größe $\lambda ds + \frac{\partial u}{V}$ das Moment einer Kraft vorstellen kann, die $= \lambda ds$ und an dem Element ds der Oberfläche des flüssigen Körpers senkrecht auf dieser Oberfläche angebracht ist, deren Gleichung wir ∂u oder $du = 0$ angenommen haben (22).

Der Integralausdruck $S\,\frac{\lambda''\,\partial u''}{V''}\,ds''$ wird also die Summe der Momente der Kräfte λ'' vorstellen, die auf jeden Punkt der hintern Oberfläche der flüssigen Masse in senkrechten Richtungen auf diese Oberfläche würken.

Eben so wird Integralausdruck $S\,\frac{\lambda'\,\partial u'}{V'}\,ds'$ die Summe der Momente der Kräfte λ', die auf jeden Punkt der Oberfläche ebenfalls

Digitized by Google

nach senkrechten Richtungen würken, vorstellen; also wird $-\delta\frac{\lambda' \delta y'}{V'} ds'$ die Summe der Momente dieser letztern Kräfte im entgegengesetzten Sinn seyn, d. h. wenn man ihre Richtungen den Richtungen der Kräfte λ'' in Beziehung auf die Ebene der x und y entgegengesetzt annimt; welches mit dem einerlei ist, daß alle auf die Oberfläche der flüssigen Masse angebrachte Kräfte senkrecht auf dieser Oberfläche ihre Richtungen haben, und entweder vom innern ins äussere oder vom äussern ins innere würken.

24) Weil also die Integralausdrücke die in der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts einer unpreßbaren flüssigen Maße würken, und die zu den Punkten der Oberfläche dieser Masse gehören, der Summe der Momente einer unendlichen Menge von Kräften λ gleich sind, die senkrecht auf alle Punkte dieser Oberfläche angebracht sind; so folgt, daß diese Kräfte bey der Oberfläche des flüssigen Körpers würklich statt finden müssen, und man sieht leicht ein, daß sie nichts anders sind als der Druck, den der flüssige Körper in allen Punkten der Oberfläche, vermöge der auf seine ganze Masse würkenden Kräfte ausübt.

25) Dieser Druck wird daher überhaupt durch die Größe λ oder durch die Formel $\int \Delta (Xdx + Ydy + Zdz)$, die zur Oberfläche des flüssigen Körpers gehört, ausgedrückt werden können. Es ist aber klar, daß überall, wo der flüssige Körper frey ist, sie im Zustande des Gleichgewichts $= 0$ seyn muß, und daß wo die Oberfläche des flüssigen Körpers auf die Oberfläche irgend eines festen Körpers stößt, dieser Körper die Würkung der auf der Oberfläche angebrachten Kräfte λ aufhalten muß. Hieraus ist's nun leicht, die Gesetze des Gleichgewichts der flüssigen Körper mit den festen, die sie einschliessen, oder die darin eingetaucht sind, herzuleiten. Sie sind aber nur allzu bekannt, als daß wir nöthig hätten uns damit aufzuhalten, sie weiter auseinander zu setzen. Wir enthalten uns auch besondere Anwendungen der allgemeinen Theorie des Gleichgewichts der unpreßbaren flüssigen Körper zu geben, in dem wir nichts zu dem hinzuzusetzen wissen, was andere Schriftsteller schon davon gesagt haben.

Digitized by Google

Achter Abschnitt.

Vom Gleichgewicht der unpreßbaren und elastischen Flüssigkeiten.

1) Es seyen wie (7 Abschn. 13) X, Y, Z die Kräfte die auf jeden Punkt der flüssigen Masse würken, die auf die Direktionen der Coordinaten x, y, z gebracht sind, und diese Coordinaten zu verringern streben: so hat man sogleich:

$$S\,(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z)\,dm$$

für die Summe ihrer Momente.

Bey den elastischen Flüssigkeiten giebt es aber noch ausserdem eine innere Kraft, die man Elasticität nennt, und sie auszubreiten oder ihr Volumen zu vermehren strebt. Es sey daher ε die Elasticität eines gewissen Theilchens dm. Diese Kraft wird also, da sie das Volumen dx, dy, dz eben dieses Theilchens zu vermehren strebt, die Größe $-dx, dy, dz$ zu vermindern trachten. Sie wird also zum Moment die Größe $-\varepsilon\partial\,(dx, dy, dz)$ haben, oder man kann sie wenigstens so ansehen. Alsdann ist also die Summe der Momente, die von der Elasticität der ganzen flüssigen Masse herkommen $= -S\,\varepsilon\partial\,(dx, dy, dz)$ folglich ist die ganze Summe der Momente der Kräfte, die auf den flüssigen Körper würken:

$$S\,(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z)\,dm - S\,\varepsilon\partial\,(dx\,dy\,dz)$$

und da hier weiter keine besondere Bedingung zu erfüllen ist; so wird man die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts bekommen, wenn man diese Summe $= 0$ setzt.

2) Man erhält also auf diese Art für das Gleichgewicht der elastischen flüssigen Körper eine Gleichung von der nämlichen Form, als wir (7 Abschn. 13.) für's Gleichgewicht unpreßbarer Flüssigkeiten gefunden

Digitized by Google

haben, weil nämlich in dieser $\delta L = \delta(dx\,dy\,dz)$ (14); so wird dadurch das Glied $S\lambda\,\delta L$, welches von der Bedingung der Unpreßbarkeit herkommt, dem Gliede $S\,s\,\delta(dx\,dy\,dz)$, welches zu den Momenten der elastischen Kräfte gehört, völlig ähnlich.

3) Es folgt also hieraus, daß die für's Gleichgewicht der unpreßbaren Flüssigkeiten gefundene Formeln sich sogleich und ohne weitere Einschränkung auf das Gleichgewicht elastischer Flüssigkeiten anwenden lassen, wenn man nur den Coefficient λ in $-s$ verwandelt, d. h. wenn man annimmt, daß die Größe λ negativ genommen, die Kraft der Elasticität jedes Elements des flüssigen Körpers ausdrückt. Man hat hier also nur alles das zu wiederholen, was wir im vorhergehenden Abschnitt vom 14 Artikel an bis ans Ende gezeigt haben.

4) Man setzt gewöhnlich die Elasticität der Dichtigkeit, oder überhaupt einer gewissen Funktion der Dichtigkeit proportional. Man hat daher $s = -\lambda = \varphi\Delta$ (wenn man Δ die Dichtigkeit nennt); die Bestimmung von Δ hängt folglich von folgender Gleichung ab (7. Abschn. 17.):

$$d.\varphi\Delta = \Delta(Xdx + Ydy + Zdz)$$

welches giebt

$$\frac{d.\varphi\Delta}{\Delta} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Nun ist $\frac{d.\varphi\Delta}{\Delta}$ ein vollkommenes Differential einer Funktion von Δ; folglich muß auch $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollkommenes Differential seyn; anders kann kein Gleichgewicht statt finden. Man hat also den Fall (7 Abschn. 18.), woraus man auch die nämlichen Folgerungen zu ziehen hat.

Ende des ersten Theils der analytischen Mechanik.

Zweis

Digitized by Google

Zweiter Theil

der

analytischen Mechanik oder die Dynamik.

Digitized by Google

Digitized by Google

Zweiter Theil
der
analytischen Mechanik oder die Dynamik.

Erster Abschnitt.
Von den verschiedenen Grundlehren der Dynamik.

Die Dynamik ist die Wissenschaft der beschleunigenden und verzögerenden Kräfte und der verschiedenen daraus entspringenden veränderlichen Bewegungen. Man hat sie ganz den Neuern zu verdanken, Galiläus legte dazu den ersten Grund. Vor ihm hatte man die auf die Körper würkende Kräfte nur im Zustande des Gleichgewichts betrachtet, und ohnerachtet man den beschleunigten Fall der schweren Körper, und die krummlinichte Bewegung der geworfenen Körper keiner andern Ursache als der beständigen Würkung der Schwere zuschreiben konnte; so hatte es doch niemanden geglückt, die Gesetze dieser alltäglichen Erscheinungen bey einer so simpeln Ursache zu bestimmen. Galiläus that zuerst diesen wichtigen Schritt, und eröfnete dadurch einen neuen und unermeßlichen Weg zur Vervollkommung der Mechanik. Man findet diese Entdeckungen vorgetragen und entwickelt in seinem Werke, das den Titel führt: Dialoghi delle scienze nuove etc., und das zuerst zu Leyden im Jahr 1637 herauskam. Sie verschafften dem Galiläus aber unter seinen Zeitgenossen nicht soviel Ruhm als diejenigen, die er über das Weltsystem machte, aber

jetzt

Digitized by Google

jetzt machen sie den festesten und reelsten Theil des Ruhms dieses großen Mannes aus.

Die Entdeckungen der Jupitersſatelliten, der Gestalten der Venus, der Sonnenflecken ꝛc. erfoderten nichts weiter als Teleskope und Fleis; aber es wurde ein nicht gemeines Genie erfodert, die Gesetze der Natur bey Phänomenen zu entdecken, die man allezeit unter Augen gehabt hatte, deren Erklärung aber allezeit den Untersuchungen der Philosophen entgangen war.

Huyghens, der dazu bestimmt zu seyn schien, den größten Theil der Galiläischen Erfindungen zu vervollkomnen und zu ergänzen, fügte zur Theorie der beschleunigten Bewegung der schweren Körper, die der Pendel und Centrifugal-Kräfte hinzu, und bahnte auf diese Art den Weg zu der großen Erfindung der allgemeinen Schwere.

Die Mechanik ward zu einer neuen Wissenschaft unter den Händen Newtons, seine Principien, die zuerst 1687 erschienen, waren die Epoche dieser Revolution.

Endlich setzte die Erfindung des Infinitesimalcalkuls die Geometer in den Stand die Gesetze der Bewegung der Körper auf analytische Gleichungen zu bringen, und die Untersuchung der Kräfte und der daraus entspringenden Bewegungen wurde nachher der vornehmste Gegenstand ihrer Arbeiten.

Ich habe mir vorgesetzt ihnen hier ein neues Mittel an die Hand zu geben, diese Untersuchung zu erleichtern; aber vorher wird es nicht unnütz seyn die Grundsätze vorzutragen, die der Dynamik zu Grundfesten dienen, und zu zeigen, wie die Ideen, die das meiste zur Erweiterung und Vervollkomnung dieser Wissenschaft beygetragen haben, auf einem der stufenweise folgten.

Die Theorie der veränderlichen Bewegungen und der beschleunigenden Kräfte, die dieselbe hervorbringen, gründet sich auf diese allgemeine Gesetze, daß jede einem Körper eingedrückte Bewegung ihrer Natur nach gleichförmig und geradlinicht ist, und daß verschiedene einem Körper auf einmal oder nach und nach eingedrückte Bewegungen so würken, daß der

Körper

Digitized by Google

Körper in jedem Augenblick sich in demselben Punkt des Raumes befindet, worin er sich durch die Verbindung dieser Bewegungen, wenn jede einzeln bey dem Körper würklich statt finde, befinden müßte. In diesen beiden Gesetzen bestehen die bekannten Grundsätze der Kraft der Trägheit, und der zusammengesetzten Bewegung. Galiläus nahm zuerst diese beiden Grundsätze an, und leitete daraus die Gesetze der Bewegung der geworfenen Körper her, indem er die schiefe Bewegung, d. i. die Würkung des dem Körper mitgetheilten Stoßes mit seinem perpendiculairen Fall, welcher von der Würkung der Schwere herrührt, zusammensetzte.

Was die Gesetze der beschleunigten Bewegung der schweren Körper betrifft; so lassen sie sich natürlich aus der Betrachtung der beständig und gleichförmig würkenden Kraft der Schwere herleiten, vermöge der die Körper in gleichen Augenblicken gleiche Grade der Geschwindigkeit nach einerlei Richtung annehmen, daher denn die ganze erlangte Geschwindigkeit am Ende einer gewissen Zeit dieser Zeit proportional ist; und es ist klar, daß dieses beständige Verhältnis der Geschwindigkeiten zur Zeit der Stärke der Kraft selbst proportional seyn muß, die die Schwere anwendet um den Körper zu bewegen. Bey der Bewegung auf schiefen Ebenen kann dieses Verhältnis also der absoluten Kraft der Schwere so wie bei der vertikalen Bewegung nicht proportional seyn, sondern der relativen Kraft, welche von der Neigung der Ebene abhängt, und durch die Regeln der Statik bestimmt wird. Dies giebt ein leichtes Mittel an, die Bewegungen der Körper zu vergleichen, die auf verschieden geneigten Ebenen herabfallen.

Indessen scheint doch Galiläus auf diese Art die Gesetze des Falles der schweren Körper nicht entdeckt zu haben. Er setzte vielmehr zuerst den Begriff einer gleichförmig beschleunigten Bewegung fest, wobey die Geschwindigkeiten wie die Zeiten wachsen; hieraus leitete er geometrisch die vorzüglichsten Eigenschaften dieser Art von Bewegung, und besonders das Gesetz her, daß die Räume wie die Quadrate der Zeiten zunehmen, endlich überzeugte er sich durch die Erfahrung, daß dieses Gesetz würklich bey der Bewegung der Körper statt hat, die auf gewissen geneigten Ebenen fallen. Um aber die Bewegungen auf verschiedenen

Digitized by Google

geneigten Ebenen untereinander vergleichen zu können; so sah er sich sogleich genöthigt diesen Grundsatz mit anzunehmen, daß die durch den Fall von gleichen vertikalen Höhen erlangten Geschwindigkeiten auch allezeit gleich sind, und erst kurze Zeit vor seinem Todt, und nach der Herausgabe seiner Gespräche fand er den Beweis dieses Grundsatzes durch die Betrachtung der relativen Würkung der Schwere auf die geneigte Ebenen, welcher in der Folge in den andern Ausgaben dieses Werks eingerückt worden ist.

Das beständige Verhältnis, welches bey den gleichförmig beschleunigten Bewegungen zwischen den Geschwindigkeiten und Zeiten, oder zwischen den Räumen und den Quadraten der Zeiten statt finden muß, kann daher für das Maas der beschleunigenden Kraft angesehen werden, die beständig auf die Körper würkt; denn in der That kann diese Kraft nur nach der Würkung beurtheilt werden, die sie auf den Körper hervorbringt, und die in den erzeugten Geschwindigkeiten oder in den in gleichen Zeiten durchlaufenen Räumen besteht.

Es ist also für diese Schätzung der Kräfte genug, die in einer gewissen endlichen oder unendlich kleinen Zeit erzeugte Bewegung zu betrachten, wenn man die Kraft nur während dieser Zeit als beständig ansieht. Man kann daher, wie auch die Bewegung des Körpers und das Gesetz der Beschleunigung beschaffen seyn mag, jederzeit den Werth der Kraft bestimmen, die jeden Augenblick auf ihn würkt, wenn man die in diesem Augenblicke erzeugte Geschwindigkeit mit der Dauer dieses Augenblicks oder mit dem Raum vergleicht, den sie den Körper während diesem Augenblick mit dem Quadrat der Dauer desselben durchlaufen läßt; und es ist darum nicht nöthig, daß dieser Raum würklich durch den Körper beschrieben werde, man braucht es nur sich vorzustellen, daß er durch eine zusammengesetzte Bewegung beschrieben worden sey, indem die Würkung der Kraft nach den oben vorgetragenen Grundsätzen der Bewegung in beiden Fällen die nämliche ist.

Auf diese Art entdeckte Huyghens die Gesetze der Centrifugalkräfte der in Zirkeln mit beständigen Geschwindigkeiten bewegten Körper, und verglich diese Kräfe sowohl untereinander als mit der Kraft der Schwere

auf

Digitized by Google

auf der Oberfläche der Erde, wie man aus den Beweisen sieht, die er von seinen Lehrsätzen über die Centrifugalkraft am Ende des Traktats de horologio oscillatorio, der 1673 erschien, hinterlassen hat.

Jedoch gieng Huyghens hierin nicht weiter, es war vielmehr dem Newton vorbehalten, diese Theorie bis auf gewisse krumme Linien zu erweitern, und die Wissenschaft der veränderlichen Bewegungen, und der sie erzeugenden beschleunigenden Kräfte zu ergänzen. Es besteht diese Wissenschaft jetzt nur aus einigen sehr simpeln Differentialformeln; indessen bediente sich doch Newton stets der geometrischen Methode, die er nur durch die Betrachtung der ersten und letzten Verhältnisse einfacher machte, und gebrauchte er bisweilen den analytischen Calkul, so war es einzig und allein die Methode der Reihen, die er anwendete, die wohl von der Methode der Differentialrechnung unterschieden werden muß, so leicht es auch ist eine auf die andere zu bringen, und auf einerlei Grundsatz zurückzuführen.

Die Geometer, die nach Newton die Theorie der beschleunigenden Kräfte abhandelten, begnügten sich meistens nur damit, seine Lehrsätze allgemeiner zu machen, und auf Differentialausdrückungen zu bringen.

Daher sind die verschiedenen Formeln der Centralkräfte entstanden, die man in den meisten mechanischen Werken findet, deren man sich aber jetzt nicht mehr bei den Untersuchungen über die Bewegung der durch gewisse Kräfte getriebenen Körper bedient, weil man eine viel einfachere Methode hat, diese Aufgaben auf Gleichungen zu bringen.

Stellt man sich vor, die Bewegung eines Körpers und der auf ihn würkenden Kräfte seyen nach 3 geraden auf einander senkrechten Linien zerlegt; so kann man die auf jede der 3 Direktionen sich beziehende Bewegungen und Kräfte einzeln betrachten. Denn wegen der Perpendikularität der Direktionen ist's offenbar, daß jede dieser besondern Bewegungen als unabhängig von den beiden andern betrachtet werden kann, und daß nur die Kraft, die nach der Direktion dieser Bewegung würkt, im Stande ist eine Aenderung dabei hervorzubringen. Hieraus läßt sich also schliessen, daß jede dieser 3 Bewegungen insbesondere den Gesetzen

Digitized by Google

der geradlinichten beschleunigten oder verzögerten Bewegungen durch gegebene Kräfe folgen muß. Bey der geradlinichten Bewegung aber besteht die Würkung der beschleunigenden Kraft darin, daß sie die Geschwindigkeit des Körpers ändert, diese Kraft muß also durch das Verhältnis zwischen dem Zuwachs oder der Abnahme der Geschwindigkeit während eines gewissen Augenblicks, und der Dauer dieses Augenblicks, d. h. durch das Differential der Geschwindigkeit dividirt, durch das Differentkal der Zeit gemessen werden; die Geschwindigkeit bey den veränderlichen Bewegungen aber wird durch das Differential des Raumes dividirt, durch das Differential der Zeit ausgedrückt, hieraus folgt also, daß die erwähnte Kraft durch das 2te Differentkal des Raumes dividirt durch das Quadrat des ersten Differentials der Zeit, wenn man dies als beständig annimt, gemessen wird. Es wird daher auch das 2te Differential des Raums, den der Körper nach jeder der 3 senkrechten Direktionen durchlauft, oder den man sich wenigstens von ihm durchlaufen denken kann, dividirt durch das Quadrat des beständigen Differentials der Zeit die beschleunigende Kraft ausdrücken, wodurch der Körper nach eben dieser Direktion getrieben werden muß; und wird folglich der würklichen Kraft gleich seyn, die man nach dieser Direktion würkend angenommen hat.

Es ist nicht nothwendig, daß die 3 Direktionen, worauf man die Bewegungen des Körpers während eines gewissen Augenblicks bezieht, volkommen fest seyen, es ist genug, wenn sie es während dieses Augenblicks sind. Man kann also bey Bewegungen in krummen Linien in jedem Augenblick diese Direktionen annehmen, und zwar die eine in der Tangente und die beiden andern in den auf diese krumme Linie senkrechten Linien. Die beschleunigende Kraft also, die nach der Tangente würkt, und die man Tangentialkraft nennt, wird ganz dazu verwendet die absolute Geschwindigkeit des Körpers zu ändern, und wird durch das Element dieser Geschwindigkeit dividirt, durch das Element der Zeit ausgedrückt werden. Dieses setzt den so bekannten Grundsatz der beschleunigenden Kräfte fest.

Die Kräfte im Gegentheil, die senkrecht würken, verändern nur die Direktion des Körpers, und hängen von der Krümmung der Linie, die

er

er beschreibt, ab. Bringt man diese beiden letztern Kräfte auf eine; so muß die Direktion dieser letztern in der Ebene der Krümmung seyn, und ihr Werth kann durch das Quadrat der Geschwindigkeit dividirt, durch den Radius der Krümmung d. h. durch den Radius des Zirkels, der die Krümmung der krummen Linie in jedem Punkte mißt, und der auch Krümmungshalbmesser (circulus osculi) genannt wird, ausgedrückt werden.

Eben diesen Ausdruck hatte auch Huyghens für die Centrifugalkraft der Körper gefunden, die mit gleichförmigen Geschwindigkeiten Zirkel beschreiben, und er gilt allgemein für alle krumme Linien und Geschwindigkeiten, wenn man den Körper so betrachtet, als wenn er sich jeden Augenblick in diesem Krümmungshalbmesser bewegte.

Viel einfacher ist es indessen die Bewegung des Körpers auf feste Direktionen im Raume zu beziehen. Nimmt man also, um den Ort des Körpers im Raume zu bestimmen, drei rechtwinklichte Coordinaten an, die einerlei Direktionen haben; so werden die Variationen dieser Coordinaten offenbar die von dem Körper nach den Direktionen dieser Coordinaten durchlaufenen Räume vorstellen; folglich werden die zweiten Differentialen eben dieser Coordinaten durch das Quadrat des beständigen Differentials der Zeit dividirt die beschleunigenden Kräfte ausdrücken, die nach diesen nämlichen Coordinaten würken. Setzt man daher diese Ausdrücke denen der durch die Natur der Aufgabe gegebenen Kräfte gleich; so hat man 3 ähnliche Gleichungen, die alle Umstände der Bewegung zu bestimmen dienen. Diese Methode, die Bewegung eines durch gewisse beschleunigende Kräfte getriebenen Körpers zu bestimmen, ist wegen ihrer Einfachheit allen andern vorzuziehen; und es scheint Maclaurin der erste zu seyn, der sie in seinem treatise on fluxions, der 1742 heraus kam, anwendete; sie ist jetzt allgemein angenommen worden.

Durch die eben vorgetragenen Grundsätze ist man jetzt im Stande die Gesetze der Bewegung eines freyen Körpers zu bestimmen, der durch gewisse Kräfte getrieben wird, wenn man den Körper nur als einen Punkt ansieht.

Digitized by Google

Eben diese Grundsätze aber lassen sich bey der Untersuchung der Bewegung mehrerer Körper anwenden, wovon einer den andern nach einem gewissen Gesetze anzieht, welches eine bekannte Funktion der Distanzen sey; endlich ist es nicht schwer, sie bis auf die Bewegungen in widerstehenden Mitteln, so wie auch auf diejenigen, die auf gegebenen krummen Flächen geschehen, zu erstrecken. Denn die Resistenz des Mittels ist nichts anders als eine Kraft, die der gerade entgegenwürkt, die den Körper zu bewegen strebt, und ist der Körper gezwungen sich auf einer gegebenen Oberfläche zu bewegen, so ist nothwendig eine auf die Oberfläche senkrechte Kraft vorhanden, die ihn darauf fest hält, und deren unbekannter Werth nach den aus der Natur dieser Oberfläche herfliesenden Bedingungen bestimmt werden kann.

Sucht man aber die Bewegung mehrerer Körper, wovon die einen auf den andern durch einen Stoß oder Druck würken, es sey nun unmittelbar oder wie beim gewöhnlichen Stos oder durch Faden oder unbiegsamen Hebeln, woran sie fest sind, oder auf irgend eine andere Art, alsdann gehört die Aufgabe zu einer höhern Ordnung und kann durch die vorhergehenden Grundsätze nicht aufgelöst werden. Denn hier sind die auf die Körper würkende Kräfte unbekannt, und man muß sie aus der Würkung, die die Körper unter einander nach ihrer gegenseitigen Stellung ausüben, herleiten. Man muß daher nothwendig noch einen andern Grundsatz zu Hülfe nehmen, der dazu dient, die Kraft der in Bewegung sich befindenden Körper aus ihrer Masse und Geschwindigkeit zu bestimmen.

Dieser Grundsatz besteht darin, daß um einer gegebenen Masse eine gewisse Geschwindigkeit nach einer gewissen Direktion zu ertheilen, man eine Kraft nöthig hat, deren Werth dem Produkt der Masse in die Geschwindigkeit proportional ist, und die eine Richtung hat, die der dieser Geschwindigkeit gleich ist, diese Masse mag übrigens in Ruhe oder in Bewegung seyn. Dies Produkt der Masse eines Körpers in seine Geschwindigkeit wird gemeiniglich die Größe der Bewegung *) dieses Körpers genannt,

*) Quantité de mouvement ist mit quantité du mouvement bey den französischen Mathematikern einerley, eben so kann man auch im Deutschen sagen Bewegungsgröße oder Größe der Bewegung. M.

Digitized by Google

nannt, weil sie in der That die Summe der Bewegungen aller materieller Theile des Körpers ist. Die Kräfte werden also durch die Größen der Bewegungen, die sie hervorzubringen im Stande sind, gemessen und gegentheils ist die Größe der Bewegung eines Körpers das Maaß der Kraft, die der Körper gegen ein Hinderniß auszuüben im Stande ist, und die Stos genannt wird. Hieraus folgt, daß wenn zwey nicht elastische Körper völlig nach entgegengesetzten Richtungen mit gleichen Bewegungsgrößen gegen einander stoßen, ihre Kräfte einander das Gegengewicht halten und einander aufheben müssen; folglich müssen in diesem Falle die Körper einander aufhalten und so in Ruhe bleiben. Geschähe der Stos aber vermittelst eines Hebels; so müßten, wenn die Bewegung der Körper aufgehoben werden sollte, ihre Kräfte dem bekannten Gesetz des Gleichgewichts des Hebels folgen.

Descartes scheint diesen Grundsatz zuerst wahrgenommen zu haben, aber er irrte, da er ihn auf den Stos der Körper anwendete, indem er glaubte, die nämliche Größe der absoluten Bewegung müsse sich immer erhalten.

Wallis ist eigentlich der erste, der eine deutliche Idee von diesem Grundsatze hatte, und der sich desselben mit Vortheil dazu bediente, die Gesetze der Mittheilung der Bewegung beim Stos harter oder elastischer Körper zu bestimmen, wie man aus den philosophischen Transaktionen von 1669 und aus dem 9ten Theile seines Traktats de motu, den er 1671 herausgab, sieht.

Es drücke ferner das Produkt der Masse in die Geschwindigkeit die endliche Kraft eines in Bewegung sich befindenden Körpers aus; so wird das Produkt der Masse in die beschleunigende Kraft, die, wie wir gesehen haben, durch das Element der Geschwindigkeit dividirt durchs Element der Zeit vorgestellt wird, die Elementar-Kraft im Anfang ausdrücken; und betrachtet man nun diese Größe als das Maaß der Würkung die der Körper vermöge seiner elementairen Geschwindigkeit die er angenommen hat, oder anzunehmen strebt, ausüben kann, so hat man das was man Druck nennt; sieht man sie aber als das Maaß

der

Digitized by Google

der Kraft an, die erfodert wird diese Geschwindigkeit hervorzubringen; so ist sie eben das, was man bewegende Kraft nennet.

Drucke oder bewegende Kräfte heben sich daher auf oder sind einander im Gleichgewicht, wenn sie einander gleich und gerade entgegengesetzt sind, oder, wenn sie an irgend eine Maschiene angebracht sind, und dem Gesetzen des Gleichgewichts derselben folgen.

Sind die Körper dergestalt unter einander verbunden, daß sie den empfangenen Stößen und beschleunigenden Kräften, wovon sie getrieben werden, nicht frey folgen können; so üben diese Körper nothwendig auf einander beständig Drückungen aus, die Aenderung in ihren Bewegungen hervorbringen und dadurch die Bestimmung erschweren.

Die erste und einfachste Aufgabe von dieser Art, womit sich die Geometer beschäftiget haben, ist die von den Mittelpunkten des Schwungs. Sehr berühmt ward dieselbe im letzt verflossenen Jahrhundert, und im Anfang des gegenwärtigen durch die Bemühungen und Versuche, die die größten Geometer anwendeten, um dabey zum Zweck zu gelangen. Da man diesen Untersuchungen die unermeßlichen Fortschritte verdankt, die man seitdem in der Dynamik gemacht hat, so glaube ich hier eine kurze Geschichte derselben geben zu müssen, um zu zeigen, nach welchen Stuffen sich diese Wissenschaft zu der Vollkommenheit erhub, welche sie in diesen letzten Zeiten erlangt zu haben scheint.

Die ersten Spahren von Untersuchungen über die Mittelpunkte des Schwungs finden sich in Descartes Briefen. Man sieht hieraus, daß der Pater Mersemius ihm aufgegeben hatte, die Größe zu bestimmen, die ein Körper von irgend einer Figur haben muß, damit, wenn er an einem Punkt aufgehangen sey, seine Oscillationen inerlei Zeit mit einem Faden von einer gegebenen Länge, der mit einem einzigen Gewicht an seinem Ende beschwert ist, mache. Descartes bemerkte, daß diese Aufgabe einige Aehnlichkeit mit der des Schwerpunkts hat, und daß eben so wie bey einem schweren Körper, der frey fällt, ein Schwerpunkt statt findet, um den die Würkungen der Schwere aller Theile des Körpers im Gleichgewicht sind, so daß dieser Mittelpunkt

auf

Digitized by Google

auf dieselbe Art herabfällt, als wenn der Ueberreß des Körpers vernichtet, oder in eben diesem Mittelpunkt vereinigt wäre. Bey schweren Körpern also, die sich um eine feste Achse bewegen, muß ein Mittelpunkt statt finden, den er Mittelpunkt der Bewegung nennt, um den die Bewegungskräfte aller Theile des Körpers sich dergestalt im Gegengewicht halten, daß wenn dieser Mittelpunkt von der Würkung dieser Kräfte frey wäre, er so bewegt werden könne, wie es geschehen würde, wenn die andern Theile des Körpers vernichtet oder in eben diesem Mittelpunkte vereinigt wären. Alle Körper, worinn dieser Mittelpunkt gleichweit von der Umdrehungsachse absteht, müssen folglich ihre Vibration in gleicher Zeit machen.

Nach diesem Begriff vom Mittelpunkt der Bewegung giebt Descartes eine allgemeine Methode ihn bey Körpern von beliebigen Figuren zu bestimmen. Diese Methode besteht darin, den Mittelpunkt der Schwere der Bewegungskräfte aller Theile des Körpers zu suchen, indem man diese Kräfte nach den Produkten der Massen in die Geschwindigkeiten, die hier den Distanzen von der Umdrehungsachse proportional sind, schätzt und annimmt, die Theile des Körpers seyen auf der Ebene, die durch seinen Mittelpunkt der Schwere und durch seine Umdrehungsachse gehen, dergestalt projicirt, daß sie immer einerlei Distanz von dieser Achse behalten.

Diese Voraussetzung geht jedoch hier nicht an, indem der Effekt der Kräfte nicht nur von der Größe der Bewegung, sondern auch von der Direktion abhängt. Auch findet Descartes Regel nur alsdann statt, wenn alle Theile des Körpers sich entweder würklich in einer durch die Umdrehungsachse gehenden Ebene befinden, oder man sie sich wenigstens so vorstellen kann. In allen andern Fällen hat man nur die auf die durch die Umdrehungsachse und den Mittelpunkt der Schwere gehende Ebene senkrechte Bewegungen zu erwägen, und man muß jedes Theilchen auf den Punkt beziehen, wo diese Ebene mit der Direktion der Bewegung dieses Theilchens zusammentrifft. Diese Direktion ist allezeit auf der Ebene dieses Theilchens und der Umdrehungsachse senkrecht. Dieser Mangel der Carteſianiſchen Regel wurde von Roberval wahrgenommen, und veranlaßte einen Streit zwiſchen dieſen beiden Geometern, worin das Recht ganz auf des leztern Seite zu ſeyn ſchien.

Digitized by Google

Roberval giebt genaue Bestimmungen der Bewegungsmittelpunkte der Zirkelausschnitte und Bogen, die sich senkrecht auf ihre Ebene bewegen, und zeigt die Unzulänglichkeit der Regel seines Gegners in diesem Falle; aber nach seiner Gewohnheit seine Methoden zu verbergen, begnügt er sich diese besondern Resultate anzuzeigen, und es ist unmöglich daraus zu beurtheilen, ob er sich im Besitz einer allgemeinen Methode befand.

Ueberdies bemerkt Roberval mit Recht, daß der erwähnte Mittelpunkt kein anderer als der Mittelpunkt des Stoßes ist, um den die Stöße oder ihre Momente gleich sind, und daß um den wahren Mittelpunkt des Schwungs eines schweren Pendels zu finden, man auch auf die Würkung der Schwere Rücksicht haben muß, vermöge der das Pendel sich bewegt. Diese Untersuchung aber war für die Mechanik der damaligen Zeit zu hoch, die Geometer fuhren daher stillschweigend fort anzunehmen, daß der Mittelpunkt des Stoßes mit dem des Schwungs einerlei sey, und Huygheus war der erste der diesen letztern Mittelpunkt unter seinem wahren Gesichtspunkt betrachtete. Auch glaubte er diese Aufgabe als ganz neu ansehen zu müssen, und da er sie durch die bekannte Gesetze der Bewegung nicht im Stande war aufzulösen, so erfand er einen neuen jedoch indirekten Grundsatz, der nachher unter den Nahmen der Erhaltung der lebendigen Kräfte berühmt geworden ist.

Betrachtet man einen Faden als eine unbiegsame Linie ohne Schwere und Masse, deren eines Ende an einem festen Punkt geheftet, das andere aber mit einem kleinen Gewicht, das man als in einen Punkt vereinigt sich vorstellen kann, beschwert ist; so hat man das, was man ein einfaches Pendel nennet, und das Gesetz der Schwingungen dieses Pendels hängt ganz allein von seiner Länge d. h. von der Distanz zwischen dem Gewicht und dem Aufhängepunkt ab. Befestigt man aber an diesem Faden noch ein oder mehrere Gewichte in verschiedenen Abständen vom Aufhängepunkt, so erhält man ein zusammengesetztes Pendel, dessen Bewegung so zu sagen ein Mittel zwischen den verschiedenen einfachen Pendeln hält, die man erhalten würde, wenn jedes dieser Gewichte allein an einem Faden aufgehängt wäre. Denn die Schwerkraft bestrebt sich auf der einen Seite alle Gewichte in gleichen Zeiten gleich fallen zu lassen, wäh-

Digitized by Google

während daß auf der andern Seite die Unbiegsamkeit des Fadens sie zwingt, in eben dieser Zeit ungleiche und ihren Entfernungen vom Aufhängepunkte proportionale Bogen zu beschreiben, es muß also zwischen diesen Gewichten eine Art von Compensation und Vertheilung ihrer Bewegungen statt finden, so daß die dem Aufhängepunkt am nächsten liegende Gewichte die Schwingungen der entferntern beschleunigen und diese wiederum die Schwingungen der erstern aufhalten werden. Es wird also in dem Faden ein Punkt anzutreffen seyn, wo ein Körper hinbefestigt, weder eine durch die andere Gewichte beschleunigte noch eine verzögerte Bewegung haben würde, und wo es eben so seyn würde, als wäre er allein an dem Faden aufgehängt. Dieser Punkt würde der wahre Mittelpunkt des Schwungs des zusammengesetzten Pendels seyn, und ein solcher Mittelpunkt muß sich auch in jedem festen Körper, seine Figur mag auch beschaffen seyn, wie sie will, finden, wenn er um eine horizontale Achse oscillirt.

Es sah Huyghens wohl ein, daß man diesen Mittelpunkt nicht mathematisch streng bestimmen könne, ohne das Gesetz zu kennen, nach dem die verschiedenen Gewichte des zusammengesetzten Pendels gegenseitig die Bewegungen ändern, die die Schwere ihnen jeden Augenblick einzudrücken sich bestrebt; aber anstatt dieses Gesetz aus den Fundamentalsätzen der Mechanik herzuleiten begnügte er sich einen indirekten Grundsatz hier anzuwenden, der darin besteht, daß man annimmt, daß wenn mehrere auf irgend eine Weise an einem Pendel befestigte Gewichte durch die bloße Würkung der Schwere herabfallen, und man sie sich nun in einen Augenblick abgebunden und von einander getrennt vorstellt, jeder derselben vermöge seiner durch den Fall erlangten Geschwindigkeit zu einer solchen Höhe steigen wird, daß der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Schwere zu derselben Höhe gelangt, wovon er heruntergefallen ist. Zwar setzte Huyghens diesen Grundsatz in der That nicht unmittelbar fest, sondern leitete ihn von 2 Hypotheſen her, die er als mechanische Forderungen annehmen zu müssen glaubte, die eine ist, daß der Mittelpunkt der Schwere eines Systems von schweren Körpern nie zu einer größern Höhe steigen kann, als wovon er gefallen ist, wie man auch die gegenseitige Stellung der Körper verändern mag, weil sonst eine immerwährende Bewegung statt finden könnte; die zweite ist, daß ein zusammengesetztes

Digitized by Google

Pendel von selbst jeder Zeit zu derselben Höhe steigen kann, wovon es frey gefallen ist.

Uebrigens merkt er noch an, daß der nämliche Grundsatz auch bey der Bewegung der auf irgend eine Art untereinander verbundenen schweren Körper, sowie auch bey der Bewegung der flüssigen Körper statt findet.

Umsonst würde man es zu errathen versuchen, was eigentlich bey diesem Schriftsteller die Idee eines solchen Grundsatzes veranlaßt habe, aber vermuthen kann man wohl, daß er dazu durch den Lehrsatz verleitet worden ist, den Galiläus in Ansehung des Falles der schweren Körper erwiesen hatte, die, es sey nun daß sie vertikal oder auf schiefen Ebenen herunterfallen, allezeit Geschwindigkeiten erlangen, die im Stande sind sie wieder zu denselben Höhen zu erheben, wovon sie gefallen sind. Dieses Theorem allgemeiner gemacht, und auf den Mittelpunkt der Schwere eines Systems von schweren Körpern angewendet, giebt den Satz Huyghens.

Es mag dies nun seyn wie es will; so ist doch soviel sichtbar, daß dieser Satz eine Gleichung zwischen der vertikalen Höhe, wovon der Mittelpunkt der Schwere des Systems in einer gewissen Zeit gefallen ist, und den verschiedenen vertikalen Höhen, wozu die das System ausmachende Körper mit ihren erlangten Geschwindigkeiten gestiegen sind, und die sich nach den Lehrsätzen des Galiläus wie die Quadrate dieser Geschwindigkeit verhalten, verschaffen wird.

Bey einem um eine horizontale Achse oscillirenden Pendel aber verhalten sich die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte, wie ihre Entfernungen von dieser Achse; man kann also die Gleichung nur auf zwey unbekannte Größen bringen, wovon die eine der Fall des Mittelpunkts der Schwere des Pendels in einer gewissen Zeit, und die andere die Höhe ist, wozu ein gegebener Punkt dieses Pendels vermöge seiner erlangten Geschwindigkeit steigen könnte. Der Fall des Mittelpunkts der Schwere aber bestimmt den jedes andern Punkts des Pendels; man hat also eine Gleichung zwischen der Höhe, wovon ein gewisser Punkt des Pendels gefallen

Digitized by Google

fallen ist, und der, wozu er vermöge der durch seinen Fall erlangten Geschwindigkeit steigen könnte. Im Mittelpunkte des Schwungs müssen diese beiden Höhen gleich seyn, indem freie Körper jederzeit zu der nämlichen Höhe wieder steigen können, wovon sie gefallen sind, und die Gleichung zeigt, daß diese Gleichheit nur bey einem Punkt der auf der Umdrehungsachse senkrechten und durch den Mittelpunkt der Schwere des Pendels gehenden Linie, welcher von dieser Achse um eine Größe entfernt ist, die durch die Multiplication aller Gewichte, die das Pendel ausmachen, durch die Quadrate ihrer Distanzen von der Achse und durch die Division der Summe dieser Produkte, durch die mit der Distanz seines Mittelpunkts der Schwere von derselben Achse multiplicirten Masse des Pendels erhalten wird, statt finden kann. Diese Größe wird also die Länge eines einfachen Pendels ausdrücken, dessen Bewegung der des zusammengesetzten gleich seyn wird.

Huyghens hat diese Theorie in seinem Traktat de horologio oscillatorio vorgetragen, der 1673 erschien, und eine Menge schöner Anwendungen davon hinzugefügt. Es würde dabey nichts mehr noch zu wünschen übrig geblieben seyn, hätte sie nicht auf einer angenommenen Forderung beruhet, und es blieb immer noch diese zu erweisen übrig, um sie gegen jeden Angriff zu sichern.

Gegen diese Theorie erschienen im Jahr 1681 im Journal des savans de Paris einige schlechte Einwürfe, denen daher auch Huyghens nur oberflächlich und wenig befriedigend antwortete. Inzwischen zog dieser Streit doch die Aufmerksamkeit des Jacob Bernoulli auf sich und veranlaßte ihn Huyghens Theorie weiter zu untersuchen, und auf die ersten Grundsätze der Dynamik zurückzuführen. Er betrachtete zuerst nur zwei einander gleiche an einer geraden unbiegsamen Linie angeheftete Gewichte, und bemerkte, daß die Geschwindigkeit, die das erste Gewicht nämlich dasjenige, welches dem Aufhängepunkt am nächsten ist, erlangt, indem es einen gewissen Bogen beschreibt, geringer seyn muß, als diejenige, welche es erlangt haben würde, indem es frey denselben Bogen beschrieben hätte; und daß zu gleicher Zeit die durch das andere Gewicht erlangte Geschwindigkeit grösser seyn muß als diejenige, welche

Digitized by Google

es erlangt haben würde, wenn es frey den nämlichen Bogen beschrieben hätte.

Die durch's erste Gewicht verlorne Geschwindigkeit ist also dem andern mitgetheilt worden, und da diese Mittheilung vermittelst eines um einen festen Punkt beweglichen Hebels geschieht; so nimmt er an, daß sie dem Gesetz des Gleichgewichts der an diesem Hebel angebrachten Kräfte folgen muß, so daß das 2te Gewicht in der umgekehrten Verhältniß der Hebelarmen, d. h. der Distanzen vom Aufhängepunkt das an Geschwindigkeit gewinnt, was das erste verliert. Hiedurch bestimmt man leicht, indem die würklichen Geschwindigkeiten zweier Gewichte sich wie diese Distanzen verhalten, diese Geschwindigkeiten, und folglich auch die Bewegung des Pendels.

Dies ist der erste Schritt, der zur direkten Auflösung dieser berühmten Aufgabe gethan wurde. Die Idee die aus den durch die Gewichte gewonnenen oder verlohrnen Geschwindigkeiten entspringende Kräfte auf den Hebel zu beziehen, ist sehr fein, und giebt den Schlüssel zur wahren Theorie an die Hand; aber es betrog sich Jacob Bernoulli, indem er die während einer gewissen endlichen Zeit erlangten Geschwindigkeiten betrachtete, anstatt daß er die elementaren während einem Augenblick erlangten Geschwindigkeiten hätte betrachten und mit denen, die die Schwere während demselben Augenblick einzudrücken sich bestrebt, hätte vergleichen sollen. Dies that nachher der Marquis de L'Hopital in einer in das Rotterdamer Journal 1690 eingerückten Schrift. Er nimmt zwey an dem unbiegsamen Faden, der das zusammengesetzte Pendel vorstellt, befestigte Gewichte an und setzt die durch diese Gewichte gewonnene Größen mit den verlornen, d. h. die Differenzen der Bewegungsgrößen, die die Gewichte in diesem Augenblick erlangen, und die die Schwere ihnen einzudrücken sich bestrebt unter einander ins Gleichgewicht. Hiedurch bestimmt er das Verhältniß der Beschleunigung jedes Gewichts während eines Augenblicks zu dem, welche die Schwere allein ihm zu geben sich bestrebt, und findet den Mittelpunkt des Schwungs, indem er den Punkt des Pendels sucht, für den diese beiden Beschleunigungen einander gleich sind. Alsdann erstreckt er seine Thorie auf eine größere Zahl von Gewichten,

Digitized by Google

betrachtet jedoch in dieser Absicht auf eine weniger direkte Art, die unmöglich ohne Beweis angenommen werden kann, die erstern als nach und nach in ihrem Mittelpunkt des Schwungs vereinigt.

Diese Auflösung des Marquis de L'Hopital rief dem Jacob Bernoulli die seinige wieder ins Gedächtniß zurück und veranlaßte hernach die erste direkte und der geometrischen Strenge angemessene Auflösung dieses Problema's von den Mittelpunkten des Schwungs, welche um so viel mehr die Aufmerksamkeit der Geometer verdient, da sie den Keim desjenigen Princips der Dynamik enthält, davon nachher Hr. D'Alembert so häufige Anwendungen machte.

Bernoulli betrachtet die Bewegungen, die die Schwere jeden Augenblick den Körpern, woraus das Pendel besteht, eindrückt, und da diesen diese Körper wegen ihrer Verbindung unter einander nicht völlig folgen können; so stellt er sich diese eingedrückten Bewegungen als aus denen zusammengesetzt vor, die die Körper erhalten können, und aus andern, die aufgehoben werden müssen, und durch die das Pendel im Gleichgewicht bleiben muß. Auf diese Art bringt man die Aufgabe auf die Grundsätze der Statik, und kann mit Hülfe der Analysis aufgelößt werden. Hiedurch fand auch Jacob Bernoulli allgemeine Formeln für die Mittelpunkte des Schwungs von Körpern von jeder beliebigen Figur, zeigte ihre Uebereinstimmung mit Huyghens Grundsatz und Beweis, die Identität der Mittelpuncte des Schwungs und des Stosses. Diese Auflösung wurde in den Leipziger actis eruditorum von 1691 an fast erschöpft, jedoch gelangte man erst im Jahre 1703 in den Memoiren der Pariser Akademie der Wissenschaften auf eine vollständige Art dazu.

Um nichts mehr über das was die Geschichte der Aufgabe des Mittelpunkts des Schwungs betrifft, übrig zu lassen; so muß ich noch einer Auflösung erwähnen, die nachher Johann Bernoulli in eben diesen Memoiren gegeben hat, und worauf fast zu gleicher Zeit Taylor kam, und sie in seinem Werke, das den Titel: methodus incrementorum führt, bekannt machte. Dies veranlaßte einen sehr lebhaften Streit zwischen diesen beiden Geometern. So sinnreich indeß die Idee war, worauf diese neue Auflösung gebauet war, und die darinn besteht, das zusammengesetzte Pendel sogleich in ein einfaches zu verwandlen, indem

Digitized by Google

dem man an die Stelle der verschiedenenen Gewichte andere in einen Punkt vereinigt setzt, deren Massen und Schweren so beschaffen sind, daß ihre winklichte Beschleunigungsachsen einerley sind; so muß man dennoch gestehen, daß diese Idee weder so natürlich noch so einleuchtend ist, als die vom Gleichgewicht zwischen den aufgehobenen Bewegungen, worauf Jacob Bernoulli mit vieler Geschicklichkeit diese Untersuchung gebracht hatte.

Man findet ausserdem noch in Hermanns Phoronomie die 1716 herauskam, eine neue Methode die nämliche Aufgabe aufzulösen, und die auf diesem andern Grundsatz beruht, daß die bewegenden Kräfte, wovon die das Pendel ausmachende Gewichte getrieben werden, mit denen, die von der Einwürkung der Schwere herkommen, gleichförmig würken müssen, wenn sie ihrer Verbindung unter einander ungeachtet sich bewegen sollen. Die erstern müssen also, wenn man die andern im entgegengesetzten Sinne annimt, diesen das Gleichgewicht halten.

Inzwischen ist dieser auf die eben angeführte Art vorgetragener Satz lange nicht einleuchtend genug, um ihn für einen Grundsatz der Mechanik gelten zu lassen, indeß ist er nicht schwer durch den des Jacob Bernoulli, wovon er in der That nur eine nothwendige Folge ist, bewiesen zu werden.

Herr Euler machte ihn hernach noch viel allgemeiner, und wendete ihn auf verschiedene die Oscillationen der biegsamen und unbiegsamen Körper betreffende Aufgaben im Jahr 1740 in einer Schrift, die sich im VIIten Tom. der alten Petersburg. Commentarien befindet, an.

Es würde zu wettläuftig seyn von den andern Aufgaben der Dynamik zu reden, die nach der vom Mittelpunkt des Schwungs den Scharfsinn der Geometer beschäftigten, ehe noch die Kunst sie aufzulösen, auf bestimmte und festgesetzte Regeln gebracht war. Man findet diese Aufgaben, die die Herrn Bernoulli, Clairaut, Euler sich aufgaben, zerstreut in den ersten Bänden der Petersburger Commentarien, in den Memoiren von Berlin und Paris (in den Jahren 1736 und 1742), und in Hrn. Eulers opusculis. Sie gehen darauf hinaus die

Bewe-

Digitized by Google

Bewegungen mehrerer schwerer oder nicht schwerer Körper zu bestimmen, die sich durch Faden oder unbiegsamen Hebel treiben oder ziehen, worein sie befestigt sind oder längst denen sie frey herunterrutschen können, und die nachdem man ihnen eine gewisse Bewegung eingedrückt hat, sich selbst überlassen oder genöthigt werden, sich auf gegebenen krummen Linien oder Flächen zu bewegen. Bey Auflösung dieser Aufgaben gebrauchte man fast immer Huyghens Grundsatz, da indessen dieser Grundsatz nur eine Gleichung giebt; so suchte man die andern durch Betrachtung der unbekannten Kräfte, womit man annahm, daß die Körper sich stossen oder ziehen sollten, und die man als elastische Kräfte ansah, die gleichförmig nach entgegengesetzten Richtungen würkten. Die Anwendung dieser Kräfte machte, daß man keine Rücksicht auf die Verbindung der Körper unter einander zu nehmen brauchte, und daß man Gebrauch von den Gesetzen der Bewegung der freyen Körper machen konnte. Endlich dienten die Bedingungen, die nach der Natur der Aufgabe zwischen den Bewegungen der verschiedenen Körper statt finden mußten, die unbekannten Kräfte zu bestimmen, die man im Calkul eingeführt hatte. Jedoch erforderte es jederzeit einen besondern Kunstgriff bey jeder Aufgabe alle die Kräfte herauszubringen, worauf man doch Rücksicht nehmen mußte. Dies war es eben, was diese Aufgaben so anlockend und zur Erweckung der Eifersucht geschickt machte.

D'Alembert's Dynamik, die 1743 erschien, machte allen diesen Streitigkeiten ein Ende, sie enthält eine direkte und allgemeine Methode alle dynamische Aufgaben, wie man sie sich auch ausdenken mag, aufzulösen, oder doch wenigstens auf Gleichungen zu bringen. Diese Methode bringt alle Gesetze der Bewegung der Körper auf die ihres Gleichgewichts, und so also die Dynamik auf die Statik zurück. Wir haben bereits oben angemerkt, daß der Grundsatz, dessen sich Jacob Bernoulli bey der Untersuchung des Mittelpunkts des Schwungs bediente, Vorzugsweise dieselbe von den Bedingungen des Gleichgewichts des Hebels abhängig machte; indeß war es dem Hrn. D'Alembert vorbehalten, diesen Grundsatz auf eine allgemeine Art zu betrachten, und ihm alle die Einfachheit und Anwendung zu geben, deren er fähig war.

Digitized by Google

Bestreben sich mehrere Körper mit gewissen Geschwindigkeiten, und nach gewissen Direktionen zu bewegen, und es leiden diese wegen der gegenseitigen Würkung der Körper auf einander, eine Veränderung; so kann man diese Bewegungen aus denen, die die Körper würklich erhalten, und aus denen, die sich aufheben, zusammengesetzt ansehen; hieraus folgt also, daß diese letztern so beschaffen seyn müssen, daß die von diesen Bewegungen allein getriebene Körper einander das Gleichgewicht halten.

Dies ist der von Hrn. D'Alembert aufgebrachte Grundsatz, wovon er so viele glückliche und nützliche Anwendungen machte. Man gelangt zwar vermittelst desselben nicht sogleich zu den zur Auflösung der verschiedenen Aufgaben der Dynamik nöthigen Gleichungen, aber er zeigt doch, wie man sie aus den Bedingungen des Gleichgewichts herzuleiten habe. Verbindet man daher diesen Grundsatz mit den gewöhnlichen Grundsätzen des Gleichgewichts des Hebels oder der Zusammensetzung der Kräfte; so kann man allezeit vermittelst gewisser mehr oder weniger verwickelten Construktionen die Gleichungen für jede Aufgabe finden.

Dieser Methode hat man sich bisher bey der Anwendung des erwähnten Grundsatzes bedienet, allein durch die Schwierigkeit die Kräfte, die aufgehoben werden müssen, sowie auch die Gesetze des Gleichgewichts zwischen diesen Kräften zu bestimmen, wird diese Anwendung oft sehr verwirrt und mühsam. Die hieraus fliesenden Auflösungen sind daher jederzeit weitläuftiger, als wenn sie aus weniger einfachen, und direkten Grundsätzen hergeleitet worden wären.

Im ersten Theile dieses Werks hat uns der Grundsatz des Bestrebens nach Geschwindigkeit auf eine sehr einfache analytische Methode geführt, wodurch wir im Stande waren alle Aufgaben der Statik aufzulösen. Eben dieser Grundsatz nun mit dem eben vorgetragenen verbunden, wird daher eine ähnliche eben so vortheilhafte Methode für die Aufgaben der Dynamik verschaffen.

Um sich von dieser Methode sogleich eine Idee machen zu können; so erinnere man sich, daß der allgemeine Grundsatz des Bestrebens nach Geschwindigkeit darin besteht, daß wenn ein System von Körpern, die

sich

Digitized by Google

sich auf gewisse Punkte beziehen, und die durch gewisse Kräfte getrieben werden, im Gleichgewicht ist, und man diesem System eine gewisse kleine Bewegung giebt, vermöge der jeder Körper einen unendlich kleinen Raum durchlauft, die Summe der Kräfte, jede multiplicirt durch den Raum, den der Punkt, worauf sie angebracht ist, nach der Direktion dieser Kraft durlauft, allezeit = o ist.

Nimmt man nun das System in Bewegung an, und betrachtet man die Bewegung die jeder Körper in einem Augenblick hat, als aus zweyen zusammengesetzt, wovon die eine die ist, die der Körper im folgenden Augenblick haben wird; so muß die andere durch die gegenseitige Würkung der Körper auf einander, und durch die Würkung der bewegenden Kräfte, wovon sie in diesem Augenblicke getrieben werden, aufgehoben werden. Es muß also ein Gleichgewicht zwischen diesen Kräften und den Drückungen oder Widerständen statt finden, die von Bewegungen herkommen, welche man in der Zeit von einem Augenblick zum andern als aufgehoben ansehen kann. Hieraus folgt, daß um die Formel des Gleichgewichts auf die Bewegung des Systems anzuwenden, man nur die zu diesen letztern Kräften gehörige Glieder hinzu zu addiren hat. Betrachten wir nun, wie wir schon oben gethan haben, die Geschwindigkeiten, die jeder Körper nach den 3 festen auf einander senkrechten Direktionen hat; so werden die Abnahmen dieser Geschwindigkeiten die nach eben diesen Richtungen verlohren gegangenen Bewegungen vorstellen, und folglich werden die Zunahmen die nach den entgegengesetzten Richtungen verlohren gegangenen Bewegungen seyn. Man wird also die von diesen verlohren gegangenen Bewegungen herkommende Drückungen überhaupt durch die Masse multiplicirt durch das Element der Geschwindigkeit, und dividirt durchs Element der Zeit ausdrücken können, und sie werden ihre Richtungen denen der Geschwindigkeiten gerade entgegengesetzt haben. Auf diese Art kann man analytisch die genannten Glieder ausdrücken, und man wird eine allgemeine Formel für die Bewegung der Körper haben, welche die Auflösung aller Aufgaben der Dynamik enthalten wird, und deren Entwickelung allein die für jede Aufgabe nöthige Gleichungen geben wird, doch dies werden wir im Verfolg dieses Traktats sehen.

Digitized by Google

Einer der größten Werthe aber, den diese Formel gewährt, ist, daß sie sogleich auf allgemeine Gleichungen führt, die die unter dem Nahmen der Erhaltung der lebendigenden Kräfte, der Erhaltung der Bewegung des Mittelpunkts der Schwere, der Erhaltung des Moments der Umdrehungsbewegung oder des Satzes der Flächen, und des Satzes der kleinsten Würkung bekannten Grund- oder Lehrsätze enthalten. Man kann alle diese Sätze vielmehr als allgemeine Resultate der Gesetze der Dynamik, als ursprüngliche Grundsätze dieser Wissenschaft ansehen. Da sie indeß als solche bey Auflösung der Aufgaben oft angewandt werden; so glaube ich auch von ihnen ein Wort sagen zu müssen. Ich werde mich aber blos darauf einschränken, zu zeigen, worin sie bestehen, und auf diese Art auch bey dieser Einleitung in die Grundlehren der Dynamik nichts mehr zu wünschen übrig lassen.

Den ersten dieser vier eben genannten Sätze, nämlich den der Erhaltung der lebendigen Kräfte, erfand Huyghens jedoch unter einer von derjenigen etwas verschiedenen Form, die man ihm jetzt zu geben pflegt, und wir haben seiner schon bey Gelegenheit der Aufgabe der Mittelpunkte des Schwungs gedacht. Es besteht dieser Satz in soweit er bey Auflösung dieser Aufgabe ist angewandt worden, in der Gleichheit zwischen dem Fall und dem Steigen des Mittelpunkts der Schwere mehrerer schweren Körper, die in Verbindung unter einander fallen, und hernach einzeln wieder steigen, indem jeder mit der erlangten Geschwindigkeit wieder in die Höhe geht. Nach den bekannten Eigenschaften des Mittelpunkts der Schwere aber wird der durch diesen Mittelpunkt, nach einer gewissen Direktion durchlaufene Weg durch die Summe der Produkte der Masse jedes der Körper in dem nach der nämlichen Direktion durchlaufenen Weg, dividirt durch die Summe der Massen ausgedrückt. Auf einer andern Seite ist nach den Lehrsätzen des Galiläus der durch einen schweren Körper durchlaufene vertikale Weg dem Quadrat der Geschwindigkeit, die er durch seinen freyen Fall erhalten hat, und womit er wieder zu derselben Höhe hinaufsteigen könnte, gleich.

Der

Digitized by Google

Der Grundsatz Huyghens besteht also darin, daß bey der Bewegung schwerer Körper die Summe der Produkte der Massen durch die Quadrate der Geschwindigkeiten in jedem Augenblick einerley ist, die Körper mögen sich nun auf irgend eine Art unter einander verbunden bewegen oder frey einerley vertikale Höhen durchlaufen. Eben dies hat auch schon selbst Huyghens kurz in einer kleinen Schrift, die sich auf die Methoden des Jacob Bernoulli und des Marquis de L'Hopital bezieht, für die Mittelpunkte des Schwungs angemerkt.

Bisher war dieser Satz nur als ein einfaches Theorem der Mechanik angesehen worden; allein da Johann Bernoulli den von Leibnitz aufgebrachten Unterschied zwischen todten Kräften oder ohne würkliche Bewegung hervorzubringen würkende Drückungen, und den lebendigen Kräften, wo würklich eine Bewegung statt findet, so wie auch das Maas dieser letztern durch die Produkte der Massen, und der Quadrate der Geschwindigkeiten, annahm; so sah er in dem erwähnten Satze nichts weiter als eine Folge der Theorie der lebendigen Kräfte und ein allgemeines Gesetz der Natur, nach dem die Summe der lebendigen Kräfte mehrerer Körper dieselbe bleibt, während dem daß diese Körper durch simple Drückungen auf einander würken, und beständig der simplen lebendigen Kraft gleich ist, die aus der Würkung der in Thätigkeit begriffenen Körper, die die Körper bewegen, entspringt. Er gab ihm daher den Nahmen der Erhaltung der lebendigen Kräfte, und bediente sich desselben mit glücklichen Erfolgebey der Auflösung einiger Aufgaben, wozu man noch nicht gelangt war, und wozu man auch nur schwer durch direkte Methoden gelangen konnte.

In der Folge leitete sein berühmter Bruder Daniel Bernoulli aus diesem Satze die Gesetze der Bewegung flüssiger in Gefäßen eingeschlossener Körper her, welche Materie vor ihm nur auf eine oberflächliche und willkührliche Art war behandelt worden.

Endlich aber machte er diesen Satz in den Memoiren von Berlin für das Jahr 1748 sehr allgemein, in dem er zeigte, wie man ihn auf die Bewegung der Körper anwenden könne, die durch gewisse gegenseitige Attraktionen auf einander würken, oder die nach festen Mittelpunkten

Digitized by Google

ten durch gewisse Funktionen der Distanzen proportionale Kräfte gezogen werden.

Dieser Grundsatz gewährt den großen Vortheil, daß er sogleich auf eine endliche Gleichung zwischen den Geschwindigkeiten der Körper und den veränderlichen Größen, die ihre Lage im Raume bestimmen, führt; so daß wenn nach der Natur der Aufgabe alle veränderliche Größen nur auf eine gebracht werden, diese Gleichung hinlänglich ist, sie vollständig aufzulösen, und dies ist der Fall bey der Aufgabe von den Mittelpunkten des Schwungs. Ueberhaupt giebt die Erhaltung der lebendigen Kräfte jederzeit ein erstes Integral der verschiedenen Differentialgleichungen jeder Aufgabe, welches in mehrern Fällen von großem Nutzen ist.

Den zweiten Satz haben wir Newtonen zu verdanken, der im Anfang seiner mathematischen Principien erweißt, daß der Zustand der Ruhe oder der Bewegung des Mittelpunkts der Schwere mehrerer Körper durch die gegenseitige Würkung dieser Körper, wie sie auch beschaffen seyn mag, nicht gestöhrt werde, so daß der Mittelpunkt der Schwere der Körper, die auf irgend eine Art auf einander würken, es sey nun durch Faden oder durch Hebel, oder durch Anziehungsgesetze, u. s. w., ohne daß irgend eine äussere Würkung oder Hinderniß vorhanden ist, allezeit in Ruhe sich befindet, oder sich gleichförmig nach einer geraden Linie bewegt. In der Folge gab ihm Herr D'Alembert in seiner Dynamik einen größern Umfang, indem er zeigte, daß wenn jeder Körper durch eine beständige beschleunigende Kraft, die nach parallelen Linien würkt, oder die ihre Richtung nach einen festen Punkt hat, und der Distanz proportional würkt, getrieben wird; der Mittelpunkt der Schwere die nämliche krumme Linie beschreiben muß, als wenn die Körper frey wären. Man kann noch hinzusetzen, daß die Bewegung dieses Mittelpunkts überhaupts die nämliche bleibt, als wenn alle Kräfte der Körper, wie sie auch beschaffen seyn mögen, jede nach ihrer eignen Richtung darauf angebracht wären.

Es erhellet, daß dieser Grundsatz dazu dient, die Bewegung des Mittelpunkts der Schwere unabhängig von den respektiven Bewegungen der Körper zu bestimmen, und daß sie also allezeit 3 endliche Gleichungen zwi-

Digitized by Google

zwischen den Coordinaten der Körper und der Zeit verschaffen wird, welche die Integrale der Differentialgleichungen der Aufgabe seyn werden.

Der dritte Satz ist viel weniger alt als die beiden vorhergehenden, es scheinen ihn die Hrn. Euler, Daniel Bernoulli und der Chevalier D'Arcy jedoch unter verschiedenen Gestalten, erfunden zu haben.

Nach den beiden erstern besteht er darin, daß bey der Bewegung mehrerer Körper um einen festen Mittelpunkt die Summe der Produkte der Masse jedes Körpers in seine Umdrehungsgeschwindigkeit, um den Mittelpunkt und in die Distanz desselben von demselben Mittelpunkte allezeit von der gegenseitigen Würkung unabhängig ist, die die Körper auf einander ausüben können und immer dieselbe bleiben, so lange keine äussere Würkung oder Hinderniß vorhanden ist.

Daniel Bernoulli trug diesen Grundsatz im 1ten Bande der Berliner Memoiren, der 1746 herauskam, vor. Herr Euler machte ihn in demselben Jahre im ersten Bande seiner Opusculen bekannt. Auch ist es dieselbe Aufgabe, die beide darauf geführt hat, nämlich die Untersuchung der Bewegung mehrerer beweglichen Körper in einer Röhre von einer gewissen gegebenen Figur, die nur um einen Punkt oder festen Centrum sich drehen kann. Der Satz des Hrn. von Arcy, so wie er ihn 1746 der Akademie der Wissenschaften in einer Abhandlung vorgelegt hat, die jedoch erst 1752 in der Sammlung für das Jahr 1747 erschien, besteht darin, daß die Summe der Produkte der Masse jedes Körpers durch die Fläche, die sein Radius Vektor um einen festen Punkt beschreibt, allezeit der Zeit proportional ist. Man siehet, daß dieser Satz das schöne Theorem Newtons von den durch gewisse Centripitalkräfte beschriebenen Flächen nur auf eine allgemeine Art ausgedrückt ist. Um aber die Analogie oder vielmehr Identität desselben mit dem der Herrn Euler und Daniel Bernoulli einzusehen; so hat man nur zu erwägen, daß die Geschwindigkeit der Umdrehung durch das Element des Zirkelbogens dividirt durch das Zeitelement ausgedrückt wird, und daß das erstere dieser Elemente multiplicirt durch die Distanz vom Mittelpunkte, das Element der um diesen Mittelpunkt beschriebenen Fläche giebt; man sieht also, daß

dieser

Digitized by Google

dieser letztere Satz nichts anders als der Differentialausdruck von dem des Hrn. D'Arcy ist.

Nachher trug dieser seinen Grundsatz unter einer dem vorhergehenden mehr nahe kommenden Gestalt vor, welche darin besteht, daß die Summe der Produkte der Massen in die Geschwindigkeiten, und in die vom Mittelpunkt auf die Direktionen des Körpers gezogene senkrechte Linien, eine beständige Größe ist.

Unter diesem Gesichtspunkt machte er daraus sogar eine Art von einem metaphysischen Grundsatze, den er die Erhaltung der Würkung nannte, um ihn dem Grundsatze der kleinsten Würkung entgegen, oder an dessen Stelle zu setzen, gleichsam als wenn unbestimmte und willkührliche Benennungen das Wesen der Gesetze der Natur ausmachten, und einfache Resultate der bekannten Gesetze der Mechanik durch irgend eine verborgene Eigenschaft zu Endursachen erheben könnten.

Wie dies auch seyn mag; so hat der Grundsatz, wovon jetzt die Rede ist, überhaupt bey jedem Systeme von Körpern statt, die auf einander auf irgend eine Weise würken, es sey nun durch Faden, durch unbiegsame Linien, durch Anziehungsgesetze u. s. w., und die durch gewisse nach einem festen Mittelpunkte gerichtete Kräfte getrieben werden, es mag nun das Systeme entweder völlig frey, oder genöthigt seyn, sich um eben diesen Mittelpunkt zu bewegen. Die Summe der Produkte der Massen, in die um diesen Mittelpunkt beschriebene und auf irgend einer Ebene projicirte Flächen, ist allezeit der Zeit proportional, so daß wenn man diese Flächen auf drey auf einander senkrechte Ebenen beziehet, man drey Differentialgleichungen von der ersten Ordnung zwischen der Zeit und den Coordinaten der durch die Körper beschriebenen krummen Linien erhält. In diesen Gleichungen nun besteht die Natur des eben genannten Grundsatzes.

Ich komme endlich auf den 4ten Satz, den ich Satz der kleinsten Würkung nach der Analogie desjenigen nenne, den der verstorbene Hr. von Maupertuis unter dieser Benennung auf die Bahn gebracht hatte, und den die Schriften mehrerer berühmten Schriftsteller nachher so berühmt machten. Dieser Grundsatz analytisch betrachtet besteht darin, daß bey der

Digitized by Google

der Bewegung der Körper, die auf einander würken, die Summe der Produkte der Massen in die Geschwindigkeiten, und in die durchlaufene Räume ein minimum ist. Maupertuis leitet hieraus die Gesetze der Reflexion und Refraktion des Lichts, sowie auch die des Stoßes der Körper in 2 Memoiren her, wovon das eine in den Abhandlungen der Pariser Akademie der Wissenschaften auf's Jahr 1744. und das andere 2 Jahr darnach in denen der Berliner Akademie erschien.

Inzwischen muß man doch gestehen, daß diese Anwendungen sich zu sehr auf einzelne Gegenstände beziehen, um die Wahrheit eines allgemeinen Grundsatzes fest zu setzen; ausserdem sind sie etwas unbestimmt und willkührlich, wodurch die daraus gezogenen Folgerungen nur ungewiß für die Genauigkeit des Grundsatzes selbst gemacht werden. Meiner Meinung nach würde es auch unrecht seyn, diesen Satz mit den eben angeführten zu einer Classe zu zählen. Es giebt aber eine Art, ihn auf eine allgemeinere und der geometrischen Strenge mehr angemessenere Art zu betrachten, und diese verdienet allein die Aufmerksamkeit der Geometer. Die erste Idee davon gab Hr. Euler in seiner Abhandlung de Isoperimetricis, die zu Lausanne im Jahr 1744 herauskam, indem er zeigte, daß bey den Trajektorien, die durch Central-Kräfte beschrieben werden, das Integral der Geschwindigkeit multiplicirt durch das Element der krummen Linie allezeit ein maximum oder ein minimum macht.

Herr Euler erkannte diese Eigenschaft nur bey der Bewegung einzelner Körper, ich fand aber nachher, daß sie auch bey der Bewegung der Körper statt finde, die auf irgend eine Art auf einander würken; hieraus erwächst denn dieser neue allgemeine Satz, daß die Summe der Produkte der Massen in die Integrale der Geschwindigkeiten multiplicirt mit den Elementen der durchlaufenen Räume beständig ein maximum oder minimum ist.

Dies ist der Grundsatz, dem ich hier wiewohl uneigentlich den Nahmen der kleinsten Würkung gebe, und den ich nicht als einen metaphysischen Grundsatz, sondern als ein einfaches und allgemeines Resultat der Gesetze der Mechanik betrachte. Den Nutzen, den er mir bey Auflösung

Digitized by Google

mehrerer schwerer dynamischer Aufgaben gewährt hat, kann man im 2ten Bande der Memoiren von Turin nachsehen. Dieser Grundsatz verbunden mit dem der Erhaltung der lebendigen Kräfte, und nach den Regeln des Variations-Calkuls entwickelt, giebt sogleich alle zur Auflösung jeder Aufgabe nöthigen Gleichungen, und hieraus entsteht denn eine eben so simple als allgemeine Methode, die die Bewegung der Körper betreffende Aufgaben aufzulösen, allein diese Methode ist nur eine Folge von der, die den Gegenstand des zweiten Theiles dieses Werks ausmacht, und die noch den Vorzug hat, daß sie aus den ersten Grundlehren der Mechanik gezogen ist.

Zweiter Abschnitt.

Allgemeine Formel für die Bewegung eines Systems von Körpern, die von gewissen Kräften getrieben werden.

1) Sind die auf ein System von Körpern würkenden Kräfte den im ersten Theile dieses Werks vorgetragenen Gesetzen gemäß gestellt; so heben sich diese Kräfte gegenseitig auf, und das System bleibt im Gleichgewicht. Findet aber das Gleichgewicht nicht mehr statt; so müssen sich die Körper nothwendig bewegen, und den Würkungen der sie treibenden Kräfte folgen. Die Bestimmung der Bewegungen, die durch gegebene Kräfte hervorgebracht werden, ist der Gegenstand dieses 2ten Theils. Wir betrachten darin besonders die beschleunigenden oder verzögernden Kräfte, deren Würkung sowie die der Schwere beständig ist, und die jeden Augenblick eine unendlich kleine und gleiche Geschwindigkeit allen Theilen der Materie einzudrücken streben.

Würken diese Kräfte frey und gleichförmig; so bringen sie nothwendig Geschwindigkeiten hervor, die wie die Zeiten wachsen; und man kann die

Digitized by Google

die auf diese Art in einer gegebenen Zeit erzeugten Geschwindigkeiten als die einfachsten Würkungen dieser Arten von Kräften, und folglich als solche ansehen, die am geschicktesten sind ihnen zum Maasse zu dienen. Man muß in der Mechanik die simplen Effekte der Kräfte als bekannt annehmen, die Kunst dieser Wissenschaft besteht einzig und allein darin, die zusammengesetzten Effekte, die von der zusammengesetzten und modificirten Würkung eben dieser Kräfte entstehen, daraus herzuleiten.

2) Wir wollen daher annehmen, man kenne die Geschwindigkeit, die jede beschleunigende Kraft einem beweglichen Körper einzudrücken im Stande ist, indem sie immer auf einerley Weise während einer gewissen Zeit würkt, die wir für die Zeit-Einheit annehmen wollen, und unter beschleunigenden Kräften wollen wir nur eben diese Geschwindigkeit verstehen. Sie wird nach dem Raum geschätzt, den der bewegliche Körper in der nämlichen Zeit durchlaufen würde, wenn sie gleichförmig fortdauerte, und man weiß aus den Lehrsätzen des Galiläus, daß dieser Raum allezeit doppelt so groß als der ist, den der Körper durch die beständige Würkung der beschleunigenden Kraft würklich durchlaufen hat.

Sonst kann man auch eine bekannte beschleunigende Kraft zur Einheit annehmen, und auf sie alle andere beziehen. Man nehme alsdann zur Einheit der Räume das gedoppelte des Raumes an, den dieselbe gleichförmig würkende Kraft in der Zeit durchläuft, die man zur Zeiteinheit annimt; und die in dieser Zeit durch die beständige Würkung derselben Kraft erlangte Geschwindigkeit ist die Einheit der Geschwindigkeiten. Auf diese Art sind die Kräfte, die Räume, die Zeiten und die Geschwindigkeiten nichts als simple Verhältnisse gewöhnlicher mathematischer Größen.

Nimmt man z. B. (auf eine sehr natürliche Art) die Schwere in der Breite von Paris für die Einheit der beschleunigenden Kräfte an und zählt die Zeit nach Sekunden; so muß man 30, 196 pariser Fuß zur Einheit der durchlaufenen Räume annehmen, weil 15, 098 Fuß die Höhe ist, wovon ein sich selbst überlassener Körper in einer Sekunde in eben der Breite des Orts fällt; und die Einheit der Geschwindigkeiten ist diejenige, welche ein schwerer Körper erhält, indem er von dieser Höhe fällt.

Digitized by Google

3) Diese vorläufigen Begriffe vorausgesetzt, wollen wir jetzt ein System von Körpern betrachten, die irgend eine Lage in Beziehung auf einander haben, und durch gewisse beschleunigende Kräfte getrieben werden.

Es sey m die Masse eines dieser Körper, die man als einen Punkt ansieht, und es seyen x, y, z die 3 rechtwinklichten Coordinaten, die die absolute Lage desselben Körpers nach einer gewissen Zeit t bestimmen. Diese Coordinaten aber nehme man mit dreyen festen Achsen im Raume, die sich senkrecht in einem Punkte schneiden, den man den Anfang der Coordinaten nennt, parallel an. Sie drücken alsdenn die rechtwinklichten Distanzen des Körpers von 3 durch eben diese Achsen gehenden Ebenen aus.

Weil wir diese Ebenen als senkrecht auf einander angenommen haben; so drücken die Coordinaten x, y, z die durch den Körper durchlaufene Räume aus, indem er sich von diesen Ebenen entfernt; folglich stellen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, die Geschwindigkeiten vor, die dieser Körper in einem gewissen Augenblick hat, um sich von jeder dieser Ebenen zu entfernen. Ueberliesse man nun den Körper sich selbst; so würden diese Geschwindigkeiten in den folgenden Augenblicken nach den Fundamentalsätzen der Theorie der Bewegung beständig bleiben.

4) Es seyen jetzt P, Q, R etc. die beschleunigenden Kräfte, die in einerley Augenblick auf jeden Punkt der Masse m nach gegebenen Direktionen würken d. h. die Geschwindigkeiten, die jede dieser Kräfte der Masse m eindrücken würde, wenn jede insbesondere und gleichförmig in einer Zeit, die man zur Einheit angenommen hat, würkten. So veränderlich aber die Würkung dieser Kräfte seyn mag; so kann man sie doch während eines Augenblicks als beständig ansehen. Aber die durch die beständigen beschleunigenden Kräfte erzeugten Geschwindigkeiten sind der Zeit proportional, folglich können auch die Geschwindigkeiten, die die Kräfte P, Q, R etc. dem Körper m während des Augenblicks dt entweder würklich eindrücken oder doch einzudrücken streben, durch Pdt, Qdt, Rdt etc. ausgedrückt werden, und sie haben mit diesen Kräften auch einerley Direktion.

Im

Digitized by Google

Im folgenden Augenblick wird sich also der Körper zugleich mit den Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, Pdt, Qdt, Rdt etc. zu bewegen streben; und würklich eine aus diesen zusammengesetzte Bewegung annehmen, wenn er frey würde; diese Bewegung aber wird durch die gegenseitige Verbindung worin die Körper unter einander stehen, verändert.

Weil nun $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ überhaupt die würklichen Geschwindigkeiten des Körpers nach der Zeit t ausdrücken; so werden

$$\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} + d.\frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} + d.\frac{dz}{dt},$$

die Geschwindigkeiten nach der Zeit $t + dt$ ausdrücken. Der Körper hat also alsdann die Geschwindigkeiten Pdt, Qdt, Rdt, etc. verlohren, und an ihrer Stelle die Geschwindigkeiten

$$d.\frac{dx}{dt}, \quad d.\frac{dy}{dt}, \quad d.\frac{dz}{dt},$$

welche die Coordinaten x, y, z zu vergrößern streben, gewonnen; oder, welches auf eins hinauskommt, er hat die Geschwindigkeiten Pdt, Qdt, Rdt, etc. und die Geschwindigkeiten

$$d.\frac{dx}{dt}, \quad d.\frac{dy}{dt}, \quad d.\frac{dz}{dt},$$

nach entgegengesetzter Richtung, d. h. nach den Linien x, y, z, selbst, verlohren.

Die beschleunigenden Kräfte, die im Stande sind, diese verschiedenen Geschwindigkeiten hervorzubringen, werden also auch einander aufheben, und folglich gegenseitig sich im Gleichgewicht halten. Es wird also auch das System im Gleichgewicht seyn, wenn man annimmt, daß jeder

Digitized by Google

der Körper m, woraus es besteht, durch die gegebenen beschleunigenden Kräfte P, Q, R, etc., und durch die beschleunigenden Kräfte

$$-\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}, \quad -\frac{d.\frac{dy}{dt}}{dt}, \quad -\frac{d.\frac{dz}{dt}}{dt},$$

oder vielmehr (wenn man $dt = \text{Const.}$ setzt)

$$-\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -\frac{d^2z}{dt^2},$$

die nach den Linien x, y, z ihre Richtungen haben, getrieben werde. Man sieht also daß die Gesetze der Bewegung des Systems einerley mit denen seines Gleichgewichts sind, wenn man nur die neuen beschleunigenden Kräfte

$$-\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -\frac{d^2z}{dt^2},$$

deren Richtungen die Linien x, y, z sind, hinzuaddirt.

5) Man kann also auch eine allgemeine Formel eben sowohl für die Bewegung finden, als wir für's Gleichgewicht gefunden haben, und diese Formel für die Bewegung, wird nichts anders als die des Gleichgewichts seyn, wenn man annimmt, daß jeder Körper m des Systems zugleich durch die Kräfte mP, mQ, mR, etc. nach den Direktionen der beschleunigenden Kräfte P, Q, R, etc.; wovon er ebenfals getrieben wird, und durch die Kräfte

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2},$$

nach den Direktionen der Coordinaten x, y, z, getrieben wird. Wir wollen uns daher vorstellen, die Lage der verschiedenen Körper des Systems leide eine unendlich geringe Veränderung, so daß die Coordinaten

Digitized by Google

dinaten x, y, z sich verwandeln in $x - \delta x$, $y - \delta y$, $z - \delta z$, wo δx, δy, δz unendlich klein sind; alsdann sieht man leicht, daß diese Größen die kleinen Räume ausdrücken werden, die der Körper m nach den Linien x, y, z, durchlaufen haben wird; denn sind diese Linien auf einander senkrecht; so hängt der eine parallel durchlaufene Raum nur von der Variation dieser und keinesweges von der andern ab.

Man erhält also sogleich

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \delta x,\ m\frac{d^2y}{dt^2} + \delta y,\ m\frac{d^2z}{dt^2} + \delta z$$

für die Momente der Kräfte

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\ m\frac{d^2y}{dt^2},\ m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

6) Man betrachte nun die beschleunigenden Kräfte P, Q, R, etc. als strebten sie nach gegebenen Mittelpunkten, und es seyen p, q, r, etc. die Distanzen jedes Körpers m von jedem der Mittelpunkte; ferner seyen δp, δq, δr, etc. die Variationen der Linien oder Größen p, q, r, etc., die aus den Variationen δx, δy, δz der Linien x, y, z entspringen. Alsdann ist klar, daß die Größen δp, δq, δr, etc. zugleich die durch den Körper m nach den Linien p, q, r, etc. durchlaufene Räume ausdrücken. Folglich werden $mP + \delta p$, $mQ + \delta q$, $mR + \delta r$, etc. die Momente der Kräfte mP, mQ, mR, etc. ausdrücken, die nach eben diesen Linien p, q, r, etc. würken.

Die allgemeine Formel für's Gleichgewicht besteht aber darin, daß die Summe der Momente aller Kräfte des Systems $= 0$ seyn muß (1 Theil 2 Abschn. 2 Art.); setzt man also die Summe aller Größen $= 0$; so erhält man die gesuchte Formel

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$
$$+ m\,(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}).$$

7)

Digitized by Google

7) Deutet man also diese Summe durch das Integralzeichen S an, welches sich auf alle Körper des Systems bezieht; so erhält man:

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\right)m = 0,$$

für die allgemeine Formel der Bewegung eines gewissen Systems von Körpern, die man als Puncte betrachtet, und die durch gewisse beschleunigende Kräfte P, Q, R etc. getrieben werden.

Um einen Gebrauch von dieser Formel zu machen; so wird man dieselben Regeln befolgen müssen, als bey der Formel des Gleichgewichts; man muß also hier alles anwenden, was (1 Th. 2 Abschn. 3 u. f.) gesagt ist, wenn man anmerkt, daß die Differentialen, die durch das Zeichen oder die Characteristik δ in der vorhergehenden Formel mit den mit d bezeichneten Differentialien in der Formel des Gleichgewichts übereinkommen, und durch dieselben Regeln, und durch dasselbe Verfahren bestimmt werden. Wir wollen inskünftige diese mit δ bezeichneten Differentialien Variationen nennen, um sie von den andern, deren Zeichen d ist, und die in der nämlichen Formel vorkommen, zu unterschiden. Diese letztern drücken die auf einander folgenden Zu- oder Abnahmen der veränderlichen Größen im Verhältniß mit der Zeit oder der Bewegung der Körper aus, während daß die Variationen sich auf die willkührliche Veränderung beziehen, die man in der Lage der Körper während eines Augenblicks hervorbringt, und die von ihrer würklichen Bewegung ganz unabhängig ist.

8) Ueberhaupt muß man den Anfang damit machen, die Werthe von δp, δq etc. in δx, δy, δz zu suchen. Dies ist sehr leicht, denn nennet man a, b, c die rechtwinklichten Coordinaten, die die Lage des Mittelpunkts der Kräfte P bestimmen; so erhält man

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

woraus man ziehet, wenn man nur x, y, z als veränderlich annimmt,

$$\delta p$$

$$\delta p = \frac{x - a}{p}\delta x + \frac{y - b}{p}\delta y + \frac{z - c}{p}\delta z$$

welcher Ausdruck, wie wir schon am angeführten Orte bemerkt haben, sich auf folgende allgemeine und von der Lage des Mittelpunkts der Kräfte unabhängige Form bringen läßt (1 Th. 2 Abschn. 7)

$$\delta p = \text{Cos. } \alpha\,\delta x + \text{Cos. } \beta\,\delta y + \text{Cos. } \gamma\,\delta z$$

(wenn man α, β, γ die Winkel nennt, die die Direction der Kraft P mit den Coordinaten x, y, z macht) oder auch auf diese:

$$\delta p = \sin \gamma\,(\text{Cos } \varepsilon\, dx + \sin \varepsilon\, \delta y) + \text{Cos } \gamma\, \delta z$$

wo ε der Winkel ist, den die projicirte Direktion auf der Ebene der x, y, mit der Achse x macht *).

Eben so verfährt man auch mit den andern Variationen δq, δr etc.

Auf

*) Es ist hier der nämliche Fall als (1 Th. 2 Abschn. 7), denn da $\text{Cos}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \beta + \text{Cos}^2 \gamma = 1$; so ist

$$\frac{x - a}{\sqrt{[(x - a)^2 + (y - b)^2]}} = \text{Cos } \varepsilon$$

und $$\frac{y - b}{\sqrt{[(x - a)^2 + (y - b)^2]}} = \sin \varepsilon$$

Aber $x - a = p \text{ Cos } \alpha$, $y - b = p \text{ Cos } \beta$

folglich $\sqrt{[(x - a)^2 + (y - b)^2]} = p\sqrt{(\text{Cos}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \beta)} = p \sin \gamma$

folglich $\frac{\text{Cos } \alpha}{\sin \gamma} = \text{Cos } \varepsilon$ $\quad$ $\frac{\text{Cos } \beta}{\sin \gamma} = \sin \varepsilon$.

M.

Digitized by Google

Auf diese Art verwandeln sich die Glieder $P\delta p + Q\delta q + R\delta r +$ etc. in folgende:

$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$; und die Größen X, Y, Z werden die Werthe der 3 den Achsen der Coordinaten x, y, z parallelen und allen den Kräften P, Q, R etc. gleichwürkenden Kräfte, wie wir (1 Theil. 5 Abschn. 5) gezeigt haben, seyn.

Siehet man nun auf die Bedingungsgleichungen, die durch die Natur des vorgegebenen Systems zwischen den Coordinaten der verschiedenen Körper gegeben sind; so muß man die Variationen dieser Coordinaten auf die kleinste mögliche Zahl bringen, so daß die übrigbleibenden Variationen völlig von einander unabhängig, und willkührlich sind. Hierauf aber muß man die Summe aller Glieder, worin jede dieser letztern Variationen vorkömmt, = o setzen, wodurch man die zur Bestimmung der Bewegung des Systems nöthige Gleichungen erhält.

9) Ist das System, dessen Bewegung man sucht, ein stetiger Körper und von einer unveränderlichen Figur, wie die festen Körper oder von einer veränderlichen wie die biegsamen und flüssigen Körper; und man bezeichnet durch m die ganze Masse des Körpers, durch dm aber ein gewisses Element desselben, d. h. ein Theilchen des Körpers; so sehe man diesen Körper als eine Menge oder als ein System von unendlich vielen Körperchen dm an, wovon jeder durch die beschleunigenden Kräfte P, Q, R etc. getrieben wird; man hat alsdann nur in der allgemeinen Formel (7) dm anstatt m zu setzen, und zugleich das Zeichen S, als ein Integrationszeichen zu betrachten, das sich auf den ganzen Umfang des Körpers bezieht, d. h. auf die Stellung aller seiner Theilchen während eines Augenblicks, aber unabhängig von der successiven Stellung jedes Theilchens insbesondere ist.

10) Ueberhaupt muß man in Ansehung der Variationen bemerken, daß sie sich nur auf den Raum und nicht auf die Dauer beziehen, so daß bey den durch δ bezeichneten Differentiationen, die veränderliche Größe t, die die Zeit vorstellet, allezeit als beständig angesehen werden kann. Es kann

Digitized by Google

kann aber nach den Umständen der Aufgabe der Fall eintreten, daß die Bedingungsgleichungen selbst die Zeit t enthalten, in diesem Fall werden sie so zu sagen von einem Augenblick zum andern veränderlich seyn. Man wird daher einige der Coordinaten in Funktionen der andern Coordinaten, und der veränderlichen Größe t ausdrücken können; und man muß auf die Veränderlichkeit von t bey den mit d bezeichneten Differentiationen sehen, aber in den mit δ Differentiationen t als unveränderlich annehmen.

Eben diese Voraussetzung muß in Ansehung des Integralzeichens S statt finden, welches sich auf den vom Körper in jedem Augenblick selbst eingenommenen Raum beziehet.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine aus der vorhergehenden Formel hergeleitete Eigenschaften der Bewegung.

1) Wir wollen nun ein System von Körpern betrachten, die in irgend einem Verhältniß oder Verbindung mit einander stehen, doch so daß kein fester Punkt oder Hinderniß ihrer Bewegung eine Veränderung geben kann; alsdenn ist klar, daß die Bedingungen des Systems sich nur auf die respektive Stellung der Körper unter einander beziehen können; die Bedingungsgleichungen können folglich keine andere Funktionen der Coordinaten enthalten, als die Ausdrücke für die gegenseitigen Distanzen der Körper.

Es seyen x', y', z' die Coordinaten eines gewissen bestimmten Körpers des Systems während dem daß x, y, z überhaupt die Coordinaten eines andern Körpers andeuten. Man setze, welches immer geschehen kann:

Digitized by Google

$$x = x' + \xi,$$
$$y = y' + \eta,$$
$$z = z' + \zeta,$$

so ist offenbar, daß die Größen x', y', z' in den Ausdrücken der gegenseitigen Distanzen der Körper nicht vorkommen werden, sondern daß diese Distanzen nur von den verschiedenen Größen ξ, η, ζ, abhängen, die eigentlich die Coordinaten der verschiedenen Körper in Ansehung derjenigen, die zu x', y', z' gehört, ausdrücken.

Setzt man also in der allgemeinen Formel der Bewegung statt δx, δy, δz ihre Werthe

$$\delta x' + \delta\xi, \delta y' + \delta\eta, \delta z' + \delta\zeta,$$

so sind diese Variationen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ von allen andern unabhängig, und an und für sich willkührlich; man muß also die ganze Summe der Glieder, worin jede dieser Variationen vorkömmt, insbesondere $= 0$ setzen, woraus 3 allgemeine und von der besondern Stellung des Systems unabhängige Gleichungen erwachsen.

2) Setzt man nun in der allgemeinen Formel (2 Abschn. 7) an die Stelle der Größe

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$$

die nach (2 Abschn. 8) veränderte

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

so wird aus dieser Formel

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)m\delta x + S\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)m\delta y$$
$$+ S\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)m\delta z = 0$$

wor-

Digitized by Google

woraus man sogleich diese 3 allgemeinen Gleichungen zieht

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) m = 0$$

$$S\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) m = 0$$

$$S\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right) m = 0$$

welche allezeit bey der Bewegung eines gewissen Systems von Körpern statt finden, wenn dasselbe völlig frey ist.

3) Wir wollen jetzt den Körper, zu dem die Coordinaten x', y', z' gehören, im Mittelpunkt der Schwere des ganzen Systems gesetzt annehmen; alsdenn erhält man nach den bekannten Eigenschaften dieses Mittelpunkts (1 Th. 3 Abschn. 12) die Gleichungen:

$$S\xi m = 0,\ S\eta m = 0,\ S\zeta m = 0$$

und differentiirt man diese in Rücksicht auf t, so wird daraus

$$S\frac{d^2\xi}{dt^2} m = 0,\ S\frac{d^2y}{dt^2} m = 0,\ S\frac{d^2z}{dt^2} m = 0.$$

Folglich

$$S\frac{d^2x}{dt^2} m = S\frac{d^2x'}{dt^2} m = \frac{d^2x'}{dt^2} Sm$$

indem x', da es einerley Werth für alle Körper hat, unabhängig von S ist.

Digitized by Google

Auf gleiche Art hat man:

$$S\frac{d^2y'}{dt^2}m\left(=S\frac{d^2y'}{dt^2}m, M.\right)=\frac{d^2y'}{dt^2}Sm$$

$$S\frac{d^2z}{dt^2}m\left(=S\frac{d^2z'}{dt^2}m, M.\right)=\frac{d^2z'}{dt^2}Sm.$$

Folglich wird aus den 3 Gleichungen (2) (wenn man die hier gefundenen Werthe von

$$S\frac{d^2x}{dt^2}m,\ S\frac{d^2y}{dt^2}m,\ S\frac{d^2z}{dt^2}m$$

statt dieser Größen selbst substituirt, M.):

$$\frac{d^2x'}{dt^2}Sm+SXm=0$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2}Sm+SYm=0$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2}Sm+SZm=0.$$

Diese Gleichungen nun dienen dazu, die Bewegung des Mittelpunkts der Schwere aller Körper unabhängig von der besondern Bewegung jedes derselben zu bestimmen, und es ist offenbar, daß die Bewegung dieses Mittelpunkts, nicht von der gegenseitigen Würkung abhängt, die die Körper auf einander ausüben können, sondern allein von den beschleunigenden Kräften, die jeden Körper treiben.

Hierin besteht der allgemeine Grundsatz der Erhaltung der Bewegung des Mittelpunkts der Schwere.

4) Ue-

Digitized by Google

4) Uebrigens sieht man, daß die Gleichungen für die Bewegung des Mittelpunkts der Schwere, einerley mit denen eines einzigen Körpers sind, der zugleich durch alle beschleunigenden Kräfte getrieben wird, welche auf die verschiedenen Körper des Systems würken.

In der That nimmt man an, daß alle diese Körper in einem Punkte vereinigt sind, der zu den Coordinaten x', y', z' gehört; so hat man in der allgemeinen Formel

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z';$$

und setzt man die ganze Summe der Glieder, worin jede der 3 Variationen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ vorkömmt $= 0$; so erhält man dieselben obigen Gleichungen.

Hieraus entspringt dann dieses allgemeine Theorem: die Bewegung des Mittelpunkts der Schwere eines freyen Systems von Körpern, die in Beziehung auf einander irgend eine Stellung haben, ist allezeit einerley, die Körper mögen nun entweder beständig in einem Punkte vereinigt seyn, oder jeder derselben von denselben beschleunigenden Kräften als in ihrem natürlichen Zustande getrieben werden.

5) Betrachten wir nun die Bewegung eines gewissen Systems um einen festen Punkt, es mag derselbe nun selbst zum System gehören oder nicht, und nehmen wir sogleich, wie wir (1 Theil 3 Abschn. 5.) gethan haben, einen Radius Vektor ρ mit dem Winkel φ, den dieser auf der Ebene der Coordinaten x und y beschreibt, anstatt dieser Coordinaten selbst an, indem wir die 3te Coordinate z senkrecht auf diese beiden beibehalten; so erhält man auf diese Art:

$$x = \rho \operatorname{Cof} \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sin} \varphi$$

und, wenn man differentiirt

$$\delta x = \operatorname{Cof} \varphi \delta \rho - y \delta \varphi$$

$$\delta y = \operatorname{sin} \varphi \delta \rho + x \delta \varphi.$$

Es sey φ' der Werth des Winkels φ für einen gewissen bestimmten Körper des Systems, und es sey ferner für jeden der andern Körper $\varphi = \varphi' + \psi$; so kann man wie am a. O. erweisen, daß wenn das Sy-

stem

Digitized by Google

stem die Freyheit hat, sich um die Achse der z zu drehen, die Variationen des Winkels φ' unabhängig von allen andern veränderlichen Größen seyn müssen.

In diesem Falle muß die ganze Summe der Glieder, worin $\delta\varphi'$ vorkommt, in der allgemeinen Formel des Gleichgewichts insbesondere $= 0$ seyn. Dies giebt eine allgemeine und von der besondern Stellung des Systems unabhängige Gleichung. Um nun diese Gleichung zu erhalten; so ist klar, daß man nur die Größen $-y\delta\varphi'$ und $x\delta\varphi'$ an die Stelle von δx und δy in der obigen allgemeinen Formel (2) zu setzen, und eine besondere Gleichung zu machen hat, worin die Glieder, darin $\delta\varphi'$ ein Faktor ist, nicht mehr vorkommen.

6) Diese Gleichung ist also

$$S\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} + xY - yX\right)m = 0$$

und sie findet überhaupt bey jedem Systeme statt, wenn dasselbe die Freyheit hat, sich um eine feste Linie zu drehen, die den Coordinaten z zur Achse dient. Da aber, was bey einer der 3 Achsen der Coordinaten statt findet, ebenfals bey jeder der beiden andern statt finden kann; so findet man auf eine ähnliche Art in Ansehung der Achse der Coordinaten y, wenn das System die Freyheit hat, sich um diese Achse zu drehen, die Gleichung

$$S\left(x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2} + xZ - zX\right)m = 0.$$

Endlich erhält man in Ansehung der Achse der Coordinaten x, wenn man annimmt, daß das System die Freyheit habe sich um diese Achse zu drehen, die Gleichung:

$$S\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} + yZ - zY\right)m = 0.$$

Diese 3 Gleichungen werden also zugleich statt finden, wenn das System die Freyheit hat, sich um jede der 3 Achsen zu bewegen, d. h. jeders

Digitized by Google

jederzeit, wenn das System eine solche Stellung hat, daß es frey nach allen Richtungen um den festen Punkt sich drehen kann, der der Anfang der Coordinaten ist; denn wir haben (1 Theil 3 Abschn. 7.) gesehen, daß jede Umdrehungsbewegung um einen festen Punkt jederzeit sich in 3 andere um 3 Achsen, die durch diesen Punkt gehen, sich zerlegen lasse.

Um sich eine klarere Idee von diesen Gleichungen machen zu können; so merke man erstlich an, daß die Größen

$$x\,d^2y - y\,d^2x,\quad x\,d^2z - z\,d^2x,\quad y\,d^2z - z\,d^2y$$

nichts anders als die Differentialien von

$$x\,dy - y\,dx,\quad x\,dz - z\,dx,\quad y\,dz - z\,dy$$

sind, welche das gedoppelte der Elementar-Zirkel-Ausschnitte ausdrükken, welche durch den Körper m auf den Ebenen der x, y, der x, z, und der y, z d. h. auf den auf den Achsen der z, y und x senkrechten Ebenen beschrieben werden; denn substituirt man in $x\,dy - y\,dx$ statt x und y die Werthe $\rho \operatorname{Cos}\varphi$, $\rho \sin\varphi$; so bekommt man $\rho^2 d\varphi$, welches das zweifache der zwischen dem Radius Vektor ρ und dem darauf folgenden Radius, der mit jenem den Elementar-Winkel $d\varphi$ macht, enthaltenen Flächen ist.

Zweytens bemerke man, daß die Größen X, Y, Z die Kräfte vorstellen, die jeden Körper m nach den Richtungen der Coordinaten x, y, z treiben, und die von allen Kräften P, Q, R etc. herkommen, die nach gewissen Direktionen auf diesen Körper würken (2 Abschn. 8), und daß auf diese Art also die Größen

$$xY - yX,$$
$$xZ - zX,$$
$$yZ - zY$$

die Momente der Kräfte vorstellen, die den Körper um jede der 3 Achsen der Coordinaten x, y, z zu drehen streben, wenn man das Wort

Digitized by Google

Moment nach der gewöhnlichen Bedeutung annimmt, nämlich für das Produkt der Kraft in die auf ihre Richtung gezogenen senkrechten Linie.

7) Würkten keine beschleunigende Kräfte auf das System oder würkten nur gewisse Kräfte darauf, die alle nach dem Punkt ihre Richtung hätten, den wir für den Anfang der Coordinaten angenommen haben; alsdenn würden die Größen $xY - yX$, $xZ - zX$, $yZ - zY = o$ seyn. Denn im erstern Falle wären die Größen an sich schon $= o$, und im zweiten wären diese Größen von der Form $\frac{Px}{P}$, $\frac{Py}{P}$, $\frac{Pz}{P}$, (2 Abschn. 8); wenn man P die Kraft nennt, die ihre Richtung nach dem Mittelpunkt hat, und die Coordinaten $a, b, c = o$ setzt, weil wir angenommen haben, daß der Mittelpunkt der Kräfte in den Anfang der Coordinaten fällt.

Die 3 Gleichungen (6) werden hiedurch

$$S\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right)m = o$$

$$S\left(x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2}\right)m = o$$

$$S\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right)m = o$$

Integrirt man diese in Rücksicht auf die veränderliche Größe t; so erhält man, wenn man A, B, C als 3 beständige Größen annimmt:

$$S\left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right)m = A$$

$$S\left(\frac{xdz - zdx}{dt}\right)m = B$$

$$S\left(\frac{ydz - zdy}{dt}\right)m = C$$

Diese

Digitized by Google

Diese letzteren Gleichungen enthalten augenscheinlich den Grundsatz von den Flächen, wovon wir im ersten Abschnitt geredet haben.

8) Ist das System frey, d. h. ist kein Punkt fest; so kann man den Anfang der Coordinaten x, y, z überall annehmen, wo man will, die Eigenschaften der Flächen und Momente, die wir eben erwiesen haben, werden also in diesem Falle in Ansehung eines gewissen im Raume nach Willkühr angenommenen festen Punkts statt finden. Ich will aber jetzt erweisen, daß sie ebenfals in Rücksicht auf den Mittelpunkt der Schwere des ganzen Systems statt finden, es mag dieser nun fest seyn oder nicht.

Man hat zu diesem Zwecke nur die Größen

$$x' + \xi,\ y' + \eta,\ z' + \zeta \quad (1)$$

in den 3 Gleichungen für x, y, z, (6) zu substituiren, indem man, wie (3), die Coordinaten x', y', z' sich auf den Mittelpunkt der Schwere des Systems beziehen läßt.

Durch diese Substitutionen wird die erste der erwähnten Gleichungen sogleich:

$$\left(x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2}\right) Sm + x' SYm - y' SXm$$
$$+ x' S \frac{d^2 y}{dt^2} m - y' S \frac{d^2 \xi}{dt^2} m + \frac{d^2 y'}{dt^2} S \xi m - \frac{d^2 x'}{dt^2} Sym$$
$$+ S\left(\xi \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \xi Y - yX\right) m = 0$$

(oder $x' \frac{d^2 y'}{dt^2} Sm - y' \frac{d^2 x'}{dt^2} Sm +$
$x' \frac{d^2 y'}{dt^2} Sm - y' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} Sm +$

Digitized by Google

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} S\xi m - \frac{d^2 x'}{dt^2} Sym +$$

$$\xi \frac{d^2 y'}{dt^2} Sm - y \frac{d^2 \xi'}{dt^2} Sm +$$

$$x' SYm - y' SXm + S\xi Ym - SyXm = o$$

Aber $- y' \left[\frac{d^2 x'}{dt^2} Sm + SXm \right] = o$

und $x' \left[\frac{d^2 y'}{dt^2} Sm + SYm \right] = o$

Ausserdem aber $\xi = x - x'$, $\eta = y - y'$ M.).

Die vorige Gleichung wird also in folgende zusammengezogen:

$$S \left(\xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \xi Y - \eta X \right) m = o$$

und auf gleiche Art verwandlen sich die beiden andern Gleichungen (6) in diese:

$$S \left(\xi \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \xi Z - \zeta X \right) m = o$$

$$S \left(\eta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \eta Z - \zeta Y \right) m = o.$$

Man sieht, daß diese 3 Gleichungen (sowohl unter einander als auch M.) denen (6) ähnlich sind, und daß der Unterschied von diesen nur darin besteht, daß anstatt der Coordinaten x, y, z die von einem festen Punkte ausgehen, man die Coordinaten ξ, η, ζ hat, deren Anfang im Mittelpunkt der Schwere des Systems ist. Hieraus folgt, daß in Ansehung dieses Mittelpunkts dieselben Eigenschaften statt finden, als in Ansehung des festen Punkts statt fanden.

Digitized by Google

9) Ueberhaupt ist klar, was auch die verschiedenen Körper des Systems für eine Lage haben, und in welcher Verbindung sie unter einander stehen mögen, daß man, wenn diese Lage nur nicht von der Zeit abhängig ist, d. h. wenn die Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten nicht die veränderliche Größe t enthalten, allezeit die Variationen δx, δy, δz den Differentialien dx, dy, dz, welche die würklichen durch die Körper im Augenblick dt durchlaufenen Räume ausdrücken, indessen jene gewisse Räume bezeichnen, die die Körper in demselben Augenblick mit Rücksicht auf ihre gegenseitige Lage durchlaufen könnten, gleich setzen kann. Dies ist aber nur eine besondere Voraussetzung, die daher auch nur eine einzige Gleichung geben kann; indeß bringt sie den Vortheil, daß, da sie von der Form des Systems abhängt, man sogleich eine allgemeine Gleichung für die Bewegung eines jeden Systems erhält.

Substituiren wir daher in der allgemeinen Formel (2 Abschn. 7.) an die Stelle von δx, δy, δz die gewöhnlichen Differentialien dx, dy, dz und folglich auch an die Stelle der δp, δq, δr, etc. die correspondirenden Differentialien dp, dq, dr, etc.; so erhält man:

$$S\left[\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}\right]m = 0$$

welches die allgemeine Gleichung für jedes System von Körpern ist.

10) Ist die Größe $Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$ integrabel, welches allezeit statt findet, wenn die beschleunigenden Kräfte nach festen Mittelpunkten oder auf die Körper des Systems selbst würken, und gewissen Funktionen der Distanzen proportional sind, welches in der Natur eigentlich der Fall ist; und nennt man daher Π das Integrale dieser Größe; so daß $d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr$; so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$S\left[\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} + d\Pi\right]m = 0$$

Digitized by Google

welche integrirt giebt

$$S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2} + \Pi\right) m = F;$$

wo F eine gewisse willkührliche beständige Größe bedeutet, welche in einem gewissen gegebenen Augenblicke dem Werth des ersten Glieds gleich ist.

Diese letztere Gleichung schließt den unter dem Nahmen der Erhaltung der lebendigen Kräfte bekannten Grundsatz in sich. Denn wenn $dx^2 + dy^2 + dz^2$ das Quadrat des vom Körper in der Zeit dt durchlaufenen Raumes ist; so ist $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ das Quadrat seiner Geschwindigkeit und $\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) m$ die lebendige Kraft;

folglich $S\left[\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right] m$ die Summe der lebendigen Kräfte aller Körper, oder die lebendige Kraft des ganzen Systems; und man sieht aus der vorigen Gleichung, daß diese lebendige Kraft $= 2F - 2S\Pi.m$ ist, welche Größe allein von den beschleunigenden Kräften abhängt, die auf die Körper würken, und die nämliche bleibt, die Körper mögen nun frey oder auf irgend eine Art mit einander verbunden seyn, wenn nur diese Verbindung keine Veränderung mit der Zeit erleidet.

11) Nennen wir u die Geschwindigkeit des Körpers m; so ist

$$u^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

wodurch die vorhergehende Gleichung diese Gestalt annimmt:

$$S\left[\frac{u^2}{2} + \Pi\right] m = F.$$

Diffe-

Digitized by Google

Differentirt man diese mit Rücksicht auf das Zeichen δ; so hat man

$$S\left[u\delta u + \delta\Pi\right]m = 0.$$

Aber Π ist eine endliche Funktion der veränderlichen Größen p, q, r, etc., so daß

$$d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc. (ro)},$$

woraus folgt, daß man durch die Verwandlung des Zeichens d in δ auch hat:

$$\delta\Pi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.};$$

folglich hat man auch

$$S\left[u\delta u + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\right]m = 0,$$

und daher (wenn man $u\delta u$ hinüber bringt M.):

$$S\left[P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\right]m = -Su\delta u + m$$

und diese Gleichung wird immer statt finden, wenn nur $Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$ eine integrable Größe ist, und die Verbindung der Körper unter einander nicht von der Zeit abhängt. Aber aufhören würde sie wahr zu seyn, wenn eine dieser Bedingungen nicht statt fände.

12) Man substituire jetzt den vorhergehenden Werth in die allgemeine Formel (2 Abschn. 7.), wodurch diese wird:

$$(A)\quad S\left[\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z - u\delta u\right]m = 0.$$

Aber $d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z = d(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) - dxd\delta x - dyd\delta y - dzd\delta z.$

Weil

Weil nun die Zeichen d und δ Differentialien und Variationen andeuten, die ganz und gar nicht von einander abhängig sind; so ist leicht zu begreifen, daß dδx, dδy, dδz einerley mit δdx, δdy, δdz seyn muß, wie wir schon (1 Theil 4 Abschn. 16.) angemerkt haben.

Uebrigens sieht man leicht, daß

$$dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz = \frac{1}{2}\delta.(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Man hat also auch

$$d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z = d.(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) - \frac{1}{2}\delta.(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Es sey nun s der Raum oder der durch den Körper m in der Zeit t beschriebene krummlinichte Bogen; alsdenn hat man

$$ds = \sqrt{[dx^2 + dy^2 + dz^2]}$$

und $dt = \frac{ds}{u}$; folglich

$$d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z = d.(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) - ds\delta ds;$$

und (wenn man mit dt^2 überall dividirt und nur beim letzten Gliede $ds\delta ds$ statt dt^2 seinen Werth $\frac{ds^2}{u^2}$ setzt, M.)

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = d.\frac{(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)}{dt^2} - \frac{u^2\delta ds}{ds}.$$

Sub-

Digitized by Google

Substituirt man nun diesen Werth in der allgemeinen Gleichung (A); so erhält man:

$$S\left[\frac{d.(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)}{dt^2} - \frac{u^2\delta ds}{ds} - u\delta u\right]m = 0$$

oder wenn man alle Glieder mit $dt = \frac{ds}{u}$ multiplicirt und anmerkt, daß

$u\delta ds + ds\delta u = \delta.(uds)$:

$$S\left[\frac{d.(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)}{dt} - \delta.(uds)\right]m = 0.$$

Aber das Integrationszeichen S hat weiter keine Beziehung auf die Differentialzeichen d und δ, man kann diese also auch vor jenes setzen, hiedurch erhält denn die vorhergehende Gleichung folgende Gestalt:

$$\frac{d.S(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)m}{dt} - \delta.Smuds = 0.$$

Integriren wir nun in Beziehung auf das Zeichen d, und bezeichnen wir diese Integration durch das gewöhnliche Zeichen $\int$; so erhalten wir:

$$\frac{S[dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z]m}{dt} - \int\delta.Smuds = Const.$$

Das Zeichen $\int$ in dem Ausdruck $\int\delta.Smuds$ aber kann sich nur auf die veränderlichen Größen u und s beziehen, ohne Rücksicht auf die Zeichen S und δ, dieser Ausdruck muß also $= \delta.Sm\int uds$ seyn.

Nimmt man nun an, daß in den Punkten, wo die Integralien $\int uds$ ihren Anfang nehmen; man $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$ hat; so muß die willkührliche beständige Größe $= 0$ seyn, indem das erste Glied

Digitized by Google

der Gleichung in diesen Punkten = o wird. Man hat also in diesem Falle:

$$\delta . Smsuds = \frac{S(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)m}{dt}.$$

Nimmt man also an, die Variationen δx, δy, δz seyen in den Punkten, wo die Integralien suds ihr Ende haben, = o; so erhält man $\delta . Smsuds = o$; d. h. die Variation der Größe Smsuds wird = o seyn, diese Größe muß also entweder ein maximum oder ein minimum seyn.

13) Hieraus entsteht denn dieses allgemeine Theorem: Bey der Bewegung eines gewissen Systems von Körpern, die durch gegenseitige Anziehungskräfte oder durch Kräfte, die nach gewissen festen Punkten würken, und gewissen Funktionen der Distanzen proportional sind, getrieben werden, sind die durch die verschiedenen Körper beschriebenen krummen Linien und ihre Geschwindigkeiten so beschaffen, daß die Summe der Produkte jeder Masse in das Integrale der Geschwindigkeit multiplicirt, mit dem Element der krummen Linie ein maximum oder minimum ist, je nachdem man die ersten oder letzten Punkte jeder krummen Linie als gegeben ansieht, so daß die Variationen der zu diesen Punkten gehörigen Coordinaten = o seyen. Dies ist das Theorem, wovon wir am Ende des ersten Abschnitts redeten, und dem wir den Nahmen des Satzes der kleinsten Würkung beylegten.

Dies Theorem aber enthält nicht allein eine sehr merkwürdige Eigenschaft der Bewegung der Körper, sondern es kann auch dazu dienen, diese Bewegung zu bestimmen. Denn da die Formel Smsuds ein maximum oder ein minimum seyn muß; so hat man nur nach der Variationsmethode die Bedingungen aufzusuchen, die sie dazu machen können. Wendet man also die allgemeine Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kräfte an; so findet man allezeit alle zur Erkenntniß der Bewegung jedes Körpers nöthigen Gleichungen. Denn die Variation muß = o seyn, oder man muß $\delta . Smsuds = o$ haben,

Digitized by Google

ben, wenn man ein maximum oder ein minimum erhalten will. Verfährt man also wie oben, jedoch auf eine umgekehrte Art; so findet man wieder dieselbe allgemeine Formel, wovon man ausgegangen war.

14) Damit man sogleich sehe, worauf es bey dieser Methode ankomme; so wollen wir sie in wenigen Worten vortragen. Die Bedingung des maximum oder minimum giebt allgemein

$$\partial . S m \int u d s = 0$$

und bringt man das Zeichen ∂ unter die Zeichen S und $\int$ (welches nach der Natur dieser verschiedenen Zeichen offenbar erlaubt ist); so erhält man die Gleichung:

$$S m \int \partial (u d s) = 0 \text{ oder vielmehr}$$

$$S m \int (d s \partial u + u \partial d s) = 0.$$

Ich betrachte nun zuerst den Theil $S m \int d s \partial u$; setze ich darin für ds, dessen Werth udt; so wird er

$$S m \int u \partial u d t$$

und wenn ich nun die Ordnung der Zeichen S und $\int$, welche völlig unabhängig von einander sind, verändere; so hat man

$$\int d t S m u \partial u.$$

Die allgemeine Gleichung des Grundsatzes der lebendigen Kräfte aber giebt (11)

$$S u^2 m = 2 F - 2 S . \Pi m,$$

indem $d \Pi = P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$;

differentiirt man also nach ∂; so erhält man

$$S u \partial u m = - S \partial \Pi m$$

$$= - S (P \partial p + Q \partial q + R \partial r + \text{etc.}) m$$

indem Π als eine algebraische Funktion von p, q, r, etc. angenommen worden ist, und daher $\partial \Pi$ mit $d \Pi$ einerley ist, wenn man nur d in ∂ verwandelt. Diese Größe $S m \int d s \partial u$ erhält also diese Form

Digitized by Google

$$- \int dt S (P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}) m.$$

Ich betrachte hierauf den andern Theil $Sm\int u\delta ds$, und substituire darin anstatt ds dessen Werth, durch rechtwinklichte Coordinaten oder durch gewisse andere veränderliche Größen ausgedrückt. Will man sich nun der rechtwinklichten Coordinaten x, y, z bedienen; so hat man sogleich:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

differentiirt man also nach δ; so hat man

$$\delta ds = \frac{dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz}{ds}$$

oder wenn man die Zeichen d, δ versetzt und dd anstatt δd schreibt, (welches wegen der Unabhängigkeit dieser Zeichen von einander nach dem ersten Fundamentalsatze des Variations-Calculs allezeit geschehen kann):

$$\delta ds = \frac{dxd\delta x + dyd\delta y + dzd\delta z}{ds},$$

Substituirt man also diesen Werth, und setzt dt statt $\frac{ds}{u}$ so hat man $\int u\delta ds = \int \frac{dxd\delta x + dyd\delta y + dzd\delta z}{dt}$ (B). Da sich hier unter dem Zeichen $\int$ die Differentialien der Variationen δx, δy, δz befinden; so muß man sie durch das bekannte Verfahren der partiellen Integrationen zum verschwinden bringen, und hierin besteht der 2te Fundamentalsatz der Methode der Variationen. Man verwandelt daher die Größe $\int \frac{dxd\delta x}{dt}$ in diese; welche damit einerley ist:

$$\frac{dx}{dt}\delta x - \int \delta x d.\frac{dx}{dt};$$

Setzt

Setzt man nun, es seyen die beiden Glieder der krummen Linie gegeben, so daß die Coordinaten, die zum Anfang und zum Ende des Integrals gehören, keine Veränderung leiden; so erhält man auf eine einfache Art $\int \frac{dx\,d\delta x}{dt} = -\int \delta x\, d\frac{dx}{dt}$.

Eben so findet man

$$\int \frac{dy\,d\delta y}{dt} = -\int \delta y\, d.\frac{dy}{dt}$$

und $$\int \frac{dz\,d\delta z}{dt} = -\int \delta y\, d.\frac{dz}{dt}$$

wodurch die vorige Gleichung (B) in diese (C) verändert wird:

$$(C)\quad \int u\,\delta s = -\int\left(\delta x\, d.\frac{dx}{dt} + \delta y\, d.\frac{dy}{dt} + \delta z\, d.\frac{dz}{dt}\right).$$

Versetzt man also, wie dies immer geschehen kann, die Zeichen S und $\int$; so wird die Größe

$$S m \int u\,\delta s = -\int S\left(\delta x\, d.\frac{dx}{dt} + \delta y\, d.\frac{dy}{dt} + \delta z\, d.\frac{dz}{dt}\right) m.$$

Die Gleichung des maximum oder minimum wird daher:

$$\int\Big(dt\, S\left[P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\right] m +$$

$$S\left[\delta x\, d.\frac{dx}{dt} + \delta y\, d.\frac{dy}{dt} + \delta z\, d.\frac{dz}{dt}\right] m\Big) = 0$$

welche überhaupt für alle mögliche Variationen statt findet; es muß daher die Größe unter dem Zeichen $\int$ in jedem Augenblick $= 0$ seyn, wodurch man folgende unbestimmte Gleichung erhält:

Digitized by Google

$$dt\,S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.})\,m + S\left(\delta x\,d.\frac{dx}{dt} + \delta y\,d.\frac{dy}{dt} + \delta z\,d.\frac{dz}{dt}\right)m = 0,$$

welche mit der allgemeinen Formel der Bewegung (1 Abschn. 7.) einerley ist, und folglich auch wie diese alle zur Auflösung der Aufgabe nöthigen Gleichungen geben wird.

15) Anstatt der Coordinaten x, y, z kann man sich gewisser anderer unbestimmter Größen bedienen und alles kommt darauf an, das Element des Bogens ds durch eine Function dieser unbestimmten Größen auszudrücken. Man nehme daher z. B den Radius oder die geradlinichte Entfernung vom Anfang der Coordinaten, die man ρ nennen kann, nebst 2 Winkeln, wovon der eine ψ die Neigung dieses Radius auf der Ebene der x und y andeute, der andere aber φ der Winkel der Projektion eben dieses Radius auf dieser Ebene mit der Achse der x sey; hiedurch erhält man:

$$z = \rho \sin\psi,\quad y = \rho \cos\psi \sin\varphi,\quad x = \rho \cos\psi \cos\varphi$$

woraus man denn findet

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= d\rho^2 + \rho^2 (d\psi^2 + \cos\psi^2\, d\varphi^2)$$

welchen Ausdruck man auch direkte durch die Geometrie finden könnte.

Differentiirt man daher nach δ und ändert δd in $d\delta$ um; so erhält man

$$ds\,\delta\,ds = d\rho\,d\,\delta\rho, + \rho\,[d\psi^2 + \cos\psi^2\,d\varphi]\,\delta\rho + \rho^2 (d\psi\,d\,\delta\psi - \sin\psi\cos\psi\,d\varphi^2\,\delta\psi + \cos\psi^2\,d\varphi\,d\delta\varphi);$$

oder, wenn man mit $dt = \frac{ds}{v}$ dividirt und integrirt

Digitized by Google

$$\int u\,\delta\,ds = \int \frac{d\rho\,d\delta\rho + \rho\,(d\psi^2 + \mathrm{Cof}\psi^2\,d\varphi^2)\,\delta\rho}{dt}$$

$$+ \int \frac{\rho^2\,(d\psi\,d\delta\psi - \sin\psi\,\mathrm{Cof}\psi\,d\varphi^2\,\delta\psi + \mathrm{Cof}\psi^2\,d\varphi\,d\delta\varphi)}{dt}.$$

Nun bringe man die doppelten Zeichen $d\delta$ unter dem Zeichen $\int$ zum Verschwinden durch partielle Integrationen, und werfe sogleich die Glieder weg, die die Variationen ausserhalb des Zeichens $\int$ enthalten, denn alsdenn müssen diese Variationen sich auf die Enden des Integrals beziehen, und durch die Voraussetzung, daß die ersten und letzten Punkte der durch die Körper beschriebenen krummen Linien gegeben und unveränderlich seyen, $= 0$ werden. Hiedurch verwandelt sich also die vorhergehende Gleichung in diese:

$$\int u\,\delta ds = -\int \left[\left(d\,\frac{d\rho}{dt} - \rho\,\frac{d\psi\ \mathrm{Cof}\psi^2 + d\varphi^2}{dt} \right) \delta\rho \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\rho^2 \sin\psi\ \mathrm{Cof}\psi\,d\varphi^2}{dt} + d.\,\frac{\rho^2\,d\psi}{dt} \right) \delta\psi + d.\,\frac{\mathrm{Cof}\psi^2\,d\varphi}{dt}\,\delta\varphi \right]$$

folglich ist die Gleichung des maximum oder minimum:

$$-\int [dt\,S\,(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \mathrm{etc.})\,m +$$

$$S \left[\left(d.\,\frac{d\rho}{dt} - \rho\,\frac{d\psi^2 + \mathrm{Cof}\psi^2\ d\varphi^2}{dt} \right) \delta\rho \right.$$

$$+ \left(\frac{\rho^2 \sin\psi\ \mathrm{Cof}\psi\,d\varphi^2}{dt} + d.\,\frac{\rho^2\,d\psi}{dt} \right) \delta\psi +$$

$$\left. d.\,\frac{\mathrm{Cof}\psi^2\,d\varphi}{dt}\,\delta\varphi \right] m \Big] = 0.$$

Setzt man nun die Größe, die unter dem Zeichen $\int$ ist $= 0$; so erhält man eine unbestimmte Gleichung, die der des vorhergehenden Artikels analog ist; aber anstatt der Variationen δx, δy, δz die Variatio-

Digitized by Google

tionen $\delta\rho$, $\delta\Phi$, $\delta\psi$ enthält. Bringt man nun zuerst alle Variationen auf die kleinste mögliche Zahl und macht hierauf besondere Gleichungen, wovon jede eine der übrigen Variationen enthält; so erhält man hieraus die zur Auflösung der Aufgabe nöthigen Gleichungen.

Wendet man andere unbestimmte Größen an; so erhält man auch verschiedene Formeln; aber man kann davon versichert seyn, in jedem Falle die einfachsten Gleichungen gefunden zu haben, die aus der Natur der unbestimmten Größen nur fliesen können. Man sehe hierüber den 2ten Band der Schriften der Turiner Akademie *).

*) Hr. de la Grange hat hier pag. 173 eine neue Methode bekannt gemacht die maxima und minima der unbestimmten Integralformeln zu bestimmen, nachdem Hr. Euler in seinem bekannten Traktate, den er unter dem Titel: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperi metrici latissimo sensu accepti im Jahr 1744 herausgegeben hat, vergeblich versucht hatte die Sache so einfach zu machen, als man zu erwarten berechtiget war. Hr. de la Grange Abhandlung führt den Titel: Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies. Er legte hierin zuerst den Grund zur Variationsrechnung, die in der Folge noch von vielen andern Analysten vervolkomnet und erweitert wurde. In einer 2ten Abhandlung, welche als eine Folge der vorhergehenden zu betrachten ist, indem sie die Anwendung der in der vorigen gelehrten Methoden zeigt: Application de la methode précédente à la solution de différens problêmes de Dynamique. Miscellanea Taurinens. Tom. II. p. 196, bedienet er sich derselben Methode als hier im 3ten Abschnitt, nur daß die Bedingungen verschieden sind. Hr. de la Grange verweist den, dem um mehreres in Ansehung dieses Gegenstandes zu thun ist, auf diese seine schon vor mehr als 28 Jahren von ihm bekanntgemachte Abhandlung. Liebhaber tiefsinniger analytischer Berechnungen werden auch hier die Entwicklung von mehr als 50 besonderen Fällen sehen, und wiewohl bisweilen mit Mühe doch aber zuletzt mit Vergnügen muthig dem großen Analysten in seinen Schlüssen folgen. Ueberhaupt enthält dieser Band der Abhandlungen der Turiner Gesellschaft einen reichen Schatz analytischer Methoden und Berechnungen, und Hr. de la Grange's Stärke und Scharfsinn in Auflösung mathematischer Aufgaben blickt überall hervor.

M.

Vier-

Digitized by Google

Vierter Abschnitt.

Die einfachste Methode zu den Gleichungen zu gelangen, die die Bewegung eines gewissen Systems von Körpern bestimmen, die durch gewisse beschleunigende Kräfte getrieben werden.

1) Die allgemeine Formel, worauf wir im 2ten Abschnitt die ganze Theorie der Dynamik gebracht haben, braucht jetzt nur noch entwickelt zu werden, wenn man die zur Auflösung irgend einer Aufgabe dieser Wissenschaft nöthigen Gleichungen erhalten will. Diese Entwickelung, welche durch puren Calkul geschieht, kann ausserdem aber noch in mehrerm Betracht durch Methoden bewerkstelligt werden, zu deren Erzählung wir den gegenwärtigen Abschnitt bestimmt haben.

Da alles darauf ankommt, die verschiedenen veränderlichen Grösen, die in der vorgegebenen Formel vorkommen, vermittelst der durch die Natur jeder Aufgabe gegebenen Bedingungsgleichungen auf die möglichst kleinste Anzahl zu bringen; so hat man vor allen Dingen an die Stelle dieser veränderlichen Grösen Funktionen von andern veränderlichen Grösen zu setzen. Dies ist durch die gewöhnlichen Methoden allezeit leicht zu bewerkstelligen, wir wollen aber noch eine besondere Art lehren, hier auch mit Rücksicht auf die vorgegebene Formel ein Genüge zu leisten, welche noch ausserdem den Vorzug hat, daß sie allezeit direkte sie auf die einfachste Form bringt.

2) Diese Formel besteht aus 2 verschiedenen Theilen, die man einzeln betrachten muß. Der erstere enthält die Glieder

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)m,$$

welche allein von den aus der Trägheit der Körper entstehenden Kräften herkommt.

Digitized by Google

Der andere Theil besteht aus den Gliedern

$$S\,(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.})\,m,$$

die zu den beschleunigenden Kräften P, Q, R etc. gehören, die man als auf jeden Körper nach den Linien p, q, r etc. würkend annimmt, und die diese Linien zu vermindern streben.

Den erstern Theil will ich mehrerer Einfachheit willen mit r, den 2ten mit Δ bezeichnen, so daß man hat

$$r + \Delta = 0$$

dies ist also die allgemeine Formel der Bewegung (2 Abschn. 7).

3) Betrachten wir nun zuerst die Größe

$$d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z;$$

so ist klar, daß, wenn man dazu die Größe

$$dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z$$

addirt, die Summe integrabel ist. Sie hat nämlich zum Integrale

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z.$$

Folglich hat man

$$d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z = d.(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) - dx\,d\delta x - dy\,d\delta y - dz\,d\delta z.$$

Wir haben aber schon oben (3 Abschn. 12) angemerkt, daß das doppelte Zeichen dd mit δd einerley ist; auf diese Art wird also die Größe

$dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z$ auf die Form

$dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz$ gebracht, oder

$\frac{1}{2}\delta.(dx^2 + dy^2 + dz^2)$.

Man

Man hat also diese Reduktion:

$$d^2x\,\partial x + d^2y\,\partial y + d^2z\,\partial z = d.(dx\,\partial x + dy\,\partial y + dz\,\partial z) - \tfrac{1}{2}\partial(dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

woraus man ersieht, daß um die vorgegebene Größe $d^2x\,\partial x + d^2y\,\partial y + d^2z\,\partial z$ zu berechnen, man nur diese beiden Größen zu berechnen hat, die nur Differentialien von der ersten Ordnung $dx\,\partial x + dy\,\partial y + dz\,\partial z$, $dx^2 + dy^2 + dz^2$ enthalten, und hierauf die eine nach d, die andere nach ∂ zu differentiiren sey.

4) Gesetzt nun, man hätte statt der veränderlichen Größen x, y, z gegebene Funktionen von andern veränderlichen Größen ξ, ψ, φ etc. zu substituiren. Man differentiire diese Funktionen, wodurch man Ausdrücke von folgender Form bekömmt:

$$dx = A\,d\xi + B\,d\psi + C\,d\varphi + \text{etc.}$$
$$dy = A'd\xi + B'd\psi + C'd\varphi + \text{etc.}$$
$$dz = A''d\xi + B''d\psi + C''d\varphi + \text{etc.}$$

worin A, A', A'', B, B' etc. bekannte Funktionen eben dieser veränderlichen Größen ξ, ψ, φ etc. sind, und die Werthe von ∂x, ∂y, ∂z werden auf gleiche Art ausgedrückt werden können, wenn man nur d in ∂ verwandelt.

Verrichtet man diese Substitutionen in der Größe: $dx\,\partial x + dy\,\partial y + dz\,\partial z$; so erhält sie folgende Form:

$$F\,d\xi\,\partial\xi + G(d\xi\,\partial\psi + d\psi\,\partial\xi) + H\,d\psi\,\partial\psi + I(d\xi\,\partial\varphi + d\varphi\,\partial\xi) + \text{etc.}$$

wo F, G, H, I etc. endliche Funktionen von ξ, ψ, φ etc. sind.

Verwandelt man also ∂ in d; so erhält man den Werth von $dx^2 + dy^2 + dz^2$, welcher seyn wird:

$$F\,d\xi^2 + 2G\,d\xi\,d\psi + H\,d\psi^2 + 2I\,d\xi\,d\varphi + \text{etc.}$$

Digitized by Google

Differentiirt man nach d die erstere dieser beiden Größen; so erhält man das Differentiale:

$$d.(Fd\xi) + \partial\xi + Fd\xi d\partial\xi + d.(Gd\xi) + \partial\psi + d.(Gd\psi) + \partial\xi + Gd\xi d\partial\psi + Gd\psi d\partial\xi + d.(Hd\psi) + \partial\psi + Hd\psi d\partial\psi + \text{etc.}$$

Differentiirt man hierauf nach ∂; so erhält man diese:

$$\partial Fd\xi^2 + 2Fd\xi\partial d\xi + 2\partial Gd\xi d\psi + 2Gd\psi\partial d\xi + 2Gd\xi\partial d\psi + \partial Hd\psi^2 + 2Hd\psi\partial d\psi + \text{etc.}$$

Ziehet man daher die Hälfte dieses letztern Differentials von der erstern ab, und bemerkt, daß $d\partial$ mit ∂d einerley sind; so erhält man:

$$d.(Fd\xi) + \partial\xi - \tfrac{1}{2}\partial Fd\xi^2 + d.(Gd\xi) + \partial\psi + d.(Gd\psi) + \partial\xi - \tfrac{1}{2}\partial Gd\xi d\psi + d.(Hd\psi) + \partial\psi - \tfrac{1}{2}\partial Hd\psi^2 + \text{etc.}$$

für den Werth der gesuchten Größe:

$$d^2x\partial x + d^2y\partial y + d^2z\partial z.$$

Man sieht aber leicht, daß dieser Werth aus dem letztern Differentiale sogleich hergeleitet werden kann, wenn man alle Glieder mit 2 dividirt, die Zeichen derer verändert, die das gedoppelte ∂d vor sich haben, und d nach ∂ wegbringt, um es vor diejenigen Größen zu setzen, die die mit ∂d bezeichneten doppelten Differentialien multipliciren. Das Glied

$\partial Fd\xi^2$ giebt also $-\tfrac{1}{2}\partial Fd\xi^2$,

das Glied $2Fd\xi\partial d\xi$ " " " $d.(Fd\xi) + \partial\xi$,

das Glied $2\partial Gd\xi d\psi$ " " " $-\partial Gd\xi d\psi$,

das Glied $2Gd\psi\partial d\xi$ " " " $d.(Gd\psi) + \partial\xi$ u. s. w.

5) Bezeichnet man also mit α die Funktion von ξ, ψ, φ etc. und $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$ etc., worin sich die Größe $\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ ver-

wan-

Digitized by Google

wandelt, wenn man die Werthe von x, y, z in ξ, ψ, φ etc. substituirt; so erhält man allgemein:

$$d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z = \left(-\frac{\delta\alpha}{\delta\xi} + d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi}\right)\delta\xi + \left(-\frac{\delta\alpha}{\delta\psi} + d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\psi}\right)\delta\psi + \left(-\frac{\delta\alpha}{\delta\varphi} + d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\varphi}\right)\delta\varphi + \text{etc.},$$

wo, wie gewöhnlich, durch $\frac{\delta\alpha}{\delta\xi}$ der Coefficient von $\delta\xi$ in dem Differential $\delta\alpha$ und durch $\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi}$ der Coefficient von $\delta d\xi$ in eben diesem Differential u. s. w. ausgedrückt wird.

6) Was man hier eben durch eine besondere Methode gefunden hat, hätte eben so einfach und noch allgemeiner durch die Grundsätze der Methode der Variationen gefunden werden können.

Denn es sey α eine gewisse Funktion von x, y, z, etc. dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, etc. etc. und sie werde eine Funktion von ξ, ψ, φ, etc. $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$ etc., $d^2\xi$, $d^2\psi$, $d^2\varphi$ etc. etc. durch die Substitution der Werthe von x, y, z, etc. in ξ, ψ, φ, etc. ausgedrückt; differentiirt man nun nach δ; so erhält man folgende Gleichung, die mit der vorhergehenden einerley ist:

$$\delta\alpha = \frac{\delta\alpha}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\alpha}{\delta dx}\delta dx + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2x}\delta d^2x + \text{etc.}$$
$$+ \frac{\delta\alpha}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\alpha}{\delta dy}\delta dy + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2y}\delta d^2y + \text{etc.}$$
$$+ \frac{\delta\alpha}{\delta z}\delta z + \frac{\delta\alpha}{\delta dz}\delta dz + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2z}\delta d^2z + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Digitized by Google

$$= \frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\partial\xi + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi}\partial\psi + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}\partial\varphi + \text{etc.}$$

$$+ \frac{\partial \alpha}{\partial d\xi}\partial d\xi + \frac{\partial \alpha}{\partial d\psi}\partial d\psi + \frac{\partial \alpha}{\partial d\varphi}\partial d\varphi + \text{etc.}$$

$$+ \frac{\partial \alpha}{\partial d^2\xi}\partial d^2\xi + \frac{\partial \alpha}{\partial d^2\psi}\partial d^2\psi + \frac{\partial \alpha}{\partial d^2\varphi}\partial d^2\varphi + \text{etc.}$$

etc.

Man verwandle die doppelten Zeichen ∂d, ∂d^2, etc. in $d\partial$, $d^2\partial$, etc. die mit jenen einerley sind, und integrire mit Rücksicht auf d. Hierauf bringe man durch partielle Integrationen alle doppelten Zeichen $d\partial$, $d^2\partial$, etc. weg, die sich unter dem Zeichen $\int$ befinden, und sich auf das Differentialzeichen d beziehen, wodurch man eine Gleichung von dieser Form erhält:

$$\int(A\partial x + B\partial y + C\partial z + \text{etc.}) + Z =$$
$$\int(A'\partial\xi + B'\partial\psi + C'\partial\varphi) + Z'$$

wo $A = \frac{\partial \alpha}{\partial x} - d.\frac{\partial \alpha}{\partial dx} + d^2.\frac{\partial \alpha}{\partial d^2x} - \text{etc.}$,

$B = \frac{\partial \alpha}{\partial y} - d.\frac{\partial \alpha}{\partial dy} + d^2.\frac{\partial \alpha}{\partial d^2y} - \text{etc.}$,

$C = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - d.\frac{\partial \alpha}{\partial dz} + d^2.\frac{\partial \alpha}{\partial d^2z} - \text{etc.}$,

etc.

$A' = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - d.\frac{\partial \alpha}{\partial d\xi} + d^2.\frac{\partial \alpha}{\partial d^2\xi} - \text{etc.}$,

$B' = \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} - d.\frac{\partial \alpha}{\partial d\psi} + d^2.\frac{\partial \alpha}{\partial d^2\psi} - \text{etc.}$,

Digitized by Google

$$C' = \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} - d.\frac{\partial\alpha}{\partial d\varphi} + d^2.\frac{\partial\alpha}{\partial d^2\varphi} - \text{etc.}$$

etc.

$$Z = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial dx} - d.\frac{\partial\alpha}{\partial d^2x} + \text{etc.}\right)\partial x + \frac{\partial\alpha}{\partial d^2x}\,d\partial x + \text{etc.}$$

$$+ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial dy} - d.\frac{\partial\alpha}{\partial d^2y} + \text{etc.}\right)\partial y + \frac{\partial\alpha}{\partial d^2y}\,d\partial y + \text{etc.}$$

$$+ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial dz} - d.\frac{\partial\alpha}{\partial d^2z} + \text{etc.}\right)\partial z + \frac{\partial\alpha}{\partial d^2z}\,d\partial z + \text{etc.}$$

etc.

$$Z' = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial d\xi} - d.\frac{\partial\alpha}{\partial d^2\xi} + \text{etc.}\right)\partial\xi + \frac{\partial\alpha}{\partial d^2\xi}\,d\partial\xi + \text{etc.}$$

$$+ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial d\psi} - d.\frac{\partial\alpha}{\partial d^2\psi} + \text{etc.}\right)\partial\psi + \frac{\partial\alpha}{\partial d^2\psi}\,d\partial\psi + \text{etc.}$$

$$+ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial d\varphi} - d.\frac{\partial\alpha}{\partial d^2\varphi} + \text{etc.}\right)\partial\varphi + \frac{\partial\alpha}{\partial d^2\varphi}\,d\partial\varphi + \text{etc.}$$

Differentiirt man nun wieder von neuem; so erhält man durch die Versetzungen der Glieder

$$A\partial x + B\partial y + C\partial z + \text{etc.} - A'\partial\xi - B'\partial\psi - C'\partial\varphi - \text{etc.}$$
$$= dZ' - dZ;$$

welche Gleichung ist identisch und statt finden muß, wie auch die mit ∂ bezeichneten Variationen oder Differentialien beschaffen seyn mögen.

Weil nun die 2te Hälfte dieser Gleichung ein vollkommenes Differential in Ansehung des Zeichens d ist, so muß auch die erste Hälfte in Ansehung eben dieses Zeichens, und unabhängig vom Zeichen ∂, ein voll-

kom-

Digitized by Google

kommenes Differential seyn; dies ist aber unmöglich, indem die Glieder dieser ersten Hälfte nur die Variationen δx, δy, δz, etc. $\delta\xi$, $\delta\psi$, etc. und gar nicht die Differentialien dieser Variationen enthalten. Damit also die Gleichung dennoch bestehen könne; so müssen nothwendig beide Hälften, jede insbesondere $= 0$ seyn, dies giebt also diese beiden identischen Gleichungen:

$$A\delta x + B\delta y + C\delta z + \text{etc.} = A'\delta\xi + B'\delta\psi + C'\delta\varphi + \text{etc.}$$

$$dZ = dZ'$$

welche bey verschiedenen Gelegenheiten von Nutzen seyn können.

Es sey z. B. $\alpha = \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$; so ist

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x} = 0, \frac{\delta\alpha}{\delta dx} = dx, \frac{\delta\alpha}{\delta d^2x} = 0, \text{ etc.}$$

und eben so verhält es sich mit den andern ähnlichen Größen. Man hat daher (wenn man diese Substitutionen verrichtet M.)

$$A = -d^2x$$

$$B = -d^2y$$

$$C = -d^2z$$

und da α nur Differentialien von der ersten Ordnung enthält; so hat man die sehr einfachen Gleichungen

$$A' = \frac{\delta\alpha}{\delta\xi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi},$$

$$B' = \frac{\delta\alpha}{\delta\psi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\psi},$$

$$C' = \frac{\delta\alpha}{\delta\varphi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\varphi},$$

etc.

Man

Digitized by Google

Man hat also die identische Gleichung

$$-\mathrm{d}^2x\,\delta x - \mathrm{d}^2y\,\delta y - \mathrm{d}^2z\,\delta z = \left(\frac{\delta\alpha}{\delta\xi} - \mathrm{d}.\frac{\delta\alpha}{\delta\mathrm{d}\xi}\right)\delta\xi + \left(\frac{\delta\alpha}{\delta\psi} - \mathrm{d}.\frac{\delta\alpha}{\delta\mathrm{d}\psi}\right)\delta\psi + \left(\frac{\delta\alpha}{\delta\varphi} - \mathrm{d}.\frac{\delta\alpha}{\delta\mathrm{d}\varphi}\right)\delta\varphi + \text{etc.}$$

die mit der (5) übereinstimmt.

Hieraus folgt, daß um den Werth der Größe Γ (2) in einer Funktion von ξ, ψ, φ, etc. auszudrücken, man nur den Werth der Größe

$$S\left(\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{2\,\mathrm{d}t^2}\right)m$$

in einer Funktion von ξ, ψ, φ, etc. und ihrer Differentialien auszudrükken hat. Denn nennt man diese Funktion T; so erhält man sogleich:

$$\Gamma = \left(\mathrm{d}.\frac{\delta T}{\delta\mathrm{d}\xi} - \frac{\delta T}{\delta\xi}\right)\delta\xi + \left(\mathrm{d}.\frac{\delta T}{\delta\mathrm{d}\psi} - \frac{\delta T}{\delta\psi}\right)\delta\psi + \left(\mathrm{d}.\frac{\delta T}{\delta\mathrm{d}\varphi} - \frac{\delta T}{\delta\varphi}\right)\delta\varphi + \text{etc.}$$

Diese Verwandlung findet auch sogar auf gleiche Art alsdann statt, wenn sich auch bey den neuen veränderlichen Größen die Zeit t befände, wenn man sie nur als beständig ansieht, d. h. wenn man $\delta t = 0$ macht.

Uebrigens ist gut zu bemerken, daß, wenn der Ausdruck von T ein Glied dA enthält, das ein vollkommenes Differential einer Funktion ist, worin eine der veränderlichen Größen wie ξ nur unter einer endlichen Form erscheint, dieses Glied in dem Werthe von Γ in Bezug auf diese veränderliche Größe nichts giebt. Denn setzt man

Digitized by Google

$$T = dA = \frac{dA}{d\xi} d\xi + \frac{dA}{d\psi} d\psi + \frac{dA}{d\varphi} d\varphi + \text{etc.};$$

so hat man

$$\frac{\partial T}{\partial d\xi} = \frac{dA}{d\xi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \partial. \frac{\frac{dA}{d\xi}}{d\xi} d\xi + \partial. \frac{\frac{dA}{d\psi}}{d\xi} d\psi + \text{etc}$$

$$= \frac{d^2 A}{d\xi^2} d\xi + \frac{d^2 A}{d\xi d\psi} d\psi + \text{etc.}$$

$$= d. \frac{dA}{d\xi}$$

folglich wird der Coefficient von $\partial\xi$

$$d. \frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = d. \frac{dA}{d\xi} - d. \frac{dA}{d\xi} = 0.$$

Hieraus folgt, daß wenn der Ausdruck von T ein Glied von der Form B d A enthielte, wo A eine Funktion von ξ, ψ, etc. ohne $d\xi$, und B eine gewisse Funktion von ξ ist, dieses Glied in dem Werthe von Γ in Ansehung der Variation von ξ das Glied $dB \frac{\partial A}{\partial \xi}$ gäbe. Denn giebt man dem Gliede B d A die Form

$$d. (BA) - A dB$$

so sieht man sogleich, daß das Glied d. (B A) nichts in Rücksicht auf die veränderliche Größe ξ geben wird, weil AB ξ ohne $d\xi$ enthält; ferner da

dB

Digitized by Google

dB weder ξ noch $d\xi$ und A ξ ohne $d\xi$ enthält; so sieht man, daß, wenn man $T = -AdB$ macht; man erhält

$$\frac{\delta T}{\delta d\xi} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{\delta T}{\delta \xi} = -\frac{\delta A}{\delta \xi} dB;$$

der Coefficient von $\delta\xi$ in Γ verwandelt sich also in $\frac{\delta A}{\delta \xi} dB$.

8) Was nun die Größe Δ (2) betrifft; so ist es leicht, sie in Funktionen von ξ, ψ, φ, etc. auszudrücken, weil man nur einzeln die Ausdrückungen der Distanzen p, q, r, etc. und der Kräfte P, Q, R, etc. darin einzuführen braucht. Noch leichter aber wird dies Verfahren, wenn die Kräfte so beschaffen sind, daß die Summe der Momente, d. h. die Größe $Pdp + Qdq + Rdr +$ etc. integrabel ist, welches, wie wir schon oben (3 Absch. 10.) bemerkt haben, eigentlich der Fall in der Natur ist.

Denn setzen wir, wie am a. O.

$$d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.};$$

so hat man Π durch eine endliche Funktion von p, q, r, etc. ausgedrückt, man hat folglich auch:

$$\delta\Pi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$$

und $\Delta = S\delta\Pi m = \delta . S\Pi m$

indem das Zeichen S unabhängig vom Zeichen δ ist.

Man hat also nur den Werth der Größe $S\Pi m$ in einer Funktion von ξ, ψ, φ, etc. zu suchen, welches nur die Substitution der Werthe von x, y, z in ξ, ψ, φ in den Ausdrücken von p, q, etc. (2 Abschn. 8.) erfodert. Nennen wir nun diesen Werth von $S\Pi m$ V; so hat man sogleich:

Digitized by Google

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial \xi}\partial\xi + \frac{\partial V}{\partial \psi}\partial\psi + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\partial\varphi \text{ etc.}$$

9) Auf diese Art verwandelt sich die allgemeine Formel der Bewegung $T + \Delta = 0$ (2) in folgende:

$$Z\partial\xi + \Psi\partial\psi + \Phi\partial\varphi + \text{etc.} = 0$$

worin $Z = d.\frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi}$

$$\Psi = d.\frac{\partial T}{\partial d\psi} - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi}$$

$$\Phi = d.\frac{\partial T}{\partial d\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

etc.

wenn man $T = S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\right)m$,

$$V = S\Pi m,$$

und $d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$ setzt.

Nimmt man also bey der Wahl der neuen veränderlichen Größen ξ, ψ, φ etc. auf die durch die Natur des vorgesetzten Systems gegebene Bedingungsgleichungen Rücksicht, so daß diese veränderlichen Größen völlig von einander unabhängig sind, und ihre Variationen $\partial\xi, \partial\psi, \partial\varphi$ etc. folglich völlig unbestimmt bleiben; so hat man sogleich diese besondern Gleichungen:

$$Z = 0,\ \Psi = 0,\ \Phi = 0 \text{ etc.}$$

welche dazu dienen werden, die Bewegung des Systems zu bestimmen, indem ihre Anzahl der der veränderlichen Größen ξ, ψ, φ etc., wovon die Stellung des Systems in jedem Augenblicke abhängt, gleich ist.

Ohne

Digitized by Google

Ohnerachtet man aber allezeit die Aufgabe auf diesen Zustand bringen kann, indem man nur vermittelst der Bedingungsgleichungen soviel veränderliche Größen wegzuschaffen, als es geschehen kann, und hernach statt ξ, ψ, φ etc. die übriggebliebenen veränderlichen Größen zu nehmen braucht; so kann es doch Fälle geben, wo diese Methode nur allzu beschwerlich ist; und wo es vortheilhaft ist, um nicht in einen zu sehr verwickelten Calkul zu gerathen, eine größere Anzahl von veränderlichen Größen beyzubehalten. Man muß alsdann die Bedingungsgleichungen, denen man noch nicht genug gethan hat, dazu anwenden, in der allgemeinen Formel einige der Variationen $\delta\xi$, $\delta\psi$ etc. wegzuschaffen; aber statt der würklichen Wegschaffung wird es einfacher seyn, die (1 Theil 4 Abschn.) vorgetragene Methode anzuwenden.

10) Es seyen daher wie (1 Theil 4. Abschn. 3.) $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, etc. die gesuchten Gleichungen auf Funktionen von ξ, ψ, φ etc. gebracht, so daß L, M, N etc. gegebenen Funktionen dieser veränderlichen Größen seyen. Man addire zur ersten Hälfte der allgemeinen Gleichung (9) die Größe $\lambda dL + \mu dM + \nu dN +$ etc. worin λ, μ, ν etc. unbestimmte Coefficienten sind; alsdenn kann man die Variationen $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$ etc. als unabhängig und willkührlich betrachten.

Auf diese Art erhält man die allgemeine Gleichung:

$$\Xi\delta\xi + \Psi\delta\psi + \Phi\delta\varphi + \text{etc.} + \lambda\delta L + \mu\delta M + \nu\delta N + \text{etc.} = 0$$

deren Wahrheit unabhängig von den Variationen $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$ etc. geprüft werden muß, wodurch man folgende besondere Gleichungen erhält:

$$\Xi + \lambda\frac{\delta L}{\delta\xi} + \mu\frac{\delta M}{\delta\xi} + \nu\frac{\delta N}{\delta\xi} + \text{etc.} = 0,$$

$$\Psi + \lambda\frac{\delta L}{\delta\psi} + \mu\frac{\delta M}{\delta\psi} + \nu\frac{\delta N}{\delta\psi} + \text{etc.} = 0,$$

$$\Phi + \lambda\frac{\delta L}{\delta\varphi} + \mu\frac{\delta M}{\delta\varphi} + \nu\frac{\delta N}{\delta\varphi} + \text{etc.} = 0,$$

Digitized by Google

Schafft man hieraus die unbekannten Größen λ, μ, ν etc. weg; so bleiben die zur Auflösung der Aufgaben nöthigen Gleichungen übrig.

Uebrigens lassen sich über die verschiedenen Glieder $\lambda\delta L$, $\mu\delta M$ etc. denen (1 Th. 4 Abschn. 7) bereits angestellten ähnliche Bemerkungen machen, und ähnliche Folgerungen daraus herleiten.

Es hindert auserdem nichts, daß die Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, etc. nicht auch die veränderliche Größe t, welche die Zeit ausdrückt, enthalte, nur mußte man sie alsdenn als beständig bey der Differentiation nach δ ansehen, wie wir schon oben angemerkt haben.

11) Bey Anwendung dieser Methode kann man, wenn man will, die ursprünglichen veränderlichen Größen x, y, z beybehalten, wenn man nur auf alle durch die Natur des Systems zwischen diesen veränderlichen Größen gegebenen Bedingungsgleichungen Acht hat. Denn man hat alsdenn zur ersten Hälfte der allgemeinen Formel (2 Abschn. 7) nur die Größe $\lambda\delta L + \mu\delta M + \nu\delta N +$ etc. hinzu zu addiren, und die Gleichung hierauf in Ansehung jeder der zu den verschiedenen Körpern des Systems gehörigen Variationen wahr zu machen.

Hiedurch enthält man für jeden Körper m 3 Gleichungen von dieser Form: (2 Abschn. 8)

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)m + \lambda\frac{\delta L}{\delta x} + \mu\frac{\delta M}{\delta x} + \nu\frac{\delta N}{\delta x} + \text{etc.} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)m + \lambda\frac{\delta L}{\delta y} + \mu\frac{\delta M}{\delta y} + \nu\frac{\delta N}{\delta y} + \text{etc.} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)m + \lambda\frac{\delta L}{\delta z} + \mu\frac{\delta M}{\delta z} + \nu\frac{\delta N}{\delta z} + \text{etc.} = 0,$$

so daß die ganze Zahl der Gleichungen 3 mal so groß seyn wird als die der Körper.

Hier-

Digitized by Google

Hierauf muß man die unbestimmten Größen λ, μ, ν etc. wegschaffen, deren Zahl der Zahl der Bedingungsgleichungen L = 0, M = 0, N = 0, etc. gleich ist, wodurch die Zahl der gefundenen Gleichungen um eben so viel vermindert wird. Addirt man aber dazu die Bedingungsgleichungen selbst; so erhält man von neuem so viele Gleichungen als veränderliche Größen sind.

12) Diese Methode ist alsdenn besonders von Nutzen, wenn das vorgegebene System aus einer unendlichen Menge von Theilchen oder Elementen besteht, deren Vereinigung mit einander eine endliche Masse von einer veränderlichen Figur bildet. Man wendet alsdenn eine der (1 Theil 4 Abschn. 9 u. f.) vorgetragenen ähnliche Analysis an; aber anstatt des Zeichens d, dessen wir uns a. a. O. bedienet haben, um die Differentialien der veränderlichen Größen in Rücksicht auf die verschiedenen Elemente des Systems zu bestimmen, ist es hier vortheilhafter, Gebrauch von einem neuen Zeichen D zu machen, um das andere Zeichen d zu dem Behuf anzuwenden, wozu wir es schon oben bestimmt haben.

Man erhält also auf diese Art 3 Sorten von Differentialien, die unabhängig von einander sind, die einen sind durch d bezeichnet, und beziehen sich auf das Integralzeichen ∫, und sie gehören nur zu den durch jeden Körper oder Element des Systems beschriebenen krummen Linien; die andern mit D bezeichneten aber beziehen sich auf das Integralzeichen S, und gehören zu den verschiedenen Elementen des Systems, und zu der Stellung dieser Elemente unter einander während eines Augenblicks; was endlich die Differentialien oder Variationen, deren Zeichen δ ist, anlangt, so haben sie sich einzig und allein auf die willkührliche Veränderung, wovon man annimmt, daß sie sich bey der Stellung des Systems ereigne, und verschwinden am Ende des Calculs von selbst.

13) Es sey daher Dm die Masse jedes Elements des Systems; so muß man in den Werthen von Γ und Δ (2) und folglich auch in denen von T und V (9) Dm an die Stelle der m setzen, und hierauf zur ersten Hälfte der allgemeinen Formel Γ + Δ = 0 die Glieder addiren, die zu den verschiedenen Bedingungsgleichungen gehören. Diese Gleichungen nun kön-

Digitized by Google

können von zweyerley Art seyn, entweder nehmlich unbestimmt, und alsdenn gehören sie auf einerley Weise zu allen Elementen des Systems, oder bestimmt, wo sie denn nur zu einigen dieser Elemente gehören. Es seyen daher $L = 0$, $M = 0$, etc. die Bedingungsgleichungen von der ersten Art, alsdenn hat man die Größen L, M, etc. durch Funktionen der Coordinaten x, y, z, und ihrer Differentialien nach D ausgedrückt, nämlich Dx, Dy, Dz, Dx^2, Dy^2, etc. und da nur 3 veränderliche Größen nehmlich x, y, z vorhanden sind; so ist klar, daß die Zahl der Gleichungen zwischen diesen veränderlichen Größen sich höchstens auf drey belaufen kann. Nimmt man daher die unbestimmten Coefficienten λ, μ, etc. an; so erhält man in Ansehung jedes Elements des Systems die Glieder $\lambda\delta L + \mu\delta M +$ etc, welche zur allgemeinen Formel hinzuaddirt werden müssen. Die ganze Summe der hinzuzuaddirenden Glieder wird also durch $S(\lambda\delta L + \mu\delta M +$ etc.) ausgedrückt werden müssen.

14) Bezeichnen wir nun durch $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, etc. die bestimmten Bedingungsgleichungen; so werden die Größen A, B, C, etc. ebenfals Funktionen der Coordinaten und ihrer Differentialien nach D jedoch nur für bestimmte Punkte des Systems seyn. Wir wollen diese Coordinaten durch ein oder mehrere Striche bezeichnen, und besonders durch einen Strich alle Größen andeuten, die sich auf die Punkte beziehen, wo das durch das Zeichen S angedeutete Integral anfängt, durch 2 Striche aber diejenigen, die sich auf die Punkte beziehen, wo eben dies Integral aufhört, und durch 3 oder mehrere diejenigen, die sich auf andere bestimmte Punkte des Systems beziehen, anzeigen.

Die Werthe von A, B, C, etc. werden also in Funktionen von x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''' etc.; Dx', Dy', Dz', Dx'', Dy'' etc. gegeben seyn, und folglich wird man wegen der Bedingungsgleichungen $A = 0$, $B = 0$, etc. die Glieder $\alpha\delta A + \beta\delta B + \gamma\delta C +$ etc. zur allgemeinen Formel zu addiren haben, wenn man für α, β, γ etc. neue unbestimmte Coefficienten annimmt.

15) Man

Digitized by Google

15) Man bekommt also für die Bewegung des Systems folgende allgemeine Gleichung:

$$0 = S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) Dm$$
$$+ S\,(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.})\,Dm$$
$$+ S\,(\lambda\delta L + \mu\delta M + \text{etc.})$$
$$+ \alpha\delta A + \beta\delta B + \gamma\delta C + \text{etc.}$$

welche statt finden muß, wie auch die Differentialien oder Variationen δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, etc. beschaffen seyn mögen.

Diese Gleichung ist völlig denjenigen analog, die man vermittelst der Methode der Variationen für die Bestimmung der maxima und minima der Integralformeln findet, und man muß sie auch nach einerley Regeln behandeln. Man sehe was wir hierüber schon (1 Theil 4 Abschn. 16 u. f.) gesagt haben.

16) Alles kommt darauf an, die doppelten durch δD, δD^2 etc. angedeuteten Differentialien unter dem Zeichen S zum Verschwinden zu bringen. Es sey z. B. das Glied $S\Omega\delta Dx$, man verwandle sogleich δD in $D\delta$, und integrire theilweise in Beziehung auf das Zeichen D, welches zum Zeichen S gehört. Completirt man nun das Integrale; so hat man nach (14)

$$S\Omega\delta Dx = \Omega''\delta x'' - \Omega'\delta x' - S\delta x\,D\Omega.$$

Eben so findet man, wenn man in Beziehung auf D so oft als möglich integrirt:

$$S\Omega\delta D^2x = \Omega''D\delta x'' - D\Omega''\delta x'' - \Omega'D\delta x'$$
$$+ D\Omega'\delta x' + S\delta x\,D^2\Omega \text{ u. s. f.}$$

Durch ähnliche Reduktionen bringt man daher die allgemeine Gleichung (15) auf diese Form:

$$S\,(Z\delta x + \Psi\delta y + \Phi\delta z) + \Sigma = 0$$

Digitized by Google

worin Σ, Ψ, Φ Funktionen von x, y, z, Dx, Dy, Dz, D^2x, etc. so wie von λ, μ etc., $D\lambda$, $D\mu$ etc. sind, und wo Σ aus verschiedenen Gliedern besteht, wovon jedes eine der Variationen $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$, $\partial x''$, etc. oder ihrer Differentialien $D\partial x'$, $D^2\partial x'$ etc, enthält.

Man setze hierauf jede der Größen, worin verschiedene Variationen vorkommen, eben so als wenn alle diese Variationen völlig unabhängig von einander und wilkührlich wären $= 0$, wodurch man sogleich die 3 unbestimmten Gleichungen

$$\Sigma = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Phi = 0$$

für alle Elemente des Systems erhält. Ausserdem aber giebt jedes Glied der Größe Σ eine bestimmte und auf bestimmte Punkte des Systems sich beziehende Gleichung. Vermittelst dieser verschiedenen Gleichungen bringt man den die unbestimmten Größen λ, μ, etc. α, β, γ etc. weg; verbindet man nun die hieraus entspringenden Gleichungen mit den Bedingungsgleichungen

$$L = 0, \quad M = 0, \text{ etc.}$$

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \text{ etc.}$$

so erhält man in jedem Falle eine vollständige Auflösung. Das übrige geschiehet alle durch bloßen Calkul.

Fünf-

Digitized by Google

Fünfter Abschnitt.

Auflösung verschiedener Aufgaben der Dynamik.

Wir haben (1 Theil 5 Abschn.) die Auflösung mehrerer Aufgaben über das Gleichgewicht der Körper gegeben. Nichts ist leichter als die für's Gleichgewicht gefundenen Formeln auf die Bewegung eben dieser Körper anzuwenden; denn nach dem, was wir (2 Abschn. 4) erwiesen haben, hat man nur die neuen beschleunigenden Kräfte $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, deren Richtungen die Linien x, y, z sind, wenn man t die verflossene Zeit nennet, und dt = Const. annimmt, zu den Kräften zu addiren, die nach der Voraussetzung auf jeden Körper würken.

Man hat also bey den Aufgaben, wo X, Y, Z die absoluten Kräfte bezeichnen, die den Körper m, den man als einen Punkt betrachtet, nach den Coordinaten x, y, z ziehen, an die Stelle dieser Kräfte die Kräfte $X + m\frac{d^2x}{dt^2}$, $Y + m\frac{d^2y}{dt^2}$, $Z + m\frac{d^2z}{dt^2}$ zu setzen, und eben so bey den auf jeden der Körper des Systems würkenden Kräften zu verfahren. Aber bey Aufgaben, wo man mit auf die Masse der Körper Rücksicht nimmt, und wo X, Y, Z nur die Kräfte ausdrücken, die auf jeden Punkt der endlichen Masse m würken, welche folglich zu den beschleunigenden Kräften gehören, hat man nur statt X, Y, Z die Größen $X + \frac{d^2x}{dt^2}$, $Y + \frac{d^2y}{dt^2}$, $Z + \frac{d^2z}{dt^2}$, zu substituiren u. s. f.

Auf diese Art gelangt man durch die für's Gleichgewicht gefundenen Gleichungen sogleich zu denen der Bewegung, und die Aufgaben in beiden

Digitized by Google

Zuständen sowohl in der Ruhe als in der Bewegung werden auf einerley Art aufgelöst. Im Fall der Bewegung erfodern zwar die Gleichungen, indem sie Differentialien von der 2ten Ordnung in sich enthalten, besondere Integrationen mit Rücksicht auf die verschiedenen veränderlichen Größen t, x, y, z, x', y', etc.; aber die weitere Entwickelung gehört blos der Integralrechnung zu; und die Dynamik hat alles gethan, was man von ihr zu erwarten berechtiget war, indem sie die Fundamentalgleichungen verschafft.

Da inzwischen diese Gleichungen verschiedene mehr oder weniger einfache Formen haben können, die besonders mehr oder weniger zur Integration geschickt sind; so ist es nicht gleichgültig unter welcher Form sie zuerst erscheinen; ja es ist vielleicht einer der Hauptvorzüge unserer Methode, allezeit die Gleichungen jeder Aufgabe unter der einfachsten Form in Ansehung der veränderlichen Größen darzustellen, die man dabey anwendet, und dazu in den Stand zu setzen vorher zu beurtheilen, welches die veränderlichen Größen seyen, deren Anwendung die Integration am meisten erleichtert.

Wir wollen in dieser Hinsicht einige allgemeine Grundsätze aufstellen, deren Gebrauch man in der Folge bey Auflösung verschiedener Aufgaben sehen wird:

2) Aus den im vorhergehenden Abschnitte gegebenen Formeln erhellet, daß die Differentialglieder der Gleichungen für die Bewegung eines gewissen Systems von Körpern allein von der Größe T herkommen, die die Summe aller $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} m$ in Ansehung der verschiedenen Körper ausdrückt. Jede endliche veränderliche Größe wie ξ, die in dem Ausdruck von T vorkommt, giebt das Glied $-\frac{\partial T}{\partial \xi}$ und jede veränderliche Differentialgröße, wie $d\xi$ giebt das Glied $d.\frac{\partial T}{\partial d\xi}$; man sieht

ſieht alſo hieraus, daß die genannten Glieder keine andere Funktionen der veränderlichen Größen enthalten können als diejenigen, die im Ausdruck T vorkommen; bedienet man ſich alſo der Sinus und Coſinus der Winkel, welcher Gedanke ſich ſo natürlich bey Auflöſung mehrerer Aufgaben darbietet; ſo geſchieht es, daß die Sinus und Coſinus aus der Funktion T verſchwinden; alsdenn enthält ſie nichts weiter als die Differentialien dieſer Winkel, und die genannten Glieder enthalten auch nur dieſe Differentialien. Man hat alſo allezeit für die Einfachheit der Gleichungen der Aufgabe etwas zu gewinnen, wenn man von dieſen Arten von Subſtitutionen Gebrauch macht.

Bediente man ſich alſo anſtatt der beiden Coordinaten, x, y des Radius Vektors ρ, den man vom Mittelpunkte eben dieſer Coordinaten geführt hat, und der mit der Achſe der x den Winkel φ macht; alsdann erhält man $x = \rho \operatorname{Cof} \varphi$, $y = \rho \operatorname{ſin} \varphi$ und wenn man differentiirt $dx = \operatorname{Cof} \varphi \, d\rho - \rho \operatorname{ſin} \varphi \, d\varphi$, $dy = \operatorname{ſin} \varphi \, d\rho + \rho \operatorname{Cof} \varphi \, d\varphi$; folglich $dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$; welcher ſehr einfache Ausdruck weder Sinus noch Coſinus von φ enthält, ſondern allein deſſen Differential $d\varphi$. Die Größe $dx^2 + dy^2 + dz^2$ verwandelt ſich alſo auf dieſe Art in $\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 + dz^2$.

Statt des ρ und z könnte man auch einen neuen Radius Vektor r mit dem Winkel ψ ſubſtituiren, den dieſer Radius mit ρ, welcher ſeine Projektion iſt, macht; dies gäbe $\rho = r \operatorname{Cof} \psi$, $z = r \operatorname{ſin} \psi$ folglich $d\rho^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2$; ſo daß die Größe $dx^2 + dy^2 + dz^2$ ſich verwandelte in $r^2 (\operatorname{Cof} \psi^2 \, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2$. Hier iſt klar, daß r der Radius, der vom Mittelpunkte der Coordinaten zu dem Punkte des Raumes gezogen iſt, wo der Körper m ſich befindet, ſeyn wird, ψ aber die Neigung dieſes Radius zur Ebene der x und y und φ der Winkel der Projektion eben dieſes Radius auf derſelben Ebene der x iſt; man hat alſo:

$$x = r \operatorname{Cof} \psi \operatorname{Cof} \varphi,$$
$$y = r \operatorname{Cof} \psi \operatorname{ſin} \varphi,$$
$$z = r \operatorname{ſin} \psi.$$

Digitized by Google

Man kann aber endlich sich anderer Substitutionen nach Gefallen bedienen, und besteht das System aus mehrern Körpern, so kann man sie sogleich auf einander durch relative Coordinaten beziehen; die Umstände jeder Aufgabe werden allezeit die geschicktesten dazu anzeigen. Man kann auch, wenn man nach einer Substitution eine oder mehrere Gleichungen der Aufgabe gefunden hat, die andern durch andere Substitutionen erhalten, welches von neuem Mittel an die Hand geben wird, diese Gleichungen unter verschiedenen Gestalten darzustellen und solche zu finden, die am einfachsten und leichtesten können integrirt werden.

3) Die andern Glieder der Gleichungen der Bewegung hängen von den beschleunigenden Kräften ab, die man auf die Körper würkend sich vorstellt, und von den Bedingungsgleichungen, die zwischen den auf die Stellung der Körper im Raume sich beziehenden veränderlichen Größen statt finden.

Würken die Kräfte P, Q, R, etc. nach festen Mittelpunkten oder auf Körper desselben Systems, und sind sie gewissen Funktionen der Distanzen proportional, wie das würklich in der Natur statt findet; so wird die Größe V, die die Summe der Größen

$$m\int(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.})$$

für alle Körper m des Systems ausdrückt, eine algebraische Funktion der Distanzen seyn, und für jede veränderliche Größe ξ, woraus sie zusammengesetzt ist, ein endliches Glied von der Form $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ geben.

Ebenso geben die Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, etc. für dieselbe veränderliche Größe ξ die Glieder

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial \xi}, \quad \mu \frac{\partial M}{\partial \xi}, \text{ etc. u. s. f.}$$

Man

Digitized by Google

Man hat also nur zum Werth von V die Größen λL, μM, etc. zu addiren, indem man λ, μ, etc. bey den Differentiationen nach δ als beständige Größen annimmt.

Kommen daher einige der veränderlichen Größen, die sich in der Funktion T befinden, weder in V noch in L, M, etc. vor; so enthalten die zu diesen veränderlichen Größen gehörigen Gleichungen nur Differentialglieder in sich, und die Integration wird um so leichter von statten gehen, besonders wenn diese veränderlichen Größen sich in T nur unter der Differentialform befinden. Dies findet alsdenn statt, wenn die Körper nach Mittelpunkten gezogen werden, und man die Distanzen von diesen Mittelpunkten und die um sie beschriebene Winkel zu Coordinaten nimmt.

4) Der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte giebt aber eine Integration, welche allezeit statt findet, wenn die Kräfte Funktionen der Distanzen sind, und die Funktionen T, V, L, M, etc. die endliche veränderliche Größe t nicht in sich schliessen. Ohnerachtet wir schon gezeigt haben, wie dieser Grundsatz aus unserer allgemeinen Formel der Dynamik hergeleitet wird (3 Abschn. 10.); so wird es dennoch nicht unnütz seyn, zu zeigen, daß die besondern aus dieser Formel hergeleiteten Gleichungen eine Integralgleichung geben, welche diejenige der Erhaltung der lebendigen Kräfte ist.

Da jede dieser Gleichungen von der Form

$$\mathrm{d}.\frac{\partial T}{\partial \mathrm{d}\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi} + \lambda\frac{\partial L}{\partial \xi} + \mu\frac{\partial M}{\partial \xi} + \text{etc.} = 0$$

ist; so ist klar, daß, wenn man sie durch die respektiven Differentialien $\mathrm{d}\xi$ etc. multiplicirt, sie addirt und sich erinnert, daß die Größen T, V, L, M, etc. (per hyp.) algebraische Funktionen der veränderlichen Größen ξ etc. ohne t sind, man folgende Gleichung hat:

$$\left(\mathrm{d}.\frac{\partial T}{\partial \mathrm{d}\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi + \text{etc.} + \mathrm{d}V + \lambda\mathrm{d}L + \mu\mathrm{d}M + \text{etc.} = 0$$

aber

Digitized by Google

aber da $L = 0$, $M = 0$, etc. die Bedingungsgleichungen sind; so hat man auch allgemein $dL = 0$, $dM = 0$, etc.; die vorhergehende Gleichung verwandelt sich also leicht in diese:

$$\left(d.\frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi}\right) d\xi + \text{etc.} + dV = 0 \quad (\alpha)$$

aber $d\xi\, d.\frac{\partial T}{\partial d\xi} = d.\left(\frac{\partial T}{\partial d\xi}\, d\xi\right) - \frac{\partial T}{\partial d\xi}\, d^2\xi$;

und T ist eine algebraische Funktion der veränderlichen Größen ξ etc. und ihrer Differentialien $d\xi$ etc. ohne t; man hat daher

$$dT = \frac{\partial T}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial T}{\partial d\xi}\, d^2\xi + \text{etc.};$$

wodurch die Gleichung (α) sich in folgende (β) verwandelt:

$$d.\left(\frac{\partial T}{\partial d\xi}\, d\xi + \text{etc.}\right) - dT + dV = 0 \quad (\beta)$$

welche offenbar integrabel ist. Integrirt man also; so erhält man:

$$\frac{\partial T}{\partial d\xi}\, d\xi + \text{etc.} - T + V = \text{Const.} \quad (\gamma).$$

Da nun $T = S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\right) m$; so sieht man leicht, daß, was man auch für veränderliche Größen für x, y, z substituirt, die daraus entstehende Funktion allezeit homogen und in Ansehung der Differentialien dieser veränderlichen Größen von 2 Dimensionen seyn wird. Man erhält also nach dem bekannten Theorem

$$c = \frac{\partial T}{\partial d\xi}\, d\xi + \text{etc.} = 2\,T,$$

Das

Digitized by Google

Das gefundene Integral wird also (wenn man in (γ) diesen Werth von $\frac{\partial T}{\partial d\xi} d\xi +$ etc. substituirt, M.) seyn: $T + V =$ Const., welche Gleichung den Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte (3 Abschn. 10.) enthält.

Wäre die Größe V keine algebraische Funktion; so wäre auch nicht $dV = \frac{\partial V}{\partial \xi} d\xi +$ etc.; und enthielten die Größen T, L, M, etc. auch die veränderliche Größe t; so enthielten auch ihre Differentialien dT, dL, dM, etc. die Glieder

$$\frac{\partial T}{\partial t} dt, \quad \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad \frac{\partial M}{\partial t} dt, \text{ etc.};$$

die Reduktionen, die die Gleichung integrabel machten, würden also nicht mehr Platz finden, und folglich der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte nicht mehr statt haben.

5) Man findet zwar den Beweis des Lehrsatzes von den homogenen Funktionen, wovon wir eben Gebrauch gemacht haben, in verschiedenen Werken, und wir könnten ihn daher als bekannt voraussetzen, allein der folgende Beweis ist so einfach, daß er wohl eine Bekanntmachung verdienet. Ist F eine homogene Funktion verschiedener veränderlichen Größen x, y, etc. von der Dimension n; so ist klar, daß wenn man darin ax, ay, etc. statt der x, y, etc. setzt, sie nothwendig $a^n F$ wird, wie auch die Größe a beschaffen seyn mag. Setzt man nun $a = 1 + \alpha$ und betrachtet α als eine unendlich kleine Größe; so wird der unendlich geringe Wachsthum von F, der von den unendlich kleinen Zuwächsen αx, αy, etc. der x, y, etc. herkommt, $= n\alpha F$ seyn. Setzt man aber x, y, etc. verändere sich in αx, αy, etc.; so erhält man überhaupt für die Variation von F, $\frac{\partial F}{\partial x} \alpha x + \frac{\partial F}{\partial y} \alpha y +$ etc.

Digitized by Google

Setzt man nun diese beiden Ausdrückungen der Vermehrung von F einander gleich und dividirt durch α; so erhält man:

$$nF = \frac{\delta F}{\delta x} x + \frac{\delta F}{\delta y} y + \text{etc.}$$

6) Das auf die Erhaltung der lebendigen Kräfte sich beziehende Integral ist bey Auflösung der mechanischen Aufgaben von großem Nutzen, besonders wenn die Funktion T nur das Differential einer veränderlichen Größe enthält, die in der Funktion V nicht vorkömmt; denn dies Integral dient alsdenn dazu diese veränderliche Größe zu bestimmen und Differentialgleichungen wegzuschaffen.

Was die Integralien betrifft, die sich auf die Erhaltung der Bewegung des Mittelpunkts der Schwere und auf den Grundsatz der Flächen beziehen, und die wir schon im 3ten Abschnitt allgemein gefunden haben; so bieten sie sich von selbst bey Auflösung jeder Aufgabe an, wenn man nur bey der Wahl der veränderlichen Größen die absolute Bewegung des Systems von den relativen Bewegungen der Körper unter einander, sowie wir dies (3 Abschn. 15.) gethan haben, abzusondern trachtet. Diese verschiedenen Integralien reichen aber zur völligen Auflösung der Aufgabe nur alsdann hin, wenn ihre Zahl der Zahl der veränderlichen Größen gleich ist. In jedem andern Falle muß man noch neue Integralien suchen, jedoch würde man keine allgemeine Regel darüber angeben können. Doch giebt es ein Fall, der einen sehr weitläuftigen Umfang hat, und der einer vollständigen Auflösung fähig ist, nämlich der, wo das System nur sehr kleine Oscillationen von seiner Stellung im Gleichgewicht macht. Da diese Auflösung leicht sich aus unsern Formeln herleiten läßt, so wollen wir sie hier mittheilen und zugleich verschiedene neue und wichtige Bemerkungen mit einfliesen lassen.

Digitized by Google

§. 1.

Allgemeine Auflösung der Aufgabe von sehr kleinen Oscillationen eines gewissen Systems von Körpern.

7) Es seyen a, b, c die Werthe der rechtwinklichten Coordinaten jedes Körpers m des Systems, welches wir uns im Gleichgewicht vorstellen. Da es bey seiner Bewegung nach der Voraussetzung sich sehr wenig von seiner Stellung im Gleichgewicht entfernen soll; so hat man allgemein $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, $z = c + \gamma$ wo die veränderlichen Größen α, β, γ allezeit sehr klein sind. Man hat also nur auf die erste Dimension dieser Größen bey den Differentialgleichungen der Bewegung zu sehen. Ebendies wird bey den andern diesen analogen Größen statt finden, und wir wollen ihre Beziehung auf die verschiedenen Körper m', m'', etc. desselben Systems durch ein, zwey und mehrere Striche andeuten, und sie dadurch von einander unterscheiden.

Wir wollen nun zuerst die Bedingungsgleichungen betrachten, die nach der Natur des Systems statt finden müssen, und die man unter $L = 0$, $M = 0$, etc. sich vorstellen kann, wo L, M, etc. gegebene algebraische Funktionen der Coordinaten x, y, z, x', y', etc. sind. Da das System auch die Stellung des Gleichgewichts haben kann; so folgt, daß eben diese Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, etc. statt finden müssen, wenn man annimmt, daß aus x, y, z, x' etc. a, b, c, a' etc. wird, woraus man leicht den Schluß ziehen kann, daß diese Gleichungen die Zeit t nicht enthalten können.

Es werde also aus L, M, etc., A, B, etc., wenn aus x, y, z, x', etc., a, b, c, a' etc. werden; substituirt man also für x, y, z, x' etc. ihre Werthe $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$, $a' + \alpha'$ etc.; so erhält man, da α, β, γ, α' etc. sehr klein sind:

$$L = A + \frac{dA}{da}\alpha + \frac{dA}{db}\beta + \frac{dA}{dc}\gamma + \frac{dA}{da'}\alpha' + \text{etc.},$$

Digitized by Google

$$M = B + \frac{dB}{da}\alpha + \frac{dB}{db}\beta + \frac{dB}{dc}\gamma + \frac{dB}{da'}\alpha' + \text{etc.},$$

etc.

Folglich erstlich $A = 0$, $B = 0$, etc. in Beziehung aufs Gleichgewicht, und 2tens erhält man die Gleichungen

$$\frac{dA}{da}\alpha + \frac{dA}{db}\beta + \frac{dA}{dc}\gamma + \frac{dA}{da'}\alpha' + \text{etc.} = 0,$$

$$\frac{dB}{da}\alpha + \frac{dB}{db}\beta + \frac{dB}{dc}\gamma + \frac{dB}{da'}\alpha' + \text{etc.} = 0,$$

etc.

welche die Verhältniß geben, die zwischen den veränderlichen Größen α, β, γ, α' etc. statt finden muß.

Vernachlässiget man sogleich die sehr kleinen Größen von der 2ten Ordnung und den höhern Ordnungen; so erhält man Gleichungen, wodurch man die Werthe einiger dieser veränderlichen Größen durch die andern bestimmt; durch diese erstern Werthe findet man hierauf auch genauere, wenn man auch auf die 2ten und höheren Potenzen, so weit man es für gut findet, Acht hat. Hiedurch erhält man also die Werthe einiger der veränderlichen Größen α, β, γ, α', etc. in Funktionen in Reihen der andern veränderlichen Größen, und diese übrigbleibenden veränderlichen Größen werden alsdenn völlig unabhängig von einander seyn.

Uebrigens kann man, wenn man auf die Bedingungsgleichungen der Aufgabe sieht, die Coordinaten sogleich mit Hülfe einiger Substitutionen in rationellen, von andern veränderlichen Größen völlig unabhängigen, und sehr kleinen Funktionen ausdrücken, deren Werth im Zustande des Gleichgewichts $= 0$ sey.

Wir wollen daher annehmen, wir hätten allgemein:

Digitized by Google

$$x = a + a1\,\xi + a2\,\psi + a3\,\varphi + \text{etc.} + a'1\,\xi^2 + \text{etc.},$$

$$y = b + b1\,\xi + b2\,\psi + b3\,\varphi + \text{etc.} + b'1\,\xi^2 + \text{etc.},$$

$$z = c + c1\,\xi + c2\,\psi + c3\,\varphi + \text{etc.} + c'1\,\xi^2 + \text{etc.},$$

und eben so bey den andern Coordinaten x', y', etc.; die Größen a, b, c, a1, b1, etc. sind beständig, und die Größen ξ, ψ, φ, etc., veränderlich, sehr gering und im Gleichgewichte $= 0$.

8) Man hat also jetzt nur diese Substitutionen in den Werthen von T und V (2, 3.) zu verrichten, und es ist hinlänglich auf die 2ten Dimensionen zu sehen, um die Differentialgleichungen zwischen den Coordinaten zu erhalten. Man sieht aber leicht, daß der Werth von T von dieser Form seyn wird:

$$T = \frac{(1)\,d\xi^2 + (2)\,d\psi^2 + (3)\,d\varphi^2 + \text{etc.}}{2dt^2} + \frac{(1,2)\,d\xi d\psi + (1,3)\,d\xi d\varphi + (2,3)\,d\psi d\varphi + \text{etc.}}{dt^2}$$

wenn man Kürze halber setzt

$$(1) = S\,(a1^2 + b1^2 + c1^2)\,m,$$

$$(2) = S\,(a2^2 + b2^2 + c2^2)\,m,$$

$$(3) = S\,(a3^2 + b3^2 + c3^2)\,m,$$

etc.

$$(1,2) = S\,(a1\,a2 + b1\,b2 + c1\,c2)\,m,$$

$$(1,3) = S\,(a1\,a3 + b1\,b3 + c1\,c3)\,m,$$

$$(2,3) = S\,(a2\,a3 + b2\,b3 + c2\,c3)\,m,$$

etc.

wo das Zeichen S Integrationen oder Summationen in Beziehung auf alle die verschiedenen Körper m des Systems, die zugleich unabhängig von den

Digitized by Google

veränderlichen Größen ξ, ψ, φ etc. sowie auch von der Zeit t sind, andeutet, (und diese Werthe sowie die eben angenommenen Werthe von x, y, z in der (4) gefundenen Werth von T, $S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\right) m$ substituirt. M.).

Bezeichnet man hierauf durch F die algebraische Funktion: $\int(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.})$ und setzt a, b, c an die Stelle des x, y, z; so ist klar, daß der allgemeine Werth $\int(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.})$ sich so ausdrücken läßt:

$$F + \frac{dF}{da}(a_1\xi + a_2\psi + a_3\varphi + \text{etc.}) +$$
$$\frac{dF}{db}(b_1\xi + b_2\psi + b_3\varphi + \text{etc.}) +$$
$$\frac{dF}{dc}(c_1\xi + c_2\psi + c_3\varphi + \text{etc.}) +$$
$$\frac{d^2F}{2\,da^2}(a_1\xi + a_2\psi + a_3\varphi + \text{etc.})^2 +$$
$$\frac{d^2F}{da\,db}(a_1\xi + a_2\psi + a_3\varphi + \text{etc.})(b_1\xi + b_2\psi + b_3\varphi + \text{etc.}) + \frac{d^2F}{2\,db^2}(b_1\xi + b_2\psi + b_3\varphi + \text{etc.})^2 +$$
$$\text{etc.}$$

wo es hinlänglich ist nur bis auf die 2ten Dimensionen von ξ, ψ, φ etc. zu gehen.

Multipliciren wir daher diese Funktion mit m, und integriren nach dem Zeichen S; so erhält man allgemein

V.

Digitized by Google

$$V = H + H_1\xi + H_2\psi + H_3\varphi + \text{etc.}$$
$$+ \frac{[1]\,\xi^2 + [2]\,\psi^2 + [3]\,\varphi^2 + \text{etc.}}{2}$$
$$+ [1,2]\,\xi\psi + [1,3]\,\xi\varphi + [2,3]\,\psi\varphi \text{ etc.}$$

indem man setzt

$$H = SFm,$$
$$H_1 = S\left(\frac{dF}{da}a_1 + \frac{dF}{db}b_1 + \frac{dF}{dc}c_1\right)m,$$
$$H_2 = S\left(\frac{dF}{da}a_2 + \frac{dF}{db}b_2 + \frac{dF}{dc}c_2\right)m,$$
$$H_3 = S\left(\frac{dF}{da}a_3 + \frac{dF}{db}b_3 + \frac{dF}{dc}c_3\right)m,$$

etc.

$$[1] = S\left(\frac{d^2F}{da^2}a_1^2 + \frac{d^2F}{db^2}b_1^2 + \frac{d^2F}{dc^2}c_1^2 + 2\frac{d^2F}{dadb}a_1b_1 + 2\frac{d^2F}{dadc}a_1c_1 + 2\frac{d^2F}{dbdc}b_1c_1\right)m,$$
$$[2] = S\left(\frac{d^2F}{da^2}a_2^2 + \frac{d^2F}{db^2}b_2^2 + \frac{d^2F}{dc}c_2^2 + 2\frac{d^2F}{dadb}a_2b_2 + 2\frac{d^2F}{dadc}a_2c_2 + 2\frac{d^2F}{dbdc}b_2c_2\right)m,$$
$$[3] = S\left(\frac{d^2F}{da^2}a_3^2 + \frac{d^2F}{db^2}b_3^2 + \frac{d^2F}{dc^2}c_3^2 + 2\frac{d^2F}{dadb}a_3b_3 + 2\frac{d^2F}{dadc}a_3c_3 + 2\frac{d^2F}{dbdc}b_3c_3\right)m,$$

etc.

[1,2]

Digitized by Google

$$[1,2] = S\left(\frac{d^2F}{da^2}a_1a_2 + \frac{d^2F}{db^2}b_1b_2 + \frac{d^2F}{dc^2}c_1c_2 + \frac{d^2F}{dadb}(a_1b_2 + a_2b_1) + \frac{d^2F}{dadc}(a_1c_2 + a_2c_1) + \frac{d^2F}{dbdc}(b_1c_2 + b_2c_1)\right)m,$$

$$[1,3] = S\left(\frac{d^2F}{da^2}a_1a_3 + \frac{d^2F}{db^2}b_1b_3 + \frac{d^2F}{dc^2}c_1c_3 + \frac{d^2F}{dadb}(a_1b_3 + a_3b_1) + \frac{d^2F}{dadc}(a_1c_3 + a_3c_1) + \frac{d^2F}{dbdc}(b_1c_3 + b_3c_1)\right)m,$$

$$[2,3] = S\left(\frac{d^2F}{da^2}a_2a_3 + \frac{d^2F}{db^2}b_2b_3 + \frac{d^2F}{dc^2}c_2c_3 + \frac{d^2F}{dadb}(a_2b_3 + a_3b_2) + \frac{d^2F}{dadc}(a_2c_3 + a_3c_2) + \frac{d^2F}{dbdc}(b_2c_3 + b_3c_2)\right)m,$$

etc.

9) Hat man auf diese Art die Werthe von T und V in Funktionen der veränderlichen Größen ξ, ψ, φ, etc., die unabhängig von einander sind, ausgedrückt; so hat man weiter keine Bedingungsgleichung anzuwenden, und da die Größe T nur die Differentialien der veränderlichen Größen enthält, so hat man sogleich für die Bewegung des Systems folgende Gleichungen:

$$d.\frac{\partial T}{\partial d\xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0,$$

d.

Digitized by Google

$$d.\frac{\partial T}{\partial d\psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0;$$

$$d.\frac{\partial T}{\partial d\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0;$$

etc.

deren Zahl, wie man siehet der Zahl der veränderlichen Größen gleich ist.

Eben diese Gleichungen müssen auch im Zustande des Gleichgewichts statt finden, weil das System, wenn es einmal im Gleichgewicht ist, allezeit darin von selbst verbleiben würde. Beym Gleichgewicht aber ist immer (per hyp.)

$x = a$, $y = b$, $z = c$, $x' = a'$ etc. also $\xi = 0$, $\psi = 0$, $\varphi = 0$ und

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \sigma, \text{ etc.} \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0 \text{ etc.}$$

Die Glieder $d.\frac{\partial T}{\partial d\xi}$, $d.\frac{\partial T}{\partial d\psi}$, etc. sind folglich $= 0$ und die Glieder $\frac{\partial V}{\partial \xi}$, $\frac{\partial V}{\partial \psi}$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$, etc. verwandlen sich in $H1$, $H2$, $H3$, etc. Man hat folglich

$$H1 = 0, \quad H2 = 0, \quad H3 = 0, \text{ etc.}$$

dies sind die nöthigen Gleichungen, wenn a, b, c, a' etc. die Werthe von x, y, z, x', etc. für den Zustand des Gleichgewichts nach der Voraussetzung seyn sollen.

Man sieht auch leicht ein, daß $dV = S(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.})$ die Summe der Momente aller Kräfte Pm, Qm, Rm, etc., die an allen Körpern m des Systems angebracht sind, und die im Gleichgewichte sich aufheben müssen, ausdrückt, nach der (1 Theil 2 Abschn.) gegebenen allgemeinen Formel muß man also haben $dV = 0$ in Ansehung jeder der unabhängigen veränderlichen Größen; folglich werden

Digitized by Google

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0, \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \text{ etc.}$$

die Bedingungen des Gleichgewichts seyn, und da in diesem Falle $\xi = 0$, $\psi = 0$, $\varphi = 0$, etc.; so ist auch $H1 = 0$, $H2 = 0$, $H3 = 0$, etc. so daß die ersten Dimensionen der veränderlichen Größen ξ, ψ, φ, etc. im Ausdrucke V allezeit verschwinden.

Substituirt man daher in den allgemeinen Gleichungen die Werthe von T und V, und setzt $H1, H2, H3$ etc. $= 0$; so erhält man für die Bewegung des Systems:

$$0 = (1)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (1,2)\frac{d^2\psi}{dt^2} + (1,3)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \text{etc.}$$
$$+ [1]\xi + [1,2]\psi + [1,3]\varphi + \text{etc.};$$
$$0 = (2)\frac{d^2\psi}{dt^2} + (1,2)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \text{etc.}$$
$$+ [2]\psi + [1,2]\xi + [2,3]\varphi + \text{etc.};$$
$$0 = (3)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (1,3)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\frac{d^2\psi}{dt^2} + \text{etc.}$$
$$+ [3]\varphi + [1,3]\xi + [2,3]\psi + \text{etc.}$$
etc.

welche Gleichungen, da sie mit beständigen Coefficienten eine linear Form haben, durch die bekannten Methoden auf eine völlig strenge und allgemeine Art aufgelöst werden können.

10) Man kann zuerst annehmen, die veränderlichen Größen hätten in diesen Arten von Gleichungen unter einander beständige Verhältnisse; d. h. es sey $\psi = t\xi$, $\varphi = g\xi$ etc., durch diese Substitutionen wird aus den 3 vorhergehenden Gleichungen:

(11)

Digitized by Google

$$((1) + (1,2)\,f + (1,3)\,g + \text{etc.})\frac{d^2\xi}{dt^2} + ([1] + [1,2]f + [1,3]\,g + \text{etc.})\,\xi = 0,$$

$$((2)\,f + (1,2) + (2,3)\,g + \text{etc.})\frac{d\xi}{dt^2} + ([2]\,f + [1,2]f + [2,3]\,g + \text{etc.})\,\xi = 0,$$

$$((3)\,g + (1,3) + (2,3)\,f + \text{etc.})\frac{d^2\xi}{dt^2} + ([3]\,g + [1,3] + [2,3]\,f + \text{etc.})\,\xi = 0,$$

etc.

woraus folgt: $\frac{d^2\xi}{dt^2} + K\xi = 0,$

wenn man $K = \frac{[1] + [1,2]\,f + [1,3]\,g + \text{etc.}}{(1) + (1,2)\,f + (1,3)\,g + \text{etc.}}$

$$= \frac{[2]\,f + [1,2] + [2,3]\,g + \text{etc.}}{(2)\,f + (1,2) + (2,3)\,g + \text{etc.}}$$

$$= \frac{[3]\,g + [1,3] + [2,3]\,f + \text{etc.}}{(3)\,g + (1,3) + (2,3)\,f + \text{etc.}}$$ ſetzt.

Die Zahl dieſer Gleichungen iſt, wie man ſieht, der Zahl der unbekannten Größen f, g etc. K gleich; ſie beſtimmen folglich vollkommen dieſe unbekannten Größen; und da, wenn man das Glied K zur erſten Hälfte annimmt, und durch den Nenner des zweyten multiplicirt, man lineare Gleichungen in f, g etc. erhält; ſo iſt es leicht ſie durch die bekannten Methoden wegzubringen, und man ſieht leicht aus den allgemeinen Formeln, woraus man ſie weggeſchafft hat, daß der Werth von K von einem Grade ſeyn wird, der dem Grade der Gleichungen, und folglich auch dem der vorgegebenen Differentialgleichungen gleich iſt. Man erhält

Digitized by Google

also für K eine gleiche Zahl von verschiedenen Werthen, wovon jeder, wenn man ihn in den Ausdrücken von f, g etc. substituirt, die correspondirenden Werthe dieser Größen geben wird.

Integrirt man nun die Gleichung $\frac{d^2\xi}{dt^2} + K\xi = 0$; so erhält man $\xi = E \sin.(t\sqrt{K} + \varepsilon)$, wo E, ε willkührliche beständige Größen sind, wir erhalten also hiedurch auch die Werthe von ψ, φ etc. indem wir $\psi = f\xi$, $\varphi = g\xi$, etc. angenommen haben.

Dies ist zwar nur eine besondere Auflösung; aber man kann zugleich eine doppelte, dreyfache u. s. Auflösung erhalten nach der Zahl der Werthe von K; verbindet man diese nun mit einander; so erhält man eine allgemeine Auflösung, indem auf der einen Seite die Summe der besondern Werthe von ξ, ψ, φ etc. wegen ihrer linearen Gestalt den Differentialgleichungen auf einerley Art genug thun wird, und auf der andern diese Gleichung 2 mal so viele willkührliche beständige Größen enthalten wird, als Gleichungen vorhanden sind, und folglich so viele als die volkommenen Integralien zulassen können. Bezeichnen wir durch K′, K″, K‴, etc. die verschiedenen Werthe von K d. h. die Wurzeln der Gleichung in K, und durch f′, g′, etc., f″, g″ etc., f‴, g‴ etc. etc. die correspondirenden Werthe von f, g etc. und nehmen wir eine gleiche Anzahl von willkührlichen Größen E′, E″, E‴, etc. sowie von willkührlichen Winkeln ε′, ε″, ε‴, etc. an; so erhalten wir diese volkommenen Werthe von ξ, ψ, φ, etc.

$$\xi = E' \sin.(t\sqrt{K'} + \varepsilon') + E'' \sin.(t\sqrt{K''} + \varepsilon'') + E''' \sin.(t\sqrt{K'''} + \varepsilon''') + \text{etc.}$$

$$\psi = f'E' \sin.(t\sqrt{K'} + \varepsilon') + f''E'' \sin.(t\sqrt{K''} + \varepsilon'') + f'''E''' \sin.(t\sqrt{K'''} + \varepsilon''') + \text{etc.}$$

$$\varphi = g'E' \sin.(t\sqrt{K'} + \varepsilon') + g''E'' \sin.(t\sqrt{K''} + \varepsilon'') + g'''E''' \sin.(t\sqrt{K'''} + \varepsilon''') + \text{etc.}$$

etc.

worin

Digitized by Google

worin die willkührlichen Größen E', E'', E''', etc., ε', ε'', ε''', etc. von den Werthen im Anfang von ξ, ψ, φ, etc., und $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ etc. abhängen werden.

11) Da die vorhergehende Auflösung sich auf die Voraussetzung gründet, daß die veränderlichen Größen ξ, ψ, φ, etc. sehr klein sind; so muß auch, wenn sie richtig seyn soll, diese Voraussetzung würklich statt finden; es müssen daher die Wurzeln K', K'', etc. alle würklich, positiv und ungleich seyn, damit die Zeit t, die ins Unendliche wächst, unter den Zeichen der Sinus befindlich sey. Würden einige dieser Wurzeln negativ oder imaginair, so würden sie würkliche Exponentialgrößen in die correspondirende Sinus bringen, und wären sie nur gleich unter einander; so würden sie algebraische Potenzen des Bogens darin einführen. Hievon kann man sich überzeugen, wenn man im erstern Falle an die Stelle der Sinus ihre imaginaire Exponential-Ausdrücke und im 2ten annimmt, daß die gleichen Wurzeln um unendlich kleine unbestimmte Größen von einander unterschieden sind. Indessen da die Entwickelung dieser Fälle für die gegenwärtige Absicht unnütz ist, so wollen wir uns nicht länger dabey aufhalten.

Hat die Bedingung, daß die Coefficienten von t würklich und ungleich sind, statt; so ersieht man leicht, daß die größten Werthe von ξ, ψ, etc. kleiner sind als die Summen von E', E'', E''', etc. und $f'E'$, $f''E''$, $f'''E'''$, etc.; wenn man alle diese Größen positiv annimmt. Sind sie also sehr klein, so müssen es auch die Werthe der veränderlichen Größen seyn. Da aber die Coefficienten E', E'' E''', etc. willkührlich sind, und allein von der ersten Stellung des Systems abhängen; so ist möglich, daß die veränderlichen Größen ξ, ψ, etc. sehr klein bleiben, ohnerachtet in $\sqrt{K'}$, $\sqrt{K''}$, etc. imaginaire und gleiche Größen vorkommen; denn alsdenn müssen die correspondirenden Größen E', E'', etc. $= 0$ seyn, welches die mit der Zeit t wachsenden Glieder zum Verschwinden bringt. Die Auflösung wird daher, ohnerachtet sie sonst weder vollständig noch allgemein ist, es dennoch in dem besondern Falle seyn, wo die vorhergehende Bedingung statt findet.

Digitized by Google

12) Was nun die Bestimmung der willkührlichen beständigen Grössen E', E'', etc. ε', ε'', etc. betrifft; so hängt sie, wie wir schon gesagt haben, vom Zustande des Systems im Anfange ab. Denn wenn man in den gefundenen Werthen von ξ, ψ, φ, etc. $t = 0$ setzt, und die Werthe ξ, ψ, φ, etc. als gegeben betrachtet, so erhält man Linear-Gleichungen zwischen den unbekannten Grössen $E' \sin \varepsilon'$, $E'' \sin \varepsilon''$, etc., wodurch man jede derselben bestimmen kann. Setzt man ferner in den Differentialien eben dieser Ausdrücke $t = 0$ und betrachtet die Werthe von $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, etc. ebenfals als gegeben; so erhält man ein 2tes System von Linear-Gleichungen zwischen $E' \cos \varepsilon'$, $E'' \cos \varepsilon''$, etc., die dazu dienen, sie zu bestimmen. Hieraus zieht man leicht die Werthe von E', E'', etc. sowie auch von tang ε', tang ε'', etc. und endlich die Werthe der Winkel ε', ε'', etc. selbst. Diese unbekannten Grössen nun direkte, und ohne weitläuftige Wegschaffungen zu bestimmen, dient folgende sehr einfache Methode.

Ich bemerke, daß wenn ich die Differentialgleichungen (9) zu einander addire, nachdem ich die 2te durch f, die 3te durch g u. s. f. multiplicirt habe, und Kürze halber setze

$$p = (1) + (1, 2)\, f + (1, 3)\, g + \text{etc.},$$

$$P = [1] + [1, 2]\, f + [2, 3]\, g + \text{etc.},$$

$$q = (2)\, f + (1, 2) + (2, 3)\, g + \text{etc.},$$

$$Q = [2]\, f + [1, 2] + [2, 3]\, g + \text{etc.},$$

$$r = (3)\, g + (1, 3) + (2, 3)\, f + \text{etc.},$$

$$R = [3]\, g + [1, 3] + [2, 3]\, f + \text{etc.},$$

etc.

ich erhalte

$$0 = p\frac{d^2\xi}{dt^2} + q\frac{d^2\psi}{dt^2} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \text{etc.}$$
$$+ P\xi + Q\psi + R\varphi + \text{etc.}$$

Nach

Nach den Bedingungsgleichungen (10) aber ist

$$P = Kp, \quad Q = Kq, \quad R = Kr, \text{ etc.}$$

Substituirt man daher diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung; so erhält sie diese Gestalt:

$$0 = \frac{d^2.(p\xi + q\psi + r\varphi + \text{etc.})}{dt^2} + (p\xi + q\psi + r\varphi + \text{etc.})\,K$$

wovon das Integrale ist:

$$p\xi + q\psi + r\varphi + \text{etc.} = L \sin.(t\sqrt{K} + \lambda)$$

wo L und λ zwey willkührliche beständige Größen sind.

Diese Gleichung muß auf gleiche Weise für alle die verschiedenen Werthe von K, die aus denselben Bedingungsgleichungen herfliesen, und die wir durch K', K'', etc. ausgedrückt haben, statt finden. Bezeichnen wir also durch p', p'', etc., q', q'', etc. etc. ebenfals die correspondirenden Werthe von p, q, etc. und nehmen wir gewisse willkührliche beständige Größen L', L'', etc., λ', λ'', etc. an; so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$p'\xi + q'\psi + r'\varphi + \text{etc.} = L' \sin.(t\sqrt{K'} + \lambda'),$$

$$p''\xi + q''\psi + r''\varphi + \text{etc.} = L'' \sin.(t\sqrt{K''} + \lambda''),$$

$$p'''\xi + q'''\psi + r'''\varphi + \text{etc.} = L''' \sin.(t\sqrt{K'''} + \lambda'''),$$

etc.

Diese Gleichungen dienen zugleich die Werthe von ξ, ψ, φ, etc. zu bestimmen; es ist aber klar, daß diese Werthe die oben (10) gefundenen aufheben müssen; indem beide aus einerley Differentialgleichungen hergeleitet worden sind. Substituirt man daher diese Werthe (10) in den vorhergehenden Gleichungen; so müssen sie völlig einerley seyn.

Hiers

Hieraus kann man alſo leicht ſchließen, daß man für die erſtere Gleichung hat:

$$\lambda' = \varepsilon', \quad L' = (p' + f' q' + g' r' + \text{etc.})\, E',$$
$$p' + f'' q' + g'' r' + \text{etc.} = 0,$$
$$p' + f''' q' + g''' r' + \text{etc.} = 0,$$
$$\text{etc.}$$

und für die zweite Gleichung

$$\lambda'' = \varepsilon'', \quad L'' = (p'' + f'' q'' + g'' r'' + \text{etc.})\, E',$$
$$p'' + f' q'' + g' r'' + \text{etc.} = 0,$$
$$p'' + f''' q'' + g''' r'' + \text{etc.} = 0,$$
$$\text{etc.}$$

Subſtituirt man daher in den obigen Gleichungen für λ', L', λ'', L'', λ''', L''' etc. die eben gefundenen Werthe; ſo erhält man dieſe:

$$E' \sin(t\sqrt{K'} + \varepsilon') = \frac{p'\xi + q'\psi + r'\varphi + \text{etc.}}{p' + q' f' + r' g' + \text{etc.}},$$

$$E'' \sin.(t\sqrt{K''} + \varepsilon'') = \frac{p''\xi + q''\psi + r''\varphi + \text{etc.}}{p'' + q'' f'' + r'' g'' + \text{etc.}},$$

$$E''' \sin.(t\sqrt{K'''} + \varepsilon''') = \frac{p'''\xi + q'''\psi + r'''\varphi + \text{etc.}}{p''' + q''' f''' + r''' g''' + \text{etc.}},$$

etc.

welche denen (10) gerade entgegengeſetzt ſind.

Jetzt hat die Beſtimmung der willkührlichen Größen E', E'', etc. ε', ε'', etc. keine Schwierigkeit mehr; denn ſetzen wir 1) $t = 0$; ſo wird aus den erſtern Gliedern der vorhergehenden Gleichungen

$E' \sin \varepsilon'$, $E'' \sin \varepsilon''$, etc.

und

Digitized by Google

und die zweiten sind alle bekannt, wenn man die Werthe von ξ, ψ, φ etc. im ersten Augenblick als gegeben ansieht. Differentiiren wir 2) eben diese Gleichungen, und setzen hernach $t = 0$; so werden die ersten Glieder seyn:

$$\sqrt{K'}.\ E' \operatorname{Cos} \varepsilon', \quad \sqrt{K''}.\ E'' \operatorname{Cos} \varepsilon'', \text{ etc.}$$

und die andern werden also auch bekannt seyn, wenn man die Größen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, etc., im Fall daß $t = 0$ ist, als gegeben ansieht. Folglich ꝛc.

13) Die Auflösung der Aufgabe ist daher einzig und allein auf die Bestimmung der Größen K, f, g, h, etc.; gebracht worden. Diese Bestimmung aber hängt wie wir (10) gesehen haben, von der Auflösung der Gleichungen $pK - P = 0$, $qK - Q = 0$, $rK - R = 0$, etc. ab, wenn man die Ausdrückungen von p, q, r, etc., P, Q, R, etc. (12) beybehält.

Bezeichnet man nun durch A den Werth der Größe T, welcher entsteht, indem man $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, etc. in e, f, g, etc. verwandelt, und durch B den Werth des Theils der Größe V, worin die veränderlichen Größen ξ, ψ, φ, etc. 2 Dimensionen mit einander ausmachen, wenn man dieselben ebenfals in e, f, g, etc. verwandelt; so ist leicht einzusehen, und man kann sich sogar leicht davon a priori überzeugen, daß man hat

$$p = \frac{dA}{de}, \quad q = \frac{dA}{df}, \quad r = \frac{dA}{dg}, \text{ etc.}$$

$$P = \frac{dB}{de}, \quad Q = \frac{dB}{df}, \quad R = \frac{dB}{dg}, \text{ etc.}$$

wenn man hernach $e = 1$ setzt.

Digitized by Google

Setzt man also allgemein $AK - B = \Delta$, so sind die Gleichungen für die Bestimmung der unbekannten Größen K, f, g, etc.

$$\frac{d\Delta}{de} = 0, \quad \frac{d\Delta}{df} = 0, \quad \frac{d\Delta}{dg} = 0, \text{ etc.}$$

wenn man $e = 1$ setzt.

Da also die Größe Δ sogleich aus den Größen T und V herfließt; so kann man auch direkte die gesuchten Gleichungen finden ohne nöthig zu haben, sie aus den Differentialgleichungen der Bewegung des Systems herzuleiten.

Ich bemerke jetzt, daß weil Δ eine homogene Funktion der 2 Dimensionen von e, f, g, etc. ist, man vermöge der (5) erwiesenen Eigenschaft dieser Arten von Funktionen hat:

$$2\Delta = e\frac{d\Delta}{de} + f\frac{d\Delta}{df} + g\frac{d\Delta}{dg} + \text{etc.}$$

Man hat daher auch $\Delta = 0$; die unbekannten Größen f, g, h, etc. müssen folglich so beschaffen seyn, daß nicht nur die Größe Δ sondern auch jede ihrer auf diese unbekannten Größen sich beziehenden Differentialien $= 0$ sey. Hieraus folgt also, daß die Größe K, die als eine Funktion dieser unbekannten Größen angesehen worden ist, und von der Gleichung $\Delta = 0$ abhängt, ein maximum oder minimum seyn muß.

Setzt man also zuerst $e = 1$ und daher anstatt $\frac{d\Delta}{de} = 0$ die Gleichung $\Delta = 0$; so erhält man für die Bestimmung dieser unbekannten Größen f, g, h, etc. die Gleichungen:

$$\Delta = 0, \quad \frac{d\Delta}{df} = 0, \quad \frac{d\Delta}{dg} = 0, \text{ etc.}$$

Zieht man also zuerst den Werth von f aus der Gleichung $\frac{d\Delta}{df} = 0$,

und

Digitized by Google

und substituirt denselben in $\Delta = 0$, wodurch, wie wir annehmen wollen, diese Gleichung in $\Delta' = 0$ umgeändert wird; so hat man nur $\frac{d\Delta'}{dg} = 0$ zu machen, und den aus dieser letztern Gleichung gezogenen Werth von g in $\Delta' = 0$ zu substituiren; nennt man alsdenn $\Delta'' = 0$ die daraus entstehende Gleichung; so muß man von neuem setzen $\frac{d\Delta''}{dh} = 0$ u. s. f. Hiedurch gelangt man zu einer endlichen Gleichung, worin die unbekannten Größen f, g, h nicht mehr vorkommen, sondern die allein die Größe K enthält, dies ist also die gesuchte Gleichung in K, deren Wurzeln wir K', K'', K''', etc. genannt haben.

Man kann diese Gleichung sogar auf eine allgemeine Formel bringen, wenn man erwäget, daß, weil die Größen f, g, h, etc. im Werthe von Δ nur 2 Dimensionen ausmachen, die Größe $\frac{2\Delta d^2\Delta - d\Delta^2}{df^2}$ nothwendig ohne f seyn muß, indem das Differential in Bezug auf f $= \frac{2\Delta d^2\Delta}{df^2}$ und folglich $= 0$ ist. Man kann also immer

$$\Delta' = \frac{2\Delta d^2\Delta - d\Delta^2}{df^2} \text{ setzen;}$$

und da in dieser Größe Δ' die übriggebliebenen unbekannten Größen g, h, etc, ebenfals nur zur 2ten Dimension steigen; so kann man wieder setzen

$$\Delta'' = \frac{2\Delta' d^2\Delta' - d\Delta'^2}{dg^2}; \text{ u. s. f.}$$

Die letzte der Größen Δ, Δ', Δ'', etc. ist $= 0$ und ist die gesuchte Gleichung in K. Diese Gleichung kann freylich zwar zu einem höhern Grad steigen als es seyn sollte wegen der in den Gleichungen $\Delta'' = 0$, $\Delta''' = 0$, etc. eingeführten Faktoren; bringt man jedoch nach und nach, indem man diese Gleichungen entwickelt, diese Faktoren daraus weg, und nimmt hierauf für die Werthe von Δ'', Δ''', etc. nur ihre ersten auf diese

Digitized by Google

Art vereinfachten Glieder; so wird die endliche Gleichung von selbst auf die Form und den Grad zurückgebracht, wie es seyn muß. Die Werthe von f, g, etc. bestimmt man hierauf durch die Gleichungen

$$\frac{d\Delta}{df} = 0, \quad \frac{d\Delta'}{dg} = 0, \text{ etc.}$$

indem man den Anfang mit der letzten macht, und durch die successive Substitution der gefundenen Werthe bis zur erstern steigt.

14) Wir haben (13) gesehen, daß die Auflösung nur alsdann allgemein statt finden kann, wenn die Wurzeln der Gleichung in K insgesammt würklich, positiv und ungleich sind. Man hat aber Methoden, zu erkennen, ob eine gegebene Gleichung von irgend einem Grade alle Wurzeln würklich oder nicht hat, und im Fall der Würklichkeit derselben von ihren Zeichen und ihrer Unrichtigkeit zu urtheilen. Die Anwendung dieser Methoden aber ist allezeit etwas mühsam, wir wollen daher einige simple und allgemeine Merkmahle angeben, die dazu dienen, von der gesuchten Form der Wurzeln urtheilen zu können.

Nimmt man nämlich die Gleichung $\Delta = 0$ oder $AK - B = 0$ (13); so ist $K = \frac{B}{A}$; man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß die Größe A allezeit nothwendig einen positiven Werth hat, so lange f, g, etc. würkliche Größen sind; denn die Funktion T, woraus sie entspringt, wenn man $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, etc. in 1) f, g, etc. verwandelt, besteht aus der Summe mehrerer durch nothwendig positive Coefficienten multiplicirte Quadrate. Ist also die Größe B auch allezeit positiv, welches statt findet, wenn der Theil der Funktion V, worin die veränderlichen Größen ξ, ψ, φ etc. zwey Dimensionen ausmachen, auf einerley Form mit der Funktion T gebracht werden kann; so kann man davon versichert seyn, daß die Werthe von K, d. h. die Wurzeln der Gleichung in K, alle jederzeit positiv seyn werden, wenn sie würklich sind.

Ist

Digitized by Google

Ist im Gegentheil die Größe B allezeit negativ, welches statt findet, wenn sie aus mehrern mit negativen Coefficienten multiplicirten Quadraten besteht; so werden die Werthe von K alle negativ seyn. In diesem letztern Falle kann die Auflösung nicht gut seyn, indem die Wurzeln der Gleichung in K nur imaginair oder würklich und negativ seyn können, und die Ausdrückungen der veränderlichen Größen ξ, ψ, etc. nothwendig die Zeit t ausserhalb der Zeichen der Sinus und Cosinus enthalten.

Im erstern Falle sieht man, daß wenn die Wurzeln würklich sind, sie nothwendig auch positiv seyn müssen, und es würde vielleicht schwer fallen auf eine direkte Art zu erweisen, daß sie zugleich auch würklich seyn müssen; aber auf eine Art kann man von der Nothwendigkeit dieser Behauptung sich überzeugen. Denn da das Integrale $T + V = \text{Const}$ nothwendig statt finden muß, weil T und V Funktionen ohne t sind, und man bezeichnet durch V′ den Theil von V, der die Glieder von 2 Dimensionen enthält, so daß

$$V = H + V'$$

weil $H\,1 = 0$, $H\,2 = 0$, $H\,3 = 0$, etc. (8, 9) so erhält man $T + H + V' = \text{Const} = (T) + H + (V')$ indem man durch (T) und (V′) die Werthe von T und V′ im erstern Augenblick bezeichnet.

Folglich $T + V' = (T) + (V')$.

Es ist aber T seiner Form nach allezeit positiv, eben so wie V′ (per hyp.); man muß also nothwendig haben $V' > 0$, und $< (T) + (V')$; der Werth von V′, und folglich auch die Werthe der veränderlichen Größen ξ, ψ, φ, etc. werden also in gegebenen Grenzen eingeschlossen und allein vom Zustand im Anfange abhängen. Diese veränderlichen Größen können daher die Zeit t ausserhalb der Zeichen der Sinus und Cosinus nicht enthalten, weil sie in diesem Falle ins unendliche wachsen könnten. Die Wurzeln der Gleichung in K werden also alle nothwendig würklich, positiv und ungleich seyn (11).

Digitized by Google

15) Wir haben auf diese Art am Ende des 3ten Abschnitts der Statik gewiesen, daß wenn die Funktion Φ ein minimum im Zustande des Gleichgewichts ist; dieser Zustand beständig ist, d. h. das System, indem es ein wenig davon abgebracht wird, nur kleine Oscillationen machen kann. Es ist aber offenbar, daß die Funktion, die wir (3 Abschn. 13) Φ genannt haben, einerley mit derjenigen ist, die wir hier unter V vorstellen, indem beide das Integrale aller Momente der auf die verschiedenen Körper des Systems würkenden Kräfte ist, welche beim Gleichgewicht = o seyn müssen. Da also $V = H + V'$ ist, und V' die veränderlichen Größen ξ. ψ, φ nur bis auf die 2te Dimension enthält; so muß V ein minimum oder maximum seyn, je nachdem der Werth von V positiv oder negativ ist, indem man diesen veränderlichen Größen gewisse Werthe giebt. Setzt man also $\psi = f\xi$, $\varphi = g\xi$, etc. so wird $V' = \xi^2 B$ (13), wenn $e = 1$ ist; V oder Φ wird daher minimum seyn, wenn B allezeit positiv, und ein maximum, wenn es allezeit negativ ist. Im erstern Falle enthalten also die veränderlichen Größen die Zeit t nur unter den Zeichen der Sinus und Cosinus, und das Gleichgewicht wird Bestand haben; im 2ten aber enthalten sie nothwendig Glieder, wo t ausserhalb dieser Zeichen liegt, und alsdann kann das Gleichgewicht nicht mehr bestehen, sondern das darin ein wenig gestöhrte System wird sich immer mehr davon entfernen. Dieser zweite Theil des a. a. O. der Statik erwähnten Theorems konnte damals aus Mangel an nöthigen Grundsätzen nicht erwiesen werden; wir haben daher den Beweis bis auf die Dynamik zurückbehalten, und der oben gegebene läßt nichts mehr zu wünschen übrig.

Uebrigens können zwischen diesen beiden Zuständen der absoluten Beständigkeit und Unbeständigkeit, worin das System, wenn es vom Gleichgewichte auf irgend eine Art abgebracht ist, sich von selbst entweder wieder zu versetzen oder noch mehr davon sich zu entfernen strebt, Zustände der bedingten und relativen Beständigkeit statt finden, worin die Wiederherstellung des Gleichgewichts von der anfänglichen Stellung des Systems abhängt. Denn sind einige der Werthe von $\sqrt{K}$ imaginair; so werden die correspondiren Werthe in den veränderlichen Größen Zirkelbogen enthalten, und das Gleichgewicht wird allgemein nicht statt finden können;

werden

Digitized by Google

werden aber die Coefficienten dieser Glieder = o, welches vom anfänglichen Zustande des Systems abhängt; so verschwinden die Zirkelbogen und das Gleichgewicht kann noch als beständig angesehen werden, wenigstens in Bezug auf diesen besondern Fall.

16) Die eben gegebene Auflösung erfodert also, daß die Coordinaten durch Funktionen in Reihen von sehr kleinen veränderlichen Größen, die im Zustande des Gleichgewichts = o seyen, wie wir (7) angenommen haben, ausgedrückt werden können.

Dies kann aber, wie wir gesehen haben, immer geschehen, wenn die in Reihen ausgedrückte Bedingungsgleichungen die erstern Potenzen der als sehr klein angenommenen veränderlichen Größen enthalten, denn dadurch erhält man sogleich Gleichungen, die auf eine rationale Art aufgelößt werden können, und man kann allezeit nach der Methode der Reihen immer genauere rationale Auflösungen erhalten.

Dessen ungeachtet kann der Fall eintreten, daß die Glieder der ersten Dimension in einer oder mehrern Bedingungsgleichungen fehlen, dies findet z. B. statt, wenn in der Gleichung L = o, die Werthe der Coordinaten für's Gleichgewicht so beschaffen sind, daß sie nicht allein L, sondern auch jede seiner ersten Differentialien = o macht; denn alsdenn hat man $\frac{dA}{da} = o$, $\frac{dA}{db} = o$, etc.

und die Gleichung L = o enthält nur die 2ten und höhern Potenzen α, β, γ, α', etc. (7).

Drückt man also in diesem Falle die Coordinaten in Funktionen von mabhängigen veränderlichen Größen aus; so können diese Funktionen nicht rational seyn, und die Differentialgleichungen werden weder linear noch selbst rational seyn. Die Voraussetzung der sehr kleinen Bewegungen des Systems dient also nicht dazu, die Auflösung der Aufgabe zu vereinfachen und macht also nicht, daß sie durch die vorgetragene allgemeine Methode aufgelößt werden kann.

Um

Digitized by Google

Um aber nun diese Arten von Aufgaben auf die einfachste Art aufzulösen; so sieht man zuerst gar nicht auf die Bedingungsgleichungen, worin die ersten Dimensionen der veränderlichen Größen nicht vorkommen; hiedurch gelangt man zu Ausdrückungen von T und V nach der Form der (8).

Zu diesem Werthe von V addire man hierauf die ersten Glieder der Bedingungsgleichungen, worauf man noch zur Zeit gar keine Rücksicht genommen hat, multiplicire jede durch einen unbestimmten Coefficienten, und nehme ihn in den Differentiationen nach δ als beständig an. Es ist hinlänglich bey diesen zu den Bedingungsgleichungen gehörigen Gliedern auf die niedrigsten Dimensionen der sehr kleinen veränderlichen Größen zu sehen. Hieraus findet man die gewöhnlichen Differentialgleichungen, und man hat daraus nur die unbestimmten Coefficienten wegzuschaffen. Wären die Bedingungsgleichungen vom 2ten Grad, und könnte man die unbestimmten Coefficienten als beständig ansehen; so würde der Werth von V noch von der nämlichen Form als in der allgemeinen Auflösung seyn. Man könnte diese also auch auf diesen Fall anwenden, und hierauf die Coefficienten bestimmen, so daß den Bedingungsgleichungen ein Genüge geleistet würde. Man kann also allezeit den Anfang damit machen, diese Voraussetzung anzunehmen, man wird hernach sehen, ob die für die veränderlichen Größen daraus entspringenden Werthe den Bedingungsgleichungen genugthun können, in diesem Falle wird nämlich die Voraussetzung richtig und die Auflösung vollkommen seyn, findet dies aber nicht statt; so muß man die Differentialgleichungen nach den gewöhnlichen Methoden zu integriren suchen.

§. II.

Von der Bewegung eines nach einem oder mehrern Mittelpunkten getriebenen Körpers.

17) Wir wollen zuerst annehmen, der Körper werde nach einem einzigen Mittelpunkte von der Kraft R getrieben, die eine Funktion der Distanz des Körpers r vom Mittelpunkte ist. Nehmen wir nun diesen Mittelpunkt für den Anfang der Coordinaten und die gerade Linie r für den Radius

Digitized by Google

Radius Vektor an, und nennen wir ψ die Neigung der Linie r gegen die Ebene der x und y, φ aber den Winkel der Projektion von r auf diese Ebene mit der Achse der x; so hat man, wie wir schon oben (2) gesehen haben:

$$x = r \operatorname{Cof}\psi \operatorname{Cof}\varphi,$$
$$y = r \operatorname{Cof}\psi \operatorname{sin}\varphi,$$
$$z = r \operatorname{sin}\psi,$$

folglich

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 [\operatorname{Cof}\psi^2 \, d\varphi^2 + d\psi^2] + dr^2.$$

Ist also nur ein Körper vorhanden, dessen Masse zur Einheit angenommen werden könnte; so hat man

$$T = \frac{r^2 (\operatorname{Cof}\psi^2 \, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2}{2\,dt^2}$$

welche Größe in Bezug auf V auf $\int R.dr$ sich bringen läßt.

Weil also keine besondere Bedingung zu erfüllen vorhanden ist, und die 3 veränderlichen Größen ψ, φ, r unabhängig sind; so hat man für jede dieser veränderlichen Größen eine Gleichung von der Form:

$$d.\frac{\partial T}{\partial d\psi} - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0;$$

wodurch man (wenn man $dt =$ Const. setzt) folgende 3 Gleichungen erhält:

$$\frac{d.\, r^2\, d\psi}{dt^2} + \frac{r^2 \operatorname{sin}\psi \operatorname{Cof}\psi \, d\varphi^2}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d.\, r^2 \operatorname{Cof}\psi^2 \, d\varphi}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r (\operatorname{Cof}\psi^2 \, d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2} + R = 0.$$

Digitized by Google

Die 2te ist an und für sich integrabel, und ihr Integrale ist

$$\frac{r^2 \operatorname{Cos}\psi^2 \, d\varphi}{dt} = A,$$

woraus man zieht $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{r^2 \operatorname{Cos}\psi^2}$;

Substituirt man diesen Werth in der erstern, so wird auch diese integrabel, wenn man sie mit $r^2 d\psi$ multiplicirt, und ihr Integral wird seyn:

$$\frac{r^4 d\psi^2}{dt^2} + \frac{A^2}{\operatorname{Cos}\psi^2} = B^2$$

wo A, B, zwey willkührliche beständige Größen sind. Ich bemerke zuerst in Ansehung dieses Integrals, daß wenn man ψ und $\frac{d\psi}{dt}$ in einem Augenblick zugleich $= o$ setzt, sie allezeit $= o$ seyn werden; denn setzt man $\psi = o$, und $d\psi = o$ so hat man $B^2 = A^2$ und die Gleichung wird alsdenn:

$\frac{r^4 d\psi^2}{dt^2} + A^2 \operatorname{tang}\psi^2 = o$, welche nur statt finden kann, wenn ψ und $\frac{d\psi}{dt} = o$ sind.

Die erwähnte Voraussetzung besteht aber darin, daß der Körper in einem Augenblicke sich in der Ebene der x und y bewege, welches allezeit möglich ist, indem die Lage dieser Ebene von unserer Willkühr abhängt. Der Körper wird also fortfahren, sich in dieser Ebene zu bewegen, und folglich nothwendig eine ebene Bahn oder eine Linie von einfacher Krümmung beschreiben. Dies kann man auch direkte durch die Integration der vorgegebenen Gleichung selbst erweisen. Denn substituirt man für dt dessen Werth $\frac{r^2 \operatorname{Cos}\psi^2 \, d\varphi}{A}$, der aus der vorhergehenden Gleichung gezo-

gen

gen worden ist; so erhält man diese:

$$\frac{A^2 \, d\psi^2}{\text{Cos}\,\psi^4 \, d\varphi^2} + \frac{A^2}{\text{Cos}\,\psi^2} = B^2 .$$

Es sey $\frac{d\psi}{d\varphi} = \text{tang}\,\alpha$, wenn $\psi = o$; hiedurch erhält man: $B^2 = A^2 + A^2\,\text{tang}\,\alpha^2$.

und die Gleichung wird

$$\frac{d\psi^2}{\text{Cos}\,\psi^4 \, d\varphi^2} = \text{tang}\,\alpha^2 - \text{tang}\,\psi^2$$

woraus man findet $d\varphi = \frac{d\psi}{\text{Cos}\,\psi^2 \sqrt{(\text{tang}\,\alpha^2 - \text{tang}\,\psi^2)}}$, welche,

da $\frac{d\psi}{\text{Cos}\,\psi^2} = \text{d. tang}\,\psi$, zum Integral hat:

$$\varphi - \beta = A. \sin \frac{\text{tang}\,\psi}{\text{tang}\,\alpha} \text{ oder}$$

$$\sin(\varphi - \beta) = \frac{\text{tang}\,\psi}{\text{tang}\,\alpha}$$

wo β der willkührliche Werth von φ ist, wenn $\psi = o$ ist.

Man sieht aus dieser Gleichung, daß $\varphi - \beta$ und ψ die 2 Seiten eines rechtwinklichten sphärischen Dreyecks sind, worin α der der Seite ψ entgegengesetzte Winkel ist. Weil daher der Bogen $\varphi - \beta$ auf der Ebene der x und y angenommen worden ist, und der Bogen ψ allezeit senkrecht auf dieser Ebene steht; so folgt, daß der Bogen, der diese beiden verbindet, und der die Hypothenuse des Dreyecks bildet, mit der Basis $\varphi - \beta$, einen beständigen Winkel α machen wird. Es wird folglich derselbe Bogen durch die Enden aller Bogen ψ gehen, und alle Radien r werden sich in der Ebene dieses Bogens befinden, welcher folglich die Ebene

Digitized by Google

der Bahn des Körpers selbst seyn würde, dessen Neigung zur Ebene der x und y durch den beständigen Winkel α ausgedrückt wird.

18) Die endliche eben gefundene Gleichung zwischen φ und ψ könnte dazu dienen, eine dieser unbekannten Größen der andern Gleichungen wegzuschaffen; weil man aber weiß, daß die Bahn des Körpers ganz in eine feste Ebene fällt, so vereinfacht man die Rechnung sehr, wenn man diese Ebene für die der x und y annimmt, wodurch man erhält $\psi = 0$, und $d\psi = 0$.

Alsdenn wird die dritte Gleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\,d\varphi^2}{dt^2} + R = 0;$$

das Integral der 2ten aber giebt

$$d\varphi = \frac{A\,dt}{r^2};$$

Substituirt man daher diesen Werth von $d\varphi$ und multiplicirt hernach durch dr; so erhält man eine integrable Größe, deren Integral ist

$$\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{A^2}{r^2} + \int R\,dr = C;$$

woraus man zieht

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\left(C - \int R\,dr - \frac{A^2}{r^2}\right)}}$$

und folglich

$$d\varphi = \frac{A\,dr}{r^2\sqrt{\left(C - \int R\,dr - \frac{A^2}{r^2}\right)}};$$

Digitized by Google

in welchen Gleichungen also t und φ getrennt sind, und deren Integration die Werthe von φ und t in r giebt. Die 2te dieser Gleichungen giebt die Figur der Bahn, die erstere aber die Stellung des Körpers in jedem Augenblick.

19) Um diese Auflösung auf die Bewegung der Planeten um die Sonne anzuwenden, setze man

$R = \frac{F}{r^2}$, wo F die anziehende Kraft der Sonne auf den Planeten, die Distanz $= 1$ gesetzt, ist. Dies giebt also

$$\int R\,dr = -\frac{F}{r}.$$

Substituirt man nun diesen Werth in den vorhergehenden Gleichungen; so sieht man, daß die Größe unter dem Zeichen wird

$C + \frac{F}{r} - \frac{A^2}{r^2}$, die man auf die Form

$C + \frac{F^2}{4A^2} - \left(\frac{F}{2A} - \frac{A}{r}\right)^2$ bringen kann.

Der Werth von $d\varphi$ ist also dem Differentiale des Winkels gleich, dessen Cosinus ist:

$$\frac{\frac{F}{2A} - \frac{A}{r}}{\sqrt{\left(C + \frac{F^2}{4A^2}\right)}};$$ integrirt man also und

nimmt eine gewisse willkührliche beständige Größe γ an; so erhält man:

$$\frac{F}{2A} - \frac{A}{r} = \sqrt{\left(C + \frac{F^2}{4A^2}\right)} \text{ Cos. } (\varphi - \gamma);$$

Digitized by Google

Setzt man daher Kürze halber

$$p = \frac{2A^2}{F}, \quad e = \sqrt{\left(1 + \frac{4A^2C}{F^2}\right)}$$

so erhält man $r = \frac{p}{1 - e \operatorname{Cos}(\varphi - \gamma)}$;

Man ersieht aus dieser Formel, daß die größten und kleinsten Werthe von r statt finden, wenn $\varphi = \gamma$ oder $\varphi = \gamma + 180°$, und daß sie also auf einer geraden Linie sind. Der kleinste Werth ist $= \frac{p}{1+e}$, der größte $= \frac{p}{1-e}$; wovon die halbe Summe oder der mittlere Werth ist $\frac{p}{1-e^2}$ und die halbe Differenz $\frac{pe}{1-e^2}$, wo also e das Verhältniß der halben Differenz dieser Werthe zu ihrer halben Summe ist. Setzt man nun $\varphi = \gamma + 90°$, in welchem Falle die Direktion von r senkrecht auf die Linie der größten und kleinsten Werthe ist, so hat man $r = p$.

Um die Natur der krummen Linie kennen zu lernen, so hat man sie nur auf 2 Coordinaten x und y zu beziehen, die man vom Mittelpunkt der Radiorum Vektorum genommen hat, und wovon die eine x in der Direktion des größten Radius ist. Weil nun $\varphi - \gamma$ der Winkel ist, den r mit diesem Radius macht; so erhält man

$$x = r \operatorname{Cos}(\varphi - \gamma)$$
$$y = r \sin(\varphi - \gamma);$$

und die Gleichung $r - e\,r \operatorname{Cos}(\varphi - \gamma) = p$ verwandelt sich in $\sqrt{(x^2 + y^2)} - ex = p$. Macht man diese rational; so ist sie vom 2ten Grade, und giebt einen Kegelschnitt. Es wird also $\frac{p}{1-e^2}$ die halbe große Achse des Schnitts seyn, den wir durch a andeuten, und e die Eccentricität oder das Verhältniß der Distanz zwischen einem der Brenn-

Digitized by Google

Brennpunkte, und dem Mittelpunkte zur halben grossen Achse, folglich wird $\sqrt{(a^2 - a^2 e^2)}$ oder $a\sqrt{(1 - e^2)}$ die halbe kleine Achse und $\frac{a^2(1 - e^2)}{a}$ oder $a(1 - e^2)$ d. h. p der halbe kleine Parameter seyn. Wegen der Gleichung zwischen x und y hat man aber, wenn $x = o$, $p = y$; der Anfang der Coordinaten ist folglich in einem der Brennpunkte, wo, wie man weiß, die Ordinate gleich dem halben Parameter ist.

Die Planeten-Bahnen sind also Kegelschnitte, die die Sonne in einem ihrer Brennpunkte haben, und ihre allgemeine Gleichung ist

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \operatorname{Cof}(\varphi - \gamma)}, \quad (A)$$

wo a di emitlere Distanz, e die Eccentricität, und r der Radius Vektor ist, der mit der Absidenlinie den Winkel $\varphi - \gamma$ macht.

20) Um nun die Zeit zu bestimmen, die verwendet wird einen gewissen Winkel zu beschreiben, muß man noch eine andere Gleichung

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\left(C + \frac{F}{r} - \frac{A^2}{r^2}\right)}}$$ integriren,

hierauf aber für A und C ihre Werthe in a und e substituiren. Es ist aber

$$p = \frac{2A^2}{F},$$

$$e = \sqrt{\left(1 + \frac{4A^2C}{F^2}\right)},$$

folglich $A^2 = \frac{Fp}{2} = \frac{Fa(1 - e^2)}{2}$

$$C = \frac{(e^2 - 1)F^2}{4A^2} = -\frac{F}{2a},$$

durch

Digitized by Google

durch diese Substitutionen wird die vorige Gleichung

$$dt = \sqrt{\left(\frac{2a^3}{F}\right)} \cdot \frac{r\,dr}{\sqrt{(a^2e^2 - (r-a)^2)}}$$

Setzen wir nun $\frac{r-a}{ae} = \text{Cos}\,\vartheta$;

so hat man $r = a(1 + e\,\text{Cos}\,\vartheta)$ (B)

und $dt = \sqrt{\left(\frac{2a^3}{F}\right)}(1 + e\,\text{Cos}\,\vartheta)\,d\vartheta$;

und wenn man integrirt

$$t - \lambda = \sqrt{\left(\frac{2a^3}{F}\right)}(\vartheta + e\,\text{sin}\,\vartheta). \quad (M)$$

Vergleicht man nun die beiden Werthe von r mit einander nehmlich A und B; so erhält man

$$\frac{1 - e^2}{1 - e\,\text{Cos}\,(\varphi - \gamma)} = 1 + e\,\text{Cos}\,\vartheta,$$

woraus man zieht

$$\text{Cos}\,\vartheta = \frac{\text{Cos}\,(\varphi - \gamma) - e}{1 - \text{Cos}\,(\varphi - \gamma)};$$

Will man also ϑ aus der Gleichung (M) wegbringen; so substituire man darin diesen eben gefundenen Werth, und auf diese Art erhält man t in Funktionen von $\varphi - \gamma$. Um nun diese Wegschaffung zu erleichtern; so bemerke man, daß $1 \pm \text{Cos}\,\vartheta = \frac{(1+e)(1 \pm \text{Cos}\,(\varphi - \gamma))}{1 - e\,\text{Cos}\,(\varphi - \gamma)}$

und also

$$\frac{1 - \text{Cos}\,\vartheta}{1 + \text{Cos}\,\vartheta} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)\left(\frac{1 - \text{Cos}\,(\varphi - \gamma)}{1 + \text{Cos}\,(\varphi - \gamma)}\right).$$

Digitized by Google

folglich tang. $\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}$ tang. $\frac{\varphi-\gamma}{2}$. (N)

21) Den Winkel $\varphi - \gamma$ nennt man in der Astronomie die wahre Anomalie, den Winkel $(t-\lambda)\sqrt{\frac{F}{2a^3}}$ aber die mittlere Anomalie, und den Hülfswinkel ϑ die eccentrische Anomalie. Die Aufgabe $\varphi - \gamma$ durch $t - \lambda$ zu bestimmen ist unter dem Nahmen der Keplerschen Aufgabe bekannt. Man sieht aus den vorhergehenden Formeln, daß sie nicht völlig streng aufgelößt werden kann; setzt man aber die Eccentricität e sehr klein, wie dies auch in allen Planetenbahnen der Fall ist; so kann man der Wahrheit sich so sehr nähern, als man nur Lust hat.

Man ziehe daher zuerst aus der Gleichung:

(N) tang. $\frac{\varphi-\gamma}{2}\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}$ tang. $\frac{\vartheta}{2}$ den Werth von $\varphi - \gamma$ in ϑ, welches man vermittelst der bekannten imaginairen Exponentialausdrücke leicht erhält. Denn wenn man Kürze halber $\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} = h$ setzt, und nimmt i für die Zahl an, deren hyperbolischer Logarithme $= 1$ ist; so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung (N) in diese:

$$\frac{i^{\frac{\varphi-\gamma}{2}\sqrt{-1}} - i^{-\frac{\varphi-\gamma}{2}\sqrt{-1}}}{i^{\frac{\varphi-\gamma}{2}\sqrt{-1}} + i^{-\frac{\varphi-\gamma}{2}\sqrt{-1}}} =$$

Digitized by Google

$$h\,\frac{i^{\frac{\vartheta}{2}\sqrt{-1}} - i^{-\frac{\vartheta}{2}\sqrt{-1}}}{i^{\frac{\vartheta}{2}\sqrt{-1}} + i^{-\frac{\vartheta}{2}\sqrt{-1}}};$$

oder (wenn man bey der ersten Hälfte mit $i^{\frac{\varphi-\gamma}{2}}$ und bey der andern mit $i^{\frac{\vartheta}{2}}$ oben und unten multiplicirt, $\mathfrak{M}$):

$$\frac{i^{(\varphi-\gamma)\sqrt{-1}} - 1}{i^{(\varphi-\gamma)\sqrt{-1}} + 1} = h\,\frac{i^{\vartheta\sqrt{-1}} - 1}{i^{\vartheta\sqrt{-1}} + 1}$$

woraus man zieht:

$$\left(i^{(\varphi-\gamma)\sqrt{-1}} = h\,\frac{\left(i^{\vartheta\sqrt{-1}} - 1\right)\left(i^{(\varphi-\gamma)\sqrt{-1}} + 1\right)}{i^{\vartheta\sqrt{-1}} + 1} + \frac{1}{i^{(\varphi-\gamma)\sqrt{-1}} + 1}\,\mathfrak{M}.\right)$$

$$i^{(\varphi-\gamma)\sqrt{-1}} = \frac{(1+h)\,i^{\vartheta\sqrt{-1}} + 1 - h}{(1-h)\,i^{\vartheta\sqrt{-1}} + 1 + h}$$

oder, wenn man $\frac{1-h}{1+h} = E$ setzt,

Digitized by Google

$$i^{(\varphi - \gamma)\sqrt{-1}} = \left(i^{\vartheta\sqrt{-1}}\right) \frac{1 + Ei^{-\vartheta\sqrt{-1}}}{1 + Ei^{\vartheta\sqrt{-1}}};$$

und folglich, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$\varphi - \gamma = \vartheta + \frac{1}{\sqrt{-1}} l\left(1 + Ei^{-\vartheta\sqrt{-1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{-1}} l\left(1 + Ei^{\vartheta\sqrt{-1}}\right);$$

drückt man nun diese Logarithmen in Reihen aus, und substituirt hierauf anstatt der imaginairen Exponentialgrößen, die ihnen entsprechenden würklichen Sinus; so bekommt man endlich:

$$\varphi - \gamma = \vartheta - 2E \sin \vartheta + \frac{2E^2}{2} \sin 2\vartheta - \frac{2E^3}{3} \sin 3\vartheta + \text{etc.}$$

in welchem sehr einfachen Ausdruck

$$E = \frac{\sqrt{(1+e)} - \sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)} + \sqrt{(1-e)}};$$

oder $= \frac{e}{1 + \sqrt{(1-e^2)}}$.

Man hat nun nur noch an die Stelle von ϑ dessen Werth in $t - \lambda$ zu setzen, der durch die Gleichung $(t - \lambda)\sqrt{\frac{F}{2a^3}} = \vartheta + e \sin \vartheta$ gegeben ist. Es ist aber nach einem Lehrsatz, den ich anderswo erwiesen habe, wenn man eine Gleichung von der Form $u = \vartheta + f.\vartheta$ hat, wo $f.\vartheta$ eine gewisse Funktion von ϑ bedeutet, umgekehrt

Digitized by Google

$$\vartheta = u - f.u + \frac{d.(f.u)^2}{2\,du} - \frac{d^2.(f.u)^3}{2.3\,du^2} + \text{etc.}$$

und, wenn $\Phi.\vartheta$ eine andere gewisse Funktion von ϑ bedeutet, und man setzt $\Phi'.\vartheta = \frac{d.\Phi.\vartheta}{d.\vartheta}$,

$$\Phi.\vartheta = \Phi.u - (f.u)\,\Phi.u + \frac{d.(f.u)^2}{2\,du}\,\Phi'.u - \frac{d^2.(f.u)^3}{2.3\,du^2}\,\Phi'.u + \text{etc.}$$

Man hat also nur zu setzen

$$u = \frac{t - \lambda.}{\sqrt{\left(\frac{2a^3}{F}\right)}};$$

$f.\vartheta = e \sin\vartheta$,

$$\Phi.\vartheta = \vartheta - 2E\sin\vartheta - \frac{2E^2}{2}\sin 2\vartheta - \frac{2E^3}{3}\sin 3\vartheta + \text{etc.};$$

folglich, wenn man ϑ in u verwandelt,

$f.u = e \sin u$,

$$\Phi.u = u - 2E\sin u + \frac{2E^2}{2}\sin 2u - \frac{2E^3}{3}\sin 3u + \text{etc.};$$

und wenn man diese Werthe in der vorhergehenden Formel substituirt; so erhält man den Werth von $\Phi.\vartheta$, d. h. den von $\varphi - \gamma$ in u. Setzen wir nun Kürze halber:

$$V = 1 - 2E\cos u + 2E^2\cos 2u - 2E^3\cos 3u + \text{etc.};$$

so erhalten wir

$$\varphi - \gamma = u - 2E\sin u + \frac{2E^2}{2}\sin 2u - \frac{2E^3}{3}\sin 3u + \text{etc.}$$

— e

Digitized by Google

$$- e V \sin u + e^2 \frac{d.(V \sin u^2)}{2\,du} - e^3 \frac{d^2(V \sin u^3)}{2.3\,du^2} + \text{etc.}$$

wo man nur die angezeigten Differentiationen würklich zu vollführen hat.

22) Wir wollen 2tens annehmen, der Körper werde zugleich nach 2 festen Mittelpunkten durch Kräfte gezogen, die gewissen Funktionen der Distanzen proportional seyen.

Es sey wie im vorhergehenden Problem der eine der Mittelpunkte im Anfange der Coordinaten und R die Anziehungskraft, und es werde des andern Mittelpunkts Lage durch die Coordinaten a, b, c die den x, y, z parallel seyen, bestimmt. Ferner sey Q die Anziehungskraft, q aber die Distanz des Körpers von diesem Mittelpunkte, alsdann hat man offenbar:

$$q = \sqrt{((x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2)}$$

d. h. wenn man für x, y, z ihre Werthe in r, ψ, φ, (13) setzt,

$$q = \sqrt{(r^2 - 2r((a\cos\varphi + b\sin\varphi)\cos\psi + c\sin\psi) + h^2)},$$

wenn man die Distanz der beiden Mittelpunkte

$$h = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} \text{ setzt.}$$

Es ist klar, daß der Werth von T der nämliche, wie im vorhergehenden Problem (17) seyn wird, der Werth von V aber wird um das Glied $\int Q\,dq$ vermehrt werden müssen, und da Q eine Funktion von q und da q eine Funktion von r, φ, ψ ist; so giebt dieses Glied in den Differentialien

$$\frac{\delta V}{\delta \psi}, \frac{\delta V}{\delta \varphi}, \frac{\delta V}{\delta r}, \text{ diese:}$$

$$Q\frac{dq}{d\psi}, Q\frac{dq}{d\varphi}, Q\frac{dq}{dr};$$

die man folglich respektiv zu den erstern Gliedern der Differentialgleichungen (17) addiren muß.

Digitized by Google

Für die Bewegung des von den Kräften R und Q nach 2 Mittelpunkten getriebenen Körpers hat man also folgende Gleichungen:

$$\frac{d.\, r^2\, d\psi}{dt^2} + \frac{r^2 \sin\psi \cos\psi\, d\varphi^2}{dt^2} + Q\frac{dq}{d\psi} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d.\, r^2 \cos\psi^2\, d\varphi}{dt^2} + Q\frac{dq}{d\varphi} = 0 \quad (2),$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r(\cos\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2} + R + Q\frac{dq}{dr} = 0 \quad (3)$$

und würde der Körper zugleich nach andern Mittelpunkten getrieben; so hätte man nur für jeden dieser Mittelpunkte ähnliche Glieder zu addiren. Wir haben bereits (4) allgemein gezeigt, daß wenn T und V kein t enthalten, man allezeit zum Integral $T + V = \text{Const.}$ hat, welche die Erhaltung der lebendigen Kräfte in sich schließt.

Im gegenwärtigen Falle wird sie also

(da $V = \int R\,dr + \int Q\,dq$ und

$$T = \frac{r^2(\cos\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2}{2\,dt^2}\,\mathfrak{M}.)$$

$$\frac{r^2(\cos\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2}{2\,dt^2} + \int R\,dr + \int Q\,dq = 2A \quad (4)$$

und man sieht, daß, wenn man die 3 vorhergehenden Gleichungen (1), (2), (3) respektiv durch $d\psi$, $d\varphi$, dr multiplicirt und zu einander addirt, man eine integrable Gleichung bekommt, deren Integral das eben gefundene ist.

Aus dieser Gleichung (4) zieht man:

$$\frac{r^2(\cos\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2} = 4A - 2\int R\,dr - 2\int Q\,dq - \frac{dr^2}{dt^2}$$

und

Digitized by Google

und substituirt man nun diesen Werth in (3) und multiplicirt diese Gleichung durch r; so erhält man:

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} + Rr + 2\int R\,dr + Qr\frac{dq}{dr} + 2\int Q\,dq = 4A \quad (5)$$

Es ist aber $q^2 = r^2 + h^2 - 2r[(a\,\mathrm{Cos}\,\varphi + b\,\mathrm{sin}\,\varphi)\,\mathrm{Cos}\,\psi + e\,\mathrm{sin}\,\psi]$

und, wenn man r variabel annimmt,

$$q\frac{dq}{dr} = r - (a\,\mathrm{Cos}\,\varphi + b\,\mathrm{sin}\,\varphi)\,\mathrm{Cos}\,\psi - c\,\mathrm{sin}\,\psi$$

$$= r - \frac{r^2 + h^2 - q^2}{2r}$$

$$= \frac{r^2 + q^2 - h^2}{2r};$$

durch die Substitution dieses Werths von $\frac{dq}{dr}$ in (α); erhält man also endlich

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} + Rr + 2\int R\,dr + Q\frac{r^2 + q^2 - h^2}{2q} + 2\int Q\,dq = 4A \quad (5).$$

Diese Gleichung hat vor den vorigen den Vorzug, daß sie nur die veränderlichen Größen r und q enthält, und zugleich andeutet, daß eine gleiche Gleichung zwischen q und r statt finden muß, wenn man nur r und q eben so wie R und Q untereinander verwechselt; denn es ist einerley, die Bewegung des Körpers auf einen oder den andern der beiden festen Mittelpunkte zu beziehen, es ist klar, daß wenn man sie auf den Mittelpunkt der Kräfte Q bezieht, man durch eine der vorigen ähnliche Analysis finden würde:

d^2

Digitized by Google

$$\frac{d^2 q^2}{2 dt^2} + Qq + 2 \int Q dq + R \frac{r^2 + q^2 - h^2}{2r}$$

$$+ 2 \int R dr = 4 A \quad (6);$$

durch diese beiden Gleichungen kann man also direkte die 2 Radien r und q bestimmen.

Ich bemerke jetzt, daß man der Allgemeinheit unbeschadet, die 2 Coordinaten a und b des Mittelpunkts der Kräfte Q = o setzen kann, oder, welches auf eins hinauskömmt, daß man die Achse der Coordinaten Q in die Linie setzen kann, welche die beiden Mittelpunkte verbindet. Nach dieser Voraussetzung hat man c = h, und

$$q = \sqrt{(r^2 - 2hr \sin \psi + h^2)},$$

worin φ nicht mehr vorkömmt. Man hat also

$$\frac{dq}{d\varphi} = o.$$

Aus der Gleichung (2) wird also:

$$\frac{d.\, r^2 \operatorname{Cos} \psi^2 \; d\varphi}{dt^2} = o$$

dessen Integral ist: $\frac{r^2 \operatorname{Cos} \psi^2 \; d\varphi}{dt} = B$

woraus man zieht

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{B}{r^2 \operatorname{Cos} \psi^2}; \quad (\beta).$$

Aber $\sin \psi = \frac{r^2 + h^2 - q^2}{2hr}$;

folglich $\operatorname{Cos} \psi \; (= \sqrt{\left[1 - \left(\frac{r^2 + h^2 - q^2}{2hr}\right)^2\right]}$ M.) =

Digitized by Google

$$\frac{\sqrt{(4h^2r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2)}}{2hr};$$

und also, wenn man diesen Werth in (β) substituirt,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{4Bh^2}{4h^2r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2} \quad \ldots\ldots (7)$$

so daß, wenn man r und q in t kennt, man auch φ in t hat.

$\sin\psi$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ aber sind schon in r und q gegeben, man kann also offenbar die Gleichung so ausdrücken, daß sie nur r und q enthält, und in diesem Falle ist sie nothwendig wegen der willkührlichen beständigen Größe E ein vollkommenes Integral der beiden Gleichungen (5) und (6). Denn man hat alsdenn

$$r^2\,d\psi^2 = \frac{[(r^2 + q^2 - h^2)\,dr - 2rq\,dq]^2}{4h^2r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2},$$

Addirt man nun dr^2 und verrichtet die nöthigen Reduktionen; so kommt:

$$r^2\,d\psi^2 + dr^2 = \frac{4(q^2r^2\,dr^2 + r^2q^2\,dq^2 - (r^2 + q^2 - h^2)rq\,dr\,dq)}{4h^2r^2(r^2 + h^2 - q^2)}.$$

Ferner aber ist

$$\frac{r^2\,\mathrm{Col}\psi^2\,d\varphi^2}{dt^2} = \frac{4B^2}{4h^2r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)}.$$

Verrichtet man daher diese Substitutionen in der Gleichung (4) und läßt den Nenner weg; so hat man

$$2.\frac{q^2r^2\,dr^2 + r^2q^2\,dq^2 - (r^2 + q^2 - h^2)rq\,dr\,dq}{dt^2}$$
$$+ 2B^2 + (4h^2r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2)(\int R\,dr + \int Q\,dq - 2A) = 0 \quad (8).$$

Da-

Aus

Digitized by Google

Aus der Form dieſer Gleichung aber erſieht man jetzt leicht, daß ſie entſteht, wenn man die Gleichungen (5) und (6) reſpektive durch $2q^2 \,d.\, r^2 - (r^2 + q^2 - h^2)\, d.\, q^2$, $2r^2 \,d.\, q^2 - (r^2 + q^2 - h^2)\, d.\, r^2$ multiplicirt, zu einander addirt und hierauf integrirt. Sehr ſchwer aber würde es geweſen ſeyn, dieſes Integral a priori zu entdecken.

23) Um die Auflöſung zu Ende zu bringen, muß man aber noch ein anderes Integral eben dieſer Gleichungen haben, hiezu aber kann man nur für beſondere Werthe von R und Q gelangen.

Nimmt man, wie es in der Natur würklich der Fall iſt, an, es ſey

$$R = \frac{\alpha}{r^2}, \quad Q = \frac{\beta}{q^2};$$

ſo findet man, daß die Gleichung (5) durch $d.\, q^2$ multiplicirt, und zur Gleichung (6), die mit $d.\, r^2$ multiplicirt iſt, addirt, eine Integralſumme giebt, deren Integral iſt:

$$\frac{d.\, r^2\, d.\, q^2}{2\,dt^2} - \frac{\alpha\,(3r^2 + q^2 - h^2)}{r} - \frac{\beta\,(3q^2 + r^2 - h^2)}{q} = 4A\,(r^2 + q^2) + 2C \quad (9).$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung durch $r^2 + q^2 - h^2$ und addirt ſie zu dem im vorhergehenden gefundenen Integral (8); ſo erhält man nach der gegenwärtigen Hypotheſe eine Gleichung von folgender Form:

$$\frac{q^2\,(d.\, r^2)^2 + r^2\,(d.\, q^2)^2}{2\,dt^2} - 2\alpha r\,(r^2 + 3q^2 - h^2) - 2\beta q\,(q^2 + 3r^2 - h^2) = 2A\,(r^4 + q^4 + 6r^2q^2 - h^4) + 2C\,(r^2 + q^2 - h^2) - 2B^2 \quad (10)$$

und eben dieſe Gleichung durch $2rq$ multiplicirt, und zu dieſer addirt oder davon abgezogen, giebt dieſe doppelte Gleichung:

(q.

Digitized by Google

$$\frac{q\,d.r^2 \pm r\,d.q^2)^2}{4\,dt^2} - \alpha[(r \pm q)^3 - h^2(r \pm q)] - \beta[(q \pm r)^3 - h^2(q \pm r)] =$$

$$A[(r \pm q)^4 - h^4] + C(r \pm q)^2 - B^2(11).$$

Setzt man also $r + q = s$,

$$r - q = u,$$

so erhält man diese Gleichungen:

$$\frac{(s^2 - u^2)^2\,ds^2}{16\,dt^2} - (\alpha + \beta)\,s^3 + h^2(\alpha + \beta)\,s = A(s^4 - h^4) + Cs^2 - B^2,$$

$$\frac{(s^2 - u^2)^2\,du^2}{16\,dt^2} - (\alpha - \beta)\,u^3 + h^2(\alpha - \beta)\,u = A(u^4 - h^4) + Cu^2 - B^2;$$

woraus man sogleich diese abgesonderte Gleichung zieht:

$$\frac{ds}{\sqrt{(As^4 + (\alpha + \beta)s^3 + Cs^2 - h^2(\alpha + \beta)s - Ah^4 - B^2)}} = \frac{du}{\sqrt{(Au^4 + (\alpha - \beta)u^3 + Cu^2 - h^2(\alpha - \beta)u - Ah^4 - B^2)}}$$

folglich

$$dt = \frac{s^2\,ds}{4\sqrt{(As^4 + (\alpha + \beta)s^3 + Cs^2 - h(\alpha + \beta)s - Ah^4 - B^2)}} - \frac{u^2\,du}{4\sqrt{(Au^4 + (\alpha + \beta)u^3 + Cu^2 - h^2(\alpha - \beta)u - Ah^4 - B^2)}};$$

durch eben diese Substitutionen wird auch die Gleichung (7)

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{4Bh^2}{(s^2 - h^2)(u^2 - h^2)}$$

Digitized by Google

$$= \frac{4Bh^2}{s^2 - u^2}\left(\frac{1}{s^2 - h^2} - \frac{1}{u^2 - h^2}\right);$$

welche folglich giebt

$$d\varphi = \frac{Bh^2\,ds}{(s^2-h^2)\sqrt{(As^4 + (\alpha+\beta)s^3 + Cs^2 - h^2(\alpha+\beta)s - Ah^4 - B^2}}$$

$$- \frac{Bh^2\,du}{(u^2-h^2)\sqrt{(Au^4 + (\alpha-\beta)u^3 + Cu^2 - h^2(\alpha-\beta)u - Ah^4 - B^2)}}.$$

Könnte man diese verschiedenen Differentialien integriren; so hätte man sogleich eine Gleichung zwischen s und u und t und φ in Funktionen von s und u; man hätte also q und hieraus t und φ in Funktionen von r; und da $\sin\psi = \frac{r^2 + h^2 - q^2}{2hr}$, so hätte man auch ψ in r.

Diese Differentialien beziehen sich aber auf die Rektification der Kegelschnitte, man kann sie nur durch Näherung auflösen, und die beste Methode hiezu ist diejenige, die ich an einem andern Orte für die Integration aller Differentialien gegeben habe, die ein radikales Quadrat enthalten, worin die veränderliche Größe zur 4ten Dimension unter dem Zeichen steigt.

Gäbe es ausser den beiden Kräften $\frac{\alpha}{r^2}$ und $\frac{\beta}{q^2}$, die den Körper nach den 2 festen Punkten anziehen, noch eine dritte, die der Distanz proportional wäre, und ihn nach dem in der Mitte der Linie, die die beiden Mittelpunkte mit einander vereinigt, befindlichen Punkte zöge; so kann diese Kraft offenbar in 2 nach einerley Punkten strebenden, und den Distanzen proportionalen Kräften zerlegt werden. In diesem Falle hätte man also $R = \frac{\alpha}{r^2} + 2\gamma r$,

$$Q = \frac{\alpha}{q^2} + 2\gamma q;$$

und

Digitized by Google

und man würde finden, daß das Integral (9) in diesem Falle auch statt fände, nur müßte man zu seiner ersten Hälfte die Glieder

$$\gamma\left(5r^2q^2 + \frac{3}{2}\left(r^4 + q^4\right) - h^2\left(r^2 + q^2\right)\right)$$

addiren; Hierauf müßte man zur ersten Hälfte der Gleichung (10) die Glieder

$$\frac{\gamma}{2}\left(r^6 + q^6 + 15r^2q^2\left(r^2 + q^2\right) - h^2\left(r^4 + q^4 + 6r^2q^2\right)\right)$$

und folglich zur ersten Hälfte der Gleichung (11) die Glieder

$$\frac{\gamma}{4}\left[\left(r \pm q\right)^6 - h^2\left(r \pm q\right)^4\right] \text{ addiren.}$$

Man hat also nur die vielnamigen Glieder in s und u unter dem Würzelzeichen durch die respektiven Glieder

$$-\frac{\gamma}{4}\left(s^6 - h^2 s^4\right) \text{ und}$$

$$-\frac{\gamma}{4}\left(u^6 - h^2 u^4\right)$$

zu vermehren, welches die Auflösung noch verwickelter macht.

24) So unmöglich es auch ist, die zwischen s und u gefundene Gleichung allgemein zu integriren, und folglich eine endliche Verhältniß zwischen diesen beiden veränderlichen Größen zu erhalten; so kann man dennoch davon 2 besondere unter $s = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ vorgestellte Integrale erhalten; denn drückt man diese Gleichung überhaupt durch $\frac{ds}{\sqrt{S}} = \frac{du}{\sqrt{U}}$ aus; so ist klar, daß sie auch statt finden wird, wenn man ds oder $du = 0$ setzt, vorausgesetzt, daß die Nenner $\sqrt{S}$ oder $\sqrt{U}$ auch zugleich $= 0$ und von derselben Ordnung sind. Um die für diesen Fall

Digitized by Google

nöthigen Gleichungen zu erhalten, seße man $s = f + \omega$, wo f eine beständige Größe, und ω eine unendlich kleine Größe ist, und bezeichne durch F den Werth von S, wenn s sich in f verwandelt; so wird das Glied $\frac{ds}{\sqrt{S}} =$

$$\frac{d\omega}{\sqrt{(F + \frac{dF}{df}\omega + \frac{d^2F}{2\,df^2}\omega^2 + \text{etc.})}};$$

damit also oben und unten eine gleiche Anzahl von Dimensionen von ω statt finde; so muß man $F = 0$ und $\frac{dF}{df} = 0$ haben. Da aber $\omega = \frac{1}{\infty}$; so verwandelt sich das vorige Differential in $\frac{d\omega}{\omega\sqrt{\frac{d^2F}{2\,df^2}}}$ dessen Integral ist $\frac{1}{\sqrt{\frac{d^2F}{2\,df^2}}} l \frac{\omega}{K}$, wo K eine gewisse willkührliche beständige Größe ist. Macht man also $\omega = 0$ und zugleich auch $K = 0$; so wird der Werth von $l\frac{\omega}{K}$ unbestimmt, und die Gleichung kann statt finden, welchen Werth auch die eine Hälfte $\int \frac{du}{\sqrt{U}}$ haben mag. Man weiß aber, und es ist an sich klar, daß $F = 0$ und $\frac{dF}{df} = 0$ die Bedingungen sind, die f zu einer doppelten Wurzel der Gleichung $F = 0$ machen. Hieraus folgt denn allgemein, daß wenn das vielnamige S eine oder mehrere doppelte Wurzeln hat, jede derselben einen besondern Werth von s giebt, und eben dies findet für das vielnamige U statt.

Es

Digitized by Google

Es erhellet aber jeßt, daß die Gleichung $s = f$, oder $r + q = f$ eine Ellipse bezeichnet deren 2 Brennpunkte in den 2 Mittelpunkten der Radien r und q sich befinden, und deren große Achse $= f$ ist. Ebenso bezeichnet die Gleichung $u = g$ oder $r - q = g$ eine Hyperbel, deren Brennpunkte in einerley Mittelpunkt sich befinden, und deren erste Achse g ist.

Die besondern eben genannten Auflösungen geben also Ellipsen oder Hyperbeln, die um die Mittelpunkte der Kräfte $\frac{\alpha}{r^2}$; $\frac{\beta}{q^2}$, die man zu Brennpunkten angenommen hat, beschrieben worden sind. Und da die vielnamigen Glieder S und V die 3 willkührlichen beständigen Grössen A, B, C enthalten, die von der Direktion und der anfänglichen Geschwindigkeit des Körpers abhängen; so ist klar, daß man allezeit diese Elemente so annehmen kann, daß der Körper eine gegebene Ellipse oder Hyperbel um gegebene Brennpunkte beschreibt. Derselbe Kegelschnitt also, der durch eine nach einem der Brennpunkte in verkehrten Verhältniß der Quadrate der Distanzen oder nach dem Mittelpunkt in Verhältniß der Distanzen würkenden Kraft beschrieben wird, kann auch, welches sehr zu bemerken ist, durch 3 gleiche nach 2 Brennpunkten und dem Mittelpunkte strebende Kräfte beschrieben werden.

25) Wäre der Mittelpunkt der Kräfte Q, dessen Lage allgemein durch die Coordinaten a, b, c (22) bestimmt wird, nicht fest, sondern hätte er eine bekannte Bewegung; so würden die Größen a, b, c nicht mehr beständig seyn, sondern Funktionen der Zeit t werden. Jedoch würden offenbar die Gleichungen (1), (2), (3) statt finden, weil die Größe V und die auf r, ψ, φ sich beziehenden Differentialien einerley bleiben würden, aber das Integral (4) würde, wie wir (4) allgemein schon angemerkt haben, nicht statt finden.

Anders würde es sich verhalten, wenn der Mittelpunkt der Kräfte R, worauf wir die Bewegung des Körpers beziehen, ebenfals eine Bewegung hätte. Um alsdenn die rechtwinklichten Coordinaten x, y, z der absoluten Bewegung des Körpers zu erhalten; so müßte man die Summe derer dieses Mittelpunkts, die sich auf einen gewissen festen

Digitized by Google

sten Punkt im Raume beziehen, und derer des Körpers in Bezug auf eben diesen Mittelpunkt nehmen.

Nennen wir also X, Y, Z die Coordinaten für den Mittelpunkt der Kräfte R und stellen wir, wie oben, die Bewegung des Körpers um diesen Mittelpunkt durch den Radius r und den beiden Winkeln ψ und φ vor; so hätten wir im gegenwärtigen Falle,

$$x = X + r \cos\psi \cos\varphi,$$

$$y = Y + r \cos\psi \sin\varphi,$$

$$z = Z + r \sin\psi;$$

woraus man zieht:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$$
$$+ 2\,dX\,d.(r\cos\psi\cos\varphi) + 2\,dY\,d.(r\cos\psi\sin\varphi)$$
$$+ 2\,dZ\,d.(r\sin\psi) + r^2(\cos\psi^2\,d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2.$$

Man hat also zum Werthe von T (17) die Größe

$$\frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{2\,dt^2} + \frac{dX\,d.(r\cos\psi\cos\varphi)}{dt^2}$$
$$+ \frac{dY\,d.(r\cos\psi\sin\varphi)}{dt^2} + \frac{dZ\,d.(r\sin\psi)}{dt^2}$$

zu addiren, und bezeichnen wir sie durch T', so hat man zu den 3 Gleichungen (17) oder allgemeiner zu denen (22) die Glieder

$$d.\frac{\delta T'}{\delta d\psi} - \frac{\delta T'}{\delta\psi},$$

$$d.\frac{\delta T'}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T'}{\delta\varphi},$$

$$d.\frac{\delta T'}{\delta dr} - \frac{\delta T'}{dr}$$

hinzu zu addiren.

Was

Was aber den Werth von V betrift, so wird er derselbe bleiben, indem man noch immer den Mittelpunkt der Kräfte R für den gemeinschaftlichen Anfang der Coordinaten a, b, c der andern Mittelpunkte annimmt.

Sieht man also die Bewegung des Mittelpunkts als bekannt an, so muß man seine Coordinaten X, Y, Z als gegebene Funktionen von t betrachten. Der Theil $\frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{2\,dt^2}$ des Ausdrucks von T′ wird also eine einfache Funktion von t seyn, und in der Differentiation nach ψ verschwinden. Man braucht also nur für T′ die andern Glieder zu nehmen, und man findet nach (4 Abschn. 7.) leicht, daß die zu den ersten Hälften der Gleichungen (1), (2), (3) (22) respektiv hinzuzuaddirenden Glieder, seyn werden:

$$\frac{d^2X}{dt^2} - r\sin\psi\cos\varphi + \frac{d^2Y}{dt^2} - r\sin\psi\sin\varphi + \frac{d^2Z}{dt^2} r\cos\psi,$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} - r\cos\psi\sin\varphi + \frac{d^2Y}{dt^2} r\cos\psi\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}\cos\psi\cos\varphi + \frac{d^2Y}{dt^2}\cos\psi\sin\varphi + \frac{d^2Z}{dt^2}\sin\psi.$$

Wäre die Bewegung des Mittelpunkts gleichförmig und geradlinicht; so hätte man

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = 0,$$

und die vorhergehenden Glieder würden von selbst verschwinden. In allen andern Fällen werden diese Glieder die Gleichungen für die Bewegung des Körpers noch verwickelter und schwerer zu integriren machen, und da der Ausdruck von T′ allezeit die Zeit t in sich schließt, wegen der Größen

b

$\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$, so wird das Integral T + V = Const. nie statt finden.

26) Bisher haben wir angenommen, der Körper sey völlig frey. Wäre er aber gezwungen, sich auf einer gegebenen krummen Oberfläche zu bewegen, so würde alsdenn der Radius r eine bekannte Funktion von φ und ψ seyn, die auch t enthalten würde, wenn die Fläche selbst variabel oder doch wenigstens nach einem gegebenen Gesetze beweglich wäre. Man hätte alsdenn also nur diesen Werth von r in den Ausdrücken von T und V zu substituiren, und die 2 veränderlichen Größen ψ und φ eine Veränderung erleiden zu lassen, hiedurch bekäme man 2 Gleichungen, die dazu dienen würden, die Bewegung des Körpers zu bestimmen.

Ist r einer gewissen beständigen Größe oder einer einfachen Funktion von t ohne ψ oder φ gleich; so werden die Variationen dieser Größe in Bezug auf die Caracteristik $\delta = 0$ seyn, und man hat alsdenn nur die Gleichungen (1) und (2) (22), worin man statt r dessen gegebenen Werth substituiren muß. Dieser Fall enthält allgemein die Theorie der Pendel von einer beständigen oder veränderlichen Länge. Denn stellen wir uns ein einfaches Pendel von der Länge r am Mittelpunkte der Radien r aufgehangen vor, und setzen wir die nach diesem Mittelpunkte gerichteten Kräfte $R = 0$, die Kräfte Q aber als parallel, indem wir ihren Mittelpunkt unendlich entfernen, und nehmen wir um mehrerer Einfachheit willen die Achse der Ordinaten z als vertikal, und von oben nach unten gerichtet, die Kräfte Q aber in derselben Direktion an; so hat man

$$a = 0,\quad b = 0,\quad c = h = \infty,$$

folglich $q = \sqrt{(h^2 - 2hr\sin\psi + r^2)}$

$= h - r\sin\psi$

und die Gleichungen (1) und (2) (22) verwandeln sich in diese;

d.

Digitized by Google

$$\frac{d.\, r^2\, d\psi}{dt^2} + \frac{r^2 \sin\psi \cos\psi\, d\varphi^2}{dt^2} - Q r \cos\psi = 0$$

$$\frac{d.\, r^2 \cos\psi^2\, d\varphi}{dt^2} = 0.$$

Der Winkel ψ drückt hier die Neigung des Pendels zum Horizont, und der Winkel φ den aus, den dasselbe durch seine Umdrehung um die vertikale Linie beschreibt.

Die zweite Gleichung giebt sogleich, (wenn man integrirt M.)

$$\frac{r^2 \cos\psi^2\, d\varphi}{dt} = A,$$

woraus folgt $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{r^2 \cos\psi^2}$.

Substituirt man nun diesen Werth in die erste Gleichung, so erhält man:

$$\frac{d.\, r^2\, d\psi}{dt^2} + \frac{A^2 \sin\psi}{r^2 \cos\psi^3} - Q r \cos\psi = 0.$$

Sind r und Q beständig wie bey den gewöhnlichen Pendeln, wenn Q die Kraft der Schwere ausdrückt, so wird die vorhergehende Gleichung durch die Multiplication mit $d\psi$ integrabel, und man bekömmt alsdenn:

$$\frac{r^2\, d\psi^2}{dt^2} + \frac{A^2}{2 r^2 \cos\psi^2} + Q r \sin\psi = B,$$

woraus man zieht

$$dt = \frac{r^2 \cos\psi\, d\psi}{\sqrt{(A^2 + 2Br^2 \cos\psi^2 + 2Qr^3 \cos\psi^2 \sin\psi)}},$$

und

Digitized by Google

und hieraus

$$d\varphi = \left(\frac{A\,dt}{r^2 \operatorname{Cof}\psi^2} = \mathfrak{M}.\right)$$

$$\frac{A\,d\psi}{\operatorname{Cof}\psi \sqrt{(A^2 + 2Br^2 \operatorname{Cof}\psi^2 + 2Qr^4 \operatorname{Cof}\psi^2 \operatorname{fin}\psi)}}.$$

Diese Differentialen in ψ aber sind nur in dem Falle integrabel, wenn die Variationen von ψ nicht als sehr klein angenommen werden. Man kann jedoch durch ähnliche Schlüsse als (24) erweisen, daß der Werth von ψ beständig seyn kann, indem er die Größe unter dem Zeichen, sowie auch das Differential derselben $= 0$ macht. Dies ist der Fall, wo das Pendel die Fläche eines geraden Kegels beschreibt.

Ist der Radius r veränderlich, welches der Fall ist, wenn man die Bewegung eines durch einen Faden aufgehangenen Gewichts, der sich nach einem gegebenen Gesetze verkürze oder verlängere, verlangt; so ist die Gleichung nicht allgemein integrabel, sondern dies findet alsdenn nur bey dem imaginairen Falle statt, wenn die Kraft Q mit dem Cubus der Distanz von der horizontalen Ebene, die durch den Aufhängepunkt geht, in einer verkehrten Verhältniß steht. Denn setzt man alsdenn

$Q = \frac{K}{r^3 \operatorname{fin}\psi^3}$ und multiplicirt die ganze Gleichung durch $r^2\,d\psi$; so erhält man das Integrale:

$$\frac{(r^2\,d\psi)^2}{dt^2} = \frac{A^2}{\operatorname{Cof}\psi^2} + \frac{K}{\operatorname{fin}\psi^2} = B,$$

woraus man den Werth von dt und hierauf den von $d\varphi$ in Differential-Funktionen von ψ findet.

Drückt man überhaupt durch $L = 0$ die Fläche aus, worauf der Körper sich bewegen muß, wo L eine gegebene Funktion von r, ψ, φ und t seyn muß; so hat man nur diese Gleichung als eine Beding ungsgleichung anzusehen, die zwischen den veränderlichen Größen r, ψ, φ statt finden

finden muß, und folglich zu den ersten Hälften der Gleichungen (1), (2), (3) (22) die Glieder $\lambda \frac{dL}{d\psi}$, $\lambda \frac{dL}{d\varphi}$, $\lambda \frac{dL}{dr}$ zu addiren, wo λ eine unbestimmte Größe ist, die man dergestalt wegschaffen muß, daß nur 2 Gleichungen übrig bleiben, die mit der Gleichung $L = o$ verbunden, dazu dienen werden, vollkommen die krumme Linie und Bewegung des Körpers zu bestimmen.

Wäre aber die krumme Linie, worin sich der Körper bewegen soll, selbst gegeben; so erhielte man 2 Gleichungen $L = p$, $M = o$, und man müßte respektiv zu den ersten Hälften der Differentialgleichungen (1), (2), (3) die Glieder $\lambda \frac{dL}{d\psi} + \mu \frac{dM}{d\psi}$, $\lambda \frac{dL}{d\varphi} + \mu \frac{dM}{d\varphi}$, $\lambda \frac{dL}{dr} + \mu \frac{dM}{dr}$ addiren, wo die beiden Größen λ und μ unbestimmt sind, und hernach weggeschaft werden müssen.

Enthalten L und M kein t; so hat man sogleich

$$T + V = \text{Const.}$$

welche Gleichung zugleich von λ und μ befreit ist. Dies Integral aber wird nicht statt finden, wenn die Zeit t in den Gleichungen für die gegebene Fläche oder Krümme nicht vorkömmt. Auf diese Art findet man sehr leicht die Gleichungen für die Bewegung eines Körpers in einer beweglichen Röhre nach irgend einem gegebenen Gesetze, welches eine Aufgabe ist, deren Auflösung durch die gewöhnlichen Methoden sehr verwikkelt ist.

§. III.

Von der Bewegung mehrerer Körper, die auf einander entweder durch Anziehungskräfte, oder indem sie durch Faden oder Hebel mit einander verbunden sind, auf einander würken.

27) Wir wollen m, m′, m″, etc. die Massen der verschiedenen Körper des Systems nennen, die wir als Punkte ansehen, x, y, z seyen

Digitized by Google

die Coordinaten des Körpers m, x', y', z' die des Körpers m' u. s. w. indem man diese Coordinaten alle auf einerley feste Achsen im Raume bezieht; und um die Ideen mehr fest zu setzen, wollen wir allezeit die Achsen der x und y horizontal annehmen, die Achsen der z aber vertikal nach der Richtung von oben nach unten. Wir wollen diese Coordinaten sogleich in die allgemeinen Formeln einführen, aber wir wollen sie hernach in andere der Natur der vorgesetzten Systeme mehr angemessene verwandlen.

Man hat also allgemein:

$$T = m\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2} + m'\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{2\,dt^2} + \text{etc.}$$

Wir wollen ferner P, Q, etc. die beschleunigenden Kräfte nennen, womit jeder Punkt der Masse m nach gegebenen festen oder nicht festen Mittelpunkten strebt, indem man die beschleunigende Kraft der Schwere zur Einheit annimmt, und wir wollen diese Kräfte gewissen Funktionen der respektiven Distanzen p, q, r, etc. des Körpers m von diesen Mittelpunkten proportional setzen. Eben diese Buchstaben mit einem Strich bezeichnet, mögen analoge Größen in Bezug auf den Körper m' bezeichnen u. s. w.

Auf diese Art hat man:

$$V = m\int(P\,dp + Q\,dq + \text{etc.}) + m'\int(P'\,dp' + Q'\,dq' + \text{etc.}) + \text{etc.}$$

und werden die Körper durch eine vertikale und beständige Kraft $= \pi$ sowie von der der Schwere getrieben; so werden P, P', etc. $= \pi$ seyn, und aus dp, dp', etc. wird alsdenn $= -dz$, $= -dz'$, etc., indem die z abnehmen, je höher sie sind. In diesem Falle hat man also:

$$V = -\pi(mz + m'z' + m''z'' + \text{etc.}).$$

Was

Was aber die gegenseitigen Anziehungen anbetrifft; so ist klar, daß wenn R die absolute Anziehung oder die beschleunigende Kraft ausdrückt, womit jeder Punkt der Masse m durch jeden Punkt der Masse m' gezogen wird, die ganze Kraft, womit jeder Punkt von m nach dem Körper oder Mittelpunkt m' hingetrieben wird, durch m' R ausgedrückt wird. Nennt man also r die Distanz zwischen diesen beiden Körpern; so bekommt man m m' ∫ R d r für das auf diese Anziehung in dem Werthe von V sich beziehende Glied; u. s. f.

Führt man nun in den Funktionen T und V neue veränderliche Größen ξ, ψ, etc. ein; so ist jede derselben unabhängig von allen andern; man erhält also in Bezug auf diese verschiedenen veränderlichen Größen Gleichungen von der Form:

$$d.\frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0;$$

Sollen aber diese veränderlichen Größen auch in den Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, etc. vorkommen; so wird jede veränderliche Größe ξ für die Bewegung des Körpers die Differentialgleichung

$$d.\frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi} + \lambda\frac{\partial L}{\partial \xi} + \mu\frac{\partial M}{\partial \xi} + \text{etc.} = 0$$

geben, wo λ, μ, etc. unbestimmte Größen sind und weggeschafft werden müssen.

Man wird sich aber leicht noch aus dem vorhergehenden erinnern, daß wenn die Funktionen T, V, L, M, etc. die Zeit t nicht enthalten, man allezeit das Integral T + V = Const. hat, welches den Grundsatz der lebendigen Kräfte in sich schließt, und daß dies Integrale nicht mehr statt finden wird, wenn die endliche veränderliche Größe t in eine der vorgegebenen Funktionen vorkömmt.

28) Dies vorausgesetzt wollen wir sogleich 2 Körper m und m' betrachten, die einander sich durch die absolute Kraft R anziehen, und wir

wir wollen annehmen, man verlange nur die Bewegung des Körpers m' um den Körper m. Nennen wir nun ξ, η, ζ die rechtwinklichten Coordinaten des Körpers m' in Bezug auf den zum Mittelpunkt angenommenen Körper m, und beziehen wir diese Coordinaten auf Achsen, die denen der x, y, z parallel laufen, und durch den Körper m gehen; so erhalten wir $x' = x + \xi$,

$$y' = y + \eta,$$
$$z' = z + \zeta;$$

Folglich hat man 1) $T = (m + m') \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,d\xi^2}$

$$+ m' \frac{dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta}{2\,dt^2} + m' \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2},$$

2) $V = m\,m' \int R\,dr$,

wenn man $r = \sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]}$
$= \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}$ setzt.

Da aber die veränderlichen Größen x, y, z unabhängig von einander und von den andern Größen ξ, η, ζ sind; so giebt jede dieser veränderlichen Größen eine Gleichung, als:

$$(m + m') \frac{d^2 x}{dt^2} + m' \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0,$$

$$(m + m') \frac{d^2 y}{dt^2} + m' \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 0,$$

$$(m + m') \frac{d^2 z}{dt^2} + m' \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = 0;$$

woraus man durch die Integration findet

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{m'}{m + m'} \left(\frac{d\xi}{dt} + a \right)$$

dy

Digitized by Google

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{m'}{m+m'}\left(\frac{d\eta}{dt} + b\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{m'}{m+m'}\left(\frac{d\zeta}{dt} + c\right).$$

Substituirt man nun diese Werthe in dem allgemeinen Werth von T; so wird dieser

$$T = \frac{m\,m'}{m+m'}\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2}\right) + \frac{m'^2}{m+m'}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right);$$

T und V enthalten also nur die veränderlichen Größen ξ, η, ζ der Bahn des Körpers m' und m.

Nennt man also r den Radius Vektor dieser Bahn, ψ die Neigung dieses Radius auf der Ebene der ξ und η; und φ den Winkel der Projektion auf dieser Ebene mit der Achse der ξ; so erhält man, wie wir schon gesehen haben:

$$\xi = r\,\mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

$$\eta = r\,\mathrm{Cos}\,\psi\,\sin\varphi,$$

$$\zeta = r\,\sin\psi;$$

und hieraus $d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = r^2(\mathrm{Cos}\,\psi^2\,d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2$.

Setzt man also

$$T = \frac{m\,m'}{m+m'}\left(\frac{r^2(\mathrm{Cos}\,\psi^2\,d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2}{2\,dt^2}\right)$$

(wo ich die beständige Größe weggelassen habe, weil sie bey den Differentiationen verschwindet) und

$$V = m\,m'\int R\,dr;$$

Digitized by Google

so geben die Variationen von ψ, φ und r, wenn man alle Glieder durch $\frac{mm'}{m+m'}$, dividirt:

$$\frac{d.r^2\,d\psi}{dt^2} + \frac{r^2 \sin\psi\ \mathrm{Cos}\psi\ d\varphi^2}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d.r^2\ \mathrm{Cos}\psi^2\,d\varphi}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\,(\mathrm{Cos}\psi^2\,d\varphi^2 + d\psi^2}{dt^2} + (m+m')\,R = 0,$$

welche Gleichungen, wie man sieht, denen ähnlich sind, die wir für die Bewegung eines nach einen festen Mittelpunkt (17) getriebenen Körpers schon gefunden, und aufgelöst haben. In beiden Fällen wird also die Bewegung einerley seyn, wenn man die nach dem festen Mittelpunkt strebende Kraft durch $(m+m')\,R$ ausdrückt.

29) Wir wollen uns jetzt 3 Körper m, m', m'' vorstellen, die sich einander anziehen; nämlich m und m' durch die beschleunigende Kraft R, m und m'' durch die Kraft R' und m' und m'' durch die Kraft R''; man verlangt nur die relative Bewegung dieser Körper zu wissen.

Behalten wir die auf die Körper m und m' sich beziehenden Benennungen (28) bey, und setzen wir ferner ξ', η', ζ' seyen für den Körper m'' die rechtwinklichten Coordinaten in Bezug auf den Körper m als auf den Mittelpunkt, so hat man

$$x'' = x + \xi',$$
$$y'' = y + \eta',$$
$$z'' = z + \zeta'.$$

Folg-

Digitized by Google

Folglich 1) $T = (m + m' + m'') \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}$

$$+ m' \frac{dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta}{dt^2}$$

$$+ m' \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2}$$

$$+ m'' \frac{dx\,d\xi' + dy\,d\eta' + dz\,d\zeta'}{dt^2}$$

$$+ m'' \frac{d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2}{2\,dt^2} \quad (a)$$

2) $V = m\,m' \int R\,dr + m\,m'' \int R'\,dr' + m'\,m'' \int R''\,dr''$,

wenn man $r = \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}$;

$r' = \sqrt{(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}$,

$r'' = \sqrt{[(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2]}$ setzt.

Weil nun die veränderlichen Größen x, y, z unabhängig sowohl von einander als von andern veränderlichen Größen sind, so geben ihre Variationen sogleich Gleichungen von folgender Form:

$$\left.\begin{aligned}
(m + m' + m'') \frac{d^2 x}{dt^2} + m' \frac{d^2 \xi}{dt^2} + m'' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} &= 0 \\
(m + m' + m'') \frac{d^2 y}{dt^2} + m' \frac{d^2 \eta}{dt^2} + m'' \frac{d^2 \eta'}{dt} &= 0 \\
(m + m' + m'') \frac{d^2 z}{dt^2} + m' \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + m'' \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

woraus man durch die Integration zieht:

Digitized by Google

$$\frac{dx}{dt} = -(m'\frac{d\xi}{dt} + m''\frac{d\xi'}{dt} + a) : (m + m' + m'')$$

$$\frac{dy}{dt} = -(m'\frac{d\eta}{dt} + m''\frac{d\eta'}{dt} + b) : (m + m' + m'')$$

$$\frac{dz}{dt} = -(m'\frac{d\zeta}{dt} + m''\frac{d\zeta'}{dt} + c) : (m + m' + m'').$$

Substituirt man diese Werthe in den allgemeinen Werth von T; so verwandelt derselbe sich in diesen:

$$T = \frac{m'(m + m'')}{m + m' + m''}\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2}\right)$$
$$- \frac{m'm''}{m + m' + m''}\left(\frac{d\xi\,d\xi' + d\eta\,d\eta' + d\zeta\,d\zeta'}{dt^2}\right)$$
$$+ \frac{m''(m + m')}{m + m' + m''}\left(\frac{d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2}{2\,dt^2}\right)$$
$$+ \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(m + m' + m'')} \quad \ldots\ldots (c)$$

worin nur die veränderlichen Größen $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ vorkommen, welche bey der Funktion V statt finden, und die relativen Bewegungen von m' und m'' um m ausdrücken.

Da diese 6 veränderlichen Größen unabhängig von einander sind, so könnte man sogleich, wenn man sie einzeln variiren läßt, Differentialgleichungen zwischen diesen veränderlichen Größen erhalten. Man könnte auch den Werth von T in Funktionen der Radiorum Vektorum r, r' und der Winkel ψ, φ und ψ', φ' ausdrücken, wenn man statt ξ, η, ζ, ξ' etc. ihre Werthe $r \cos\psi \cos\varphi$, $r \cos\psi \sin\varphi$, $r \sin\psi$, $r \cos\psi' \cos\varphi'$ etc. substituirte. Man erhielte alsdenn Gleichungen zwischen diesen neuen veränderlichen Größen.

Jedoch

Digitized by Google

Jedoch ist es leicht vorauszusehen, daß diese Gleichungen sich nicht unter der einfachsten Form darstellen, wenigstens nicht in Ansehung der Differentialglieder, wegen der vielen unter einander in dem Werthe von T befindlichen veränderlichen Größen. Um nun diese veränderlichen Größen von einander zu trennen, so gebe ich dem T diese Form:

$$T = \frac{m\,m'}{m+m'}\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2}\right)$$

$$+ \frac{m''(m+m')}{m+m'+m''}\left(\frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{2\,dt^2}\right)$$

$$+ \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(m+m'+m'')},$$

wo $\alpha = \xi' - \frac{m'}{m+m'}\xi,$

$$\beta = \eta' - \frac{m'}{m+m'}\eta,$$

$$\gamma = \zeta' - \frac{m'}{m+m'}\zeta.$$

Substituirt man nun in r' und r'' statt ξ', η', ζ' ihre Werthe

$$\alpha + \frac{m'}{m+m'}\xi,\ \beta + \frac{m'}{m+m'}\eta,\ \gamma + \frac{m'}{m+m'}\zeta$$

so erhält man T und V in Funktionen von $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma$ ausgedrückt, und da auch diese veränderlichen Größen unabhängig von einander sind, so werden sie auch eben so viele Differentialgleichungen geben. Führen wir nun statt ξ, η, ζ den Radius r und die Winkel ψ und φ nach den oben gegebenen Formeln ein, so verwandelt sich der Theil des Werths von T

Digitized by Google

$$= \frac{m\,m'}{m+m'}\left(\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{2\,dt^2}\right)+$$

$$\frac{m\,m'}{m+m'}\left(\frac{r^2\,(\mathrm{Cof}\,\psi^2\,d\varphi^2+d\psi^2)+dr^2}{2\,dt^2}\right),$$

und dies ist der einzige Werth, der Glieder in den von den Variationen von r, ψ und φ abhängenden Gleichungen giebt.

Sieht man daher auch r′ und r″ als Funktionen eben dieser veränderlichen Größen an; so hat man sogleich diese 3 Gleichungen:

$$\frac{m\,m'}{m+m'}\left(\frac{d.\,r^2\,d\psi}{dt^2}+\frac{r^2\sin\psi\,\mathrm{Cof}\,\psi\,d\varphi^2}{dt^2}\right)+m\,m''R'\frac{\partial r'}{\partial\psi}+$$

$$m'\,m''R''\frac{\partial r''}{\partial\psi}=0,$$

$$\frac{m\,m'}{m+m'}\left(\frac{d.\,r^2\,\mathrm{Cof}\,\psi^2\,d\varphi}{dt^2}\right)+m\,m''R'\frac{\partial r'}{\partial\varphi}+m'\,m''R''\frac{\partial r'}{\partial\varphi}=0,$$

$$\frac{m\,m'}{m+m'}\left(\frac{d^2\,r}{dt^2}-\frac{r\,(\mathrm{Cof}\,\psi^2\,d\varphi^2+d\psi^2)}{dt^2}\right)+m\,m'R+m\,m''R'$$

$$\frac{\partial r'}{\partial\psi}+m\,m''R''\frac{\partial r''}{\partial\psi}=0.$$

Um nun die Werthe von ∂r′, ∂r″ in ∂ψ, ∂φ, ∂r zu erhalten; so hat man nur zu bedenken, daß

$$r'\,\partial r'=\xi'\,\partial\xi'+\eta'\,\partial\eta'+\zeta'\,\partial\zeta'$$

$$r''\,\partial r''=(\xi'-\xi)\,(\partial\xi'-\partial\xi)+(\eta'-\eta)\,(\partial\eta'-\partial\eta)$$

$$+(\zeta'-\zeta)\,(\partial\zeta'-\partial\zeta)$$

und wenn man von der Variation von α, β, γ abstrahirt; so hat man:

$\partial\eta'$

Digitized by Google

$$\delta\eta' = \frac{m'}{m + m'}\delta\eta,$$

$$\delta y' = \frac{m'}{m + m'}\delta\eta,$$

$$\delta\zeta' = \frac{m'}{m + m'}\delta\zeta;$$

so daß man hat

$$r'\delta r' = \frac{m'}{m + m'}(\xi'\delta\xi + \eta'\delta\eta + \zeta'\delta\zeta),$$

$$r''\delta r'' = -\frac{m}{m + m'}[(\xi' - \xi)\delta\xi + (\eta' - \eta)\delta\eta + (\zeta' - \zeta)\delta\zeta],$$

$$= \frac{m}{m + m'}(r\delta r - \xi'\delta\xi - \eta'\delta\eta - \zeta'\delta\zeta).$$

Substituirt man nun statt ξ, η, ζ ihre Werthe, und setzt auch ähnliche Werthe an die Stelle der ξ', η', ζ' d. h. stellt man auf gleiche Art die Bewegung des Körpers m'' und m durch den Radius Vektor r und durch die Winkel ψ' und φ' vor; so findet man:

$$\xi'\delta\xi + \eta'\delta\eta + \zeta'\delta\zeta = \Psi\delta\psi + \Phi\delta\varphi + \Pi\delta r,$$

wenn man Kürze halber setzt:

$$\Psi = rr'(\sin\psi' \operatorname{Cof}\psi - \operatorname{Cof}\psi' \sin\psi \operatorname{Cof}(\varphi' - \varphi)),$$

$$\Phi = rr' \operatorname{Cof}\psi \operatorname{Cof}\psi' \sin(\varphi' - \varphi),$$

$$\Pi = r'(\sin\psi' \sin\psi + \operatorname{Cof}\psi' \operatorname{Cof}\psi \operatorname{Cof}(\varphi' - \varphi));$$

so daß man hat

$$\delta r' = \frac{m'}{m + m'}\left(\frac{\Psi\delta\psi + \Phi\delta\varphi + \Pi\delta r}{r'}\right),$$

$\delta r''$

Digitized by Google

$$\delta r'' = -\frac{m}{m+m'}\left\{\frac{\Psi\delta\psi + \Phi\delta\varphi + (\Pi - r)\,dr}{r''}\right\}$$

Dividirt man also die vorhergehenden Gleichungen durch $\frac{mm'}{m+m'}$; so erhält man:

$$\frac{d.\,r^2\,d\psi}{dt^2} + \frac{r^2 \sin\psi \operatorname{Cos}\psi\, d\varphi^2}{dt^2} + m''\left(\frac{R'}{r'} - \frac{R''}{r''}\right)\Psi = 0,$$

$$\frac{d.\,r^2 \operatorname{Cos}\psi^2\, d\varphi}{dt^2} + m''\left(\frac{R'}{r'} - \frac{R''}{r''}\right)\Phi = 0;$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\,(\operatorname{Cos}\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2} + (m+m')\,R$$

$$+ m''\left[\left(\frac{R'}{r'} - \frac{R''}{r''}\right)\Pi + \frac{r\,R''}{r''}\right] = 0,$$

welche für die Differentialglieder dieselbe Form haben, als die der Bewegung eines nach einem festen Mittelpunkte gezogenen Körpers.

Auf gleiche Art kann man 3 ähnliche Gleichungen für die Bewegung des Körpers m'' um m finden, und da selbst in den Werthen von T und V die auf die Körper m und m' sich beziehenden Größen mit einander verwechselt werden können, so hat man nur in den vorhergehenden Gleichungen die Größen r, ψ, φ, R und m' in r', ψ', φ', R' und m'' und umgekehrt zu verwandlen, indem die Größe r'' die nämliche bleibt, weil sie auf gleiche Art zu den beiden Körpern gehört, deren Distanz sie ausdrückt.

Wären mehr wie 3 Körper vorhanden, die einander anzögen, so würde man dennoch die Aufgabe immer auf einerley Art auflösen, und man würde Gleichungen finden, die zwar den vorhergehenden ähnlich, aber mit den Gliedern vermehrt wären, die sich auf die Attraktionen aller andern Körper beziehen. Setzt man nun in diesen Gleichungen

R =

Digitized by Google

$$R = \frac{1}{r^2}, \quad R' = \frac{1}{r'^2}, \quad R'' = \frac{1}{r''^2} \text{ etc.}$$

so hat man den Fall der Bewegung der Planeten, wenn sie sich einander anziehen und durch die Sonne angezogen werden. Nimmt man nun m für die Erde, m′ für den Mond, und m″ für die Sonne an; so verwandeln sich die oben gefundenen 3 Gleichungen in die der unter dem Namen der Aufgabe von den 3 Körpern, womit sich die Geometer in den letztern Zeiten so sehr beschäftigt haben, bekannte Aufgabe. Der Umstand, daß die Monds- und Sonnenbahnen fast cirkelrund sind, macht, daß sie durch Näherung aufgelößt werden kann, und man kann in den Werken, worin davon gehandelt wird, die Kunstgriffe sehen, die man erdacht hat, um diese Näherung bis zur möglichsten Genauigkeit zu treiben.

30) Wir wollen uns jetzt vorstellen, die 3 Körper m, m′, m″ zögen sich nicht an, sondern wären schwer und durch einen unausdehnbaren Faden verbunden, so daß m′ und m″ an den beiden Enden des Fadens, und m an einem dazwischen liegendem Punkt befestigt wären; und daß auf diese Art die Distanzen zwischen m und m′, und m und m″ nothwendig unveränderlich wären.

Macht man alsdenn $x' = x + \xi$,

$$y' = y + \eta,$$
$$z' = z + \zeta,$$
$$x'' = x + \xi',$$
$$y'' = y + \eta',$$
$$z'' = z + \zeta',$$

so findet man für T denselben Ausdruck (a) des vorhergehenden Artikels, und der Werth von V wird, wie (27) sehn, wenn man durch π die beschleunigende Kraft der Schwere ausdrückt:

$$V = -\pi (m + m' + m'') z - \pi m' \zeta - \pi m'' \zeta'.$$

Digitized by Google

Da die einzige Bedingung der Aufgabe in der Unveränderlichkeit der Distanzen zwischen m und m′ und zwischen m und m″ besteht, und diese Distanzen nur von den veränderlichen Größen $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ abhängen; so ist klar, daß die veränderlichen Größen x, y, z unabhängig von einander, und von allen andern sind; nimmt man also jede insbesondere als veränderlich an; so erhält man sogleich 3 Gleichungen, welche mit denen (b) (29) einerley sind, nur daß die 3te noch die beständigen Glieder $-\pi(m + m' + m'')$ enthält. Hieraus zieht man für $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ dieselben Ausdrücke als a. a. O., wenn man nur die Größe $c - \pi(m + m' + m'')t$ an die Stelle von c setzt. Vermindert man also die Größe c um $\pi(m + m' + m'')t$; so erhält man für T dieselbe veränderte Gleichung (c).

Macht man jetzt

$$\xi = r \operatorname{Cof}\psi \operatorname{Cof}\varphi,$$
$$\eta = r \operatorname{Cof}\psi \operatorname{sin}\varphi,$$
$$\zeta = r \operatorname{sin}\psi,$$
$$\xi' = r' \operatorname{Cof}\psi' \operatorname{Cof}\varphi',$$
$$\eta' = r' \operatorname{Cof}\psi' \operatorname{sin}\varphi',$$
$$\zeta' = r' \operatorname{sin}\psi';$$

so ist klar, daß die Radii Vektores r und r′ der Bahnen von m′ und m″ um m d. h. ihre Entfernungen von m nach der Natur der Aufgabe beständig seyn müssen. Verrichtet man daher diese Substitutionen; so erhält man nur 4 veränderliche Größen $\psi, \psi', \varphi, \varphi'$, die, da sie ausserdem unabhängig sind, auch vier Gleichungen geben.

31) Da die Findung dieser Gleichungen keine Schwierigkeit hat, und nur einen blos mechanischen Calkul erfodert; so wollen wir uns auf den Fall einschränken, wie die 3 Körper sich in einerley horizontalen Ebene bewegen, welcher noch den Vorzug hat, daß er eine vollständige Auflösung zuläßt.

In diesem Falle macht man also, $z, z', z'' = 0$, folglich auch ζ und $\zeta' = 0$. Man hat folglich $V = 0$ und

$T =$

Digitized by Google

$$T = \frac{m'(m+m'')}{m+m'+m''} \cdot \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{2\,dt^2} -$$

$$\frac{m'\,m''}{m+m'+m''} \cdot \frac{d\xi\,d\xi' + d\eta\,d\eta'}{dt^2} +$$

$$\frac{m''(m+m')}{m+m'+m''} \cdot \frac{d\xi'^2 + d\eta'^2}{2\,dt^2} +$$

$$\frac{a^2+b^2}{2(m+m'+m'')} \cdot$$

Es ſey $\xi = r \operatorname{Cof} \varphi$,

$\eta = r \operatorname{ſin} \varphi$,

$\xi' = r' \operatorname{Cof} \varphi'$,

$\eta' = r' \operatorname{ſin} \varphi'$,

weil ψ und $\psi' = o$ ſind; der Werth von T wird alſo, da dr und $dr' = o$ ſind:

$$T = \frac{m'(m+m'')}{m+m'+m''} \cdot \frac{r^2\,d\varphi^2}{2\,dt^2} -$$

$$\frac{m'\,m''}{m+m'+m''} \cdot \frac{r\,r'\operatorname{Cof}(\varphi'-\varphi)\,d\varphi'\,d\varphi}{dt^2}$$

$$+ \frac{m''(m+m')}{m+m'+m''} \cdot \frac{r'^2\,d\varphi'^2}{2\,dt^2}$$

$$+ \frac{a^2+b^2}{2(m+m'+m'')}$$

und man erhält ſogleich wegen der Variationen von φ und φ' dieſe 2 Differentialgleichungen, wovon die Auflöſung der Aufgabe abhängt:

Digitized by Google

$$m'(m+m'')\,r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} - m'm''rr'\left(\frac{d.\,\mathrm{Cof}(\varphi'-\varphi)\,d\varphi}{dt^2} - \frac{\sin(\varphi'-\varphi)\,d\varphi'\,d\varphi}{dt^2}\right) = 0$$

$$m''(m+m')\,r'^2\frac{d^2\varphi'}{dt^2} - m'm''rr'\left(\frac{d.\,\mathrm{Cof}(\varphi'-\varphi)\,d\varphi}{dt^2} + \frac{\sin(\varphi'-\varphi)\,d\varphi'\,d\varphi}{dt^2}\right) = 0.$$

Man sieht aber leicht, daß die Summe dieser beiden Gleichungen integrabel ist. Das Integral ist nämlich:

$$m'(m+m'')\,r^2\frac{d\varphi}{dt} - m'm''rr'\frac{\mathrm{Cof}(\varphi'-\varphi)\,(d\varphi'+d\varphi)}{dt} + m''(m+m')\,r'^2\frac{d\varphi'}{dt} = \mathrm{Const.}$$

Da aber ferner T nicht t in sich schließt und V = o ist; so hat man das Integral T = Const., so daß durch diese beiden Integrale die Aufgabe schon auf Differentialien von der 1ten Ordnung gebracht worden ist.

Da aber die unbestimmten Größen unter einander gemischt sind; so mache man, um sie von einander zu trennen,

$$\varphi' + \varphi = s,$$

$$\varphi' + \varphi = u;$$

$$\text{aber } \varphi' = \frac{s+u}{2},$$

$$\varphi = \frac{s-u}{2};$$

durch

durch diese Substitutionen werden dann die beiden Integrale:

$$m'(m+m'')r^2(ds-du)+m''(m+m')r'^2(ds+du)$$
$$-2m'm''rr'\cos u\,ds = A\,dt$$

$$m'(m+m'')r^2(ds-du)^2+m''(m+m')r'^2(ds+du)^2$$
$$-2m'm''rr'\cos u(ds^2-du^2) = B\,dt^2,$$

wo A und B 2 willkührliche beständige Größen sind. Es sey Kürze halber

$$M = m''(m+m')r'^2+m'(m+m'')r^2,$$
$$N = m''(m+m')r'^2-m'(m+m'')r^2;$$

so hat man:

$$(M-2m'm''rr'\cos u)\,ds+N\,du = A\,dt$$
$$(M-2m'm''rr'\cos u)\,ds^2+(M+2m'm''rr'\cos u)\,du^2+2N\,ds\,du = B\,dt^2$$

Die erstere giebt: $ds = \frac{A\,dt-N\,du}{M-2m'm''rr'\cos u}$;

und substituirt man diesen Werth in die 2te; so hat man:

$$(A\,dt-N\,du)^2+M^2-4''^2r^2r'^2\cos u^2)\,du^2+2N(A\,dt$$
$$-N\,du)\,du = B(M-2m'm''rr'\cos u)\,dt^2$$

welche sich auf folgende Form bringen läßt:

$$(M^2-N^2-4m'^2m''^2r^2r'^2\cos u^2 = BM-$$
$$A^2-2m'm''rr'\cos u)\,dt^2;$$

woraus man zieht:

$$dt = du\sqrt{\left(\frac{M^2-N^2-4m'^2m''^2r^2r'^2\cos u^2}{BM-A^2-2m'm''rr'\cos u}\right)};$$

Digitized by Google

und setzt man diesen Werth von dt in den vorhergehenden Ausdruck von ds; so erhält man auch ds in u und du ausgedrückt.

Das Problem ist also aufgelöst, oder hängt wenigstens nur von der Integration oder Construktion der Differentialien, worin nur eine veränderliche Größe vorkömmt, ab.

32) Könnte der Körper m, der in der Mitte ist, der Länge des Fadens nach herabrütschen; so erhielte man allezeit den nämlichen Ausdruck von T als in der Formel (c) (29); substituirt man aber r Cos ψ Cos φ, r′ Cos ψ′ Cos φ′, r Cos ψ sin φ, etc. anstatt ξ, ξ′, η, etc.; so würden die Radien, r und r′, die die Distanzen der Körper m′ und m″ vom Körper m ausdrücken, nicht alle beide beständig seyn, sondern nur ihre Summe r + r′, die allezeit der Länge des Fadens gleich ist, wodurch die beiden Körper m′ und m″ mit einander verbunden sind. Nennt man also a diese Länge; so hätte man r′ = a — r und es würden nach den Substitutionen 5 veränderliche unabhängige Größen r, ψ, φ, ψ′, φ′ statt finden, wovon jede nach der allgemeinen Formel eine Differentialgleichung geben würde.

33) Nähme man aber den Körper m fest gehalten an, so daß der Faden, der die beiden Körper m′ und m″ verbindet, durch eine Art von festen Ring im Raume gehen muß; und wenn man mehrerer Einfachheit willen diesen Punkt für den Anfang der Coordinaten annähme; so würde man in den vorhergehenden Formeln x, y, z = 0 machen müssen, und der Werth (α) von T würde:

$$T = m' \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2} + m'' \frac{d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2}{2\,dt^2}$$

welcher durch die vorhergehenden Substitutionen sich in folgenden verwandeln würde:

$$T = m' \frac{r^2 (\mathrm{Cos}^2\psi\, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2}{2\,dt^2} +$$

m″

$$m'' \frac{(a-r)^2 (\mathrm{Cof}^2 \psi' \, d\varphi'^2 + d\psi'^2) + dr}{2\,dt^2} \quad (d).$$

Setzt man nun, die Körper seyen schwer; so hätte man wie (30)

$$V = -\pi (m' \zeta + m'' \zeta')$$ oder

$$V = -\pi m' r \sin \psi - \pi m'' (a-r) \sin \psi'$$

und man erhielte von neuem 5 Gleichungen für die 5 veränderlichen Größen r, ψ, ψ', φ und φ', nämlich:

$$m' \frac{d^2 r - r (\mathrm{Cof}^2 \psi \, d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2} +$$

$$m'' \frac{d^2 r + (a-r)^2 (\mathrm{Cof}^2 \psi' \, d\varphi'^2 + d\psi^2)}{dt^2} - \pi m' \sin \psi +$$

$$\pi m'' \sin \psi' = 0,$$

$$\frac{d.(r^2 \, d\psi) + r^2 \mathrm{Cof} \psi \sin \psi \, d\varphi^2}{dt^2} - \pi r \mathrm{Cof} \psi = 0,$$

$$\frac{d.(a-r)^2 \, d\psi' + (a-r)^2 \mathrm{Cof} \psi' \sin \psi' \, d\varphi'^2}{dt^2} + \pi (a-r) \mathrm{Cof} \psi' = 0,$$

$$\frac{d.(r^2 \mathrm{Cof}^2 \psi \, d\varphi)}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d.(a-r)^2 \mathrm{Cof}^2 \psi' \, d\varphi'}{dt^2} = 0,$$

die beiden letztern sind integrabel, und geben sogleich

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{r^2 \mathrm{Cof}^2 \psi},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{B}{(a-r)^2 \mathrm{Cof}^2 \psi'},$$

und

Digitized by Google

und substituirt man diese Werthe in die 2te und 3te Gleichung; so verwandeln sich diese in

$$\frac{d.\, r^2\, d\psi}{dt^2} + \frac{A^2 \sin\psi}{r^2 \cos^3\psi} - \pi r \cos\psi = 0$$

$$\frac{d.\,(a-r)^2\, d\psi'}{dt^2} + \frac{B^2 \sin\psi'}{(a-r)^2 \cos^3\psi'} + \pi (a-r) \cos\psi' = 0$$

deren Integration nicht allgemein möglich ist. Sie würde es aber werden, wenn man keine Rücksicht auf die Schwere der Körper nähme und $\pi = 0$ setzte; multiplicirte man alsdann die erste der Gleichungen durch $r^2\, d\psi$, und die 2te durch $(a-r)\, d\psi'$; so erhielte man die Integralien:

$$\frac{r^4\, d\psi^2}{dt^2} + \frac{A^2}{\cos^2\psi} = C^2,$$

$$\frac{(a-r)^4\, d\psi'^2}{dt^2} + \frac{B^2}{\cos^2\psi'} = D^2,$$

woraus man zieht:

$$\frac{dt}{r^2} = \frac{d\psi}{\sqrt{\left(C^2 - \frac{A^2}{\cos^2\psi}\right)}}$$

$$\frac{dt}{(a-r)^2} = \frac{d\psi'}{\sqrt{\left(D^2 - \frac{B^2}{\cos^2\psi'}\right)}}$$

Ausserdem aber hat man das Integral

$$T + V = \text{Const.}$$

Substituirt man hierin die vorhergehenden Werthe von $d\varphi$, $d\varphi'$, $d\psi$, $d\psi'$; so erhält man, da $V = 0$:

m'

Digitized by Google

$$m'\left(\frac{C^2}{r^2}+\frac{dr^2}{dt^2}\right)+m''\left(\frac{D^2}{(a-r)^2}+\frac{dr^2}{dt^2}\right)=E^2,$$

und folglich

$$dt=\frac{dr\sqrt{(m'+m'')}}{\left(\sqrt{E^2-\frac{m'C^2}{r^2}-\frac{m''D^2}{(a-r)^2}}\right)}.$$

Substituirt man nun diesen Werth von dt in den 4 vorhergehenden Integralien; so erhält man besondere Gleichungen, durch die man vermittelst der Quadraturen t, ψ, ψ', φ, φ' in r bestimmen kann. Könnte übrigens derselbe Körper m in der Mitte anstatt fest gehalten zu werden, wie wir eben angenommen haben, frey auf einer Oberfläche oder gegebenen Linie rütschen; so würden die Coordinaten x, y, z, nicht = o sondern eine würde eine gegebene Funktion der beiden andern seyn, oder 2 dieser Coordinaten würden in Funktionen der 3ten gegeben seyn; man hätte alsdenn nur diese Substitutionen in denselben Ausdrückungen von T und V zu verrichten, und darauf auch auf die Veränderlichkeit dieser Coordinaten Rücksicht zu nehmen.

34) Wäre der Faden an einem seiner Enden fest gehalten, und mit 2 schweren Körpern m und m' beschwert, wovon der erste dem festen Punkte am nächsten sey; so muß man sogleich setzen

$$x'=x+\xi,$$
$$y'=y+\eta,$$
$$z'=z+\zeta,$$

und die Ausdrückungen von T und V werden:

$$T=(m+m')\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}+$$
$$m'\frac{dx\,d\xi+dy\,d\eta+dz\,d\zeta}{dt^2}+$$

Digitized by Google

$$\frac{m' (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2},$$

$$V = -\pi (m + m') z - \pi m' \zeta.$$

Nennt man endlich r den zwischen dem festen Punkt und dem Körper m und r' den zwischen diesem Körper und dem folgenden m' befindlichen Theil des Fadens; so setze man $x = r \operatorname{Cof} \psi \operatorname{Cof} \varphi$,

$$y = r \operatorname{Cof} \psi \operatorname{sin} \varphi,$$
$$z = r \operatorname{sin} \psi,$$
$$\xi = r' \operatorname{Cof} \psi' \operatorname{Cof} \varphi',$$
$$\eta = r' \operatorname{Cof} \psi' \operatorname{sin} \varphi',$$
$$\zeta = r' \operatorname{sin} \psi';$$

und man findet 4 Gleichungen für die 4 veränderlichen Größen $\psi, \varphi, \psi', \varphi'$, wenn man r und r' als beständig ansieht. Diese Gleichungen aber sind allgemein integrabel, und nur der Fall, wo die Körper sich auf einer horizontalen Ebene bewegen, ist einer vollkommenen Auflösung fähig. In diesem Falle hat man also ψ und $\psi' = 0$ welches giebt

$$V = 0 \text{ und}$$

$$T = (m + m') \frac{r^2\,d\varphi^2}{2\,dt^2} + m' \frac{r r' \operatorname{Cof}(\varphi' - \varphi)\, d\varphi'\, d\varphi}{dt^2} + m'' \frac{r'^2\,d\varphi'^2}{2\,dt^2}.$$

Dieser Ausdruck von T ist, wie man sieht, mit dem (31) von einerley Form, er giebt daher auch ähnliche Gleichungen den Coefficienten nach, die folglich auch auf einerley Art integrirt werden.

Durch ein ähnliches Verfahren findet man die Gleichungen für die Bewegung eines mit soviel Körpern beschwerten Fadens, als man nur will; aber die Schwierigkeit besteht in ihrer Integration, und ich kenne nur einen einzigen Fall, wo sie allgemein bewerkstelligt werden kann, nämlich

Digitized by Google

nämlich den, wo man annimmt, daß die Körper sich sehr wenig von der Vertikal-Linie entfernen; denn da die vertikale Lage des Fadens mit der seines Gleichgewichts einerley ist; so kann man in diesem Falle die allgemeine Methode anwenden, die wir (1) gegeben haben.

35) Entfernen sich die Körper wenig von der Vertikallinie, die die Achse der z ist; so sind die Coordinaten x, y, x', y', etc. sehr klein, man muß daher diese Coordinaten im Calkul beybehalten. Nennen wir nun r, r', r'', etc. die zwischen dem festen Punkt und dem ersten Körper m, zwischen diesem Körper und dem folgenden m', zwischen diesem und dem Körper m'' u. s. w. befindlichen Theile des Fadens, so hat man

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$r' = \sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]},$$

etc.

woraus man zieht

$$z = \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)},$$

$$z' - z = \sqrt{(r'^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2)},$$

etc.

d. h., da x, x', etc.; y, y', etc. sehr klein sind

$$z = r - \frac{x^2 + y^2}{2r},$$

$$z' - z = r' - \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2r'},$$

etc.

Die Werthe von z, z', z'', etc. werden also seyn

$$z = r - \frac{x^2 + y^2}{2r},$$

Digitized by Google

$$z' = r + r' - \frac{x^2 + y^2}{2r} - \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2r'^2};$$

$$z'' = r + r' + r'' - \frac{x^2 + y^2}{2r} - \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2r'} - \frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{2r''};$$

etc.

Man substituire diese daher in den allgemeinen Ausdrückungen von T und V (27), nehme r, r', r'', etc. als beständig an, und werfe die Glieder weg, wo die veränderlichen Größen x, y, x', y', etc. über die 2te Dimension steigen, alsdenn erhält man:

$$T = m\frac{dx^2 + dy^2}{2dt^2} + m'\frac{dx'^2 + dy'^2}{2dt^2} + m''\frac{dx''^2 + dy''^2}{2dt^2} + \text{etc.},$$

$$V = -\pi(m + m' + m'' + \text{etc.})\,r - \pi(m' + m'' + \text{etc.})\,r' - \pi(m'' + \text{etc.})\,r'' - \text{etc.}$$
$$+ \pi(m + m' + m'' + \text{etc.})\frac{x^2 + y^2}{2r}$$
$$+ \pi(m' + m'' + \text{etc.})\frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2r'}$$
$$+ \pi(m'' + \text{etc.})\frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{2r''}$$
$$+ \text{etc.}$$

Man sieht, daß in diesen Ausdrückungen die veränderlichen Größen x, x', x'', etc. von den veränderlichen Größen y, y', y'', etc. getrennt sind, und daß beide darin auf einerley Art vorkommen; woraus man sogleich den Schluß ziehen kann, daß man 2 Systeme von Differentialgleichungen haben wird, die unabhängig von einander und einander ähnlich sind, das eine zwischen x, x', x'', etc. und das andere zwischen

Digitized by Google

zwischen y, y′, y″, etc.; so daß man nur eins dieser Systeme zu betrachten hat; ja man braucht auch dies nicht einmal zu thun, denn man erhält sogleich für die endliche Werthe von x, x′, x″, etc. Ausdrückungen, die so beschaffen sind, wie die von ξ, ψ, φ, etc. (10), und die Werthe von y, y′ y″, etc. werden ebenfals von derselben Form und nur durch willkührliche beständige Größen von einander verschieden seyn.

Der Ausdruck von V, worin der veränderliche Theil aus lauter positiven Quadraten besteht, zeigt sogleich, daß die Werthe von x, x′, x″, etc. und von y, y′, y″, etc. keine Zirkelbogen, sondern nur reelle Sinus und Cosinus enthalten können, so daß die Körper um die Vertikallinie nur kleine Oscillationen machen können, sowie wir allgemein (14) erwiesen haben. Man überzeugt sich auf diese Art davon, daß die Werthe der Coefficienten √K, f, g, h, etc., alle reel sind, und man hat sie nur nach den Methoden (13) zu bestimmen. Weil nun die Werthe für die Ausdrücke von x, x′, x″, etc. und von y, y′, y″, etc. einerley sind; so hat man nur auf die ersten dieser veränderlichen Größen bey der Bildung der Größen A und B zu sehen. Man verwandle daher in T und V die Größen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dx''}{dt}$, etc., sowie auch x, x′, x″, etc. in e, f, g, etc.; so bekommt man nach Wegwerfung aller andern Glieder:

$$A = m\frac{e^2}{2} + m'\frac{f^2}{2} + m''\frac{g^2}{2}, \text{ etc.}$$

$$B = \pi(m + m' + m'' \text{ etc.})\frac{e^2}{2r} +$$

$$\pi(m' + m'' + \text{etc.})\frac{(f-e)^2}{2r'} +$$

$$\pi(m'' + \text{etc.})\frac{(g-f)^2}{2r''} +$$

etc.,

Digitized by Google

woraus man, wenn man $AK - B = \Delta$,

und hierauf $\frac{d\Delta}{de} = 0$,

$\frac{d\Delta}{df} = 0$,

$\frac{d\Delta}{dg} = 0$,

etc.

setzt, folgende Gleichungen zieht, wo man sich daran erinnern muß, daß $e = 1$ seyn muß:

$$m\,e\,K - \pi(m + m' + m'' + \text{etc.})\frac{e}{r} + \pi(m' + m'' + \text{etc.})\frac{f - e}{r'} = 0,$$

$$m'\,f\,K - \pi(m' + m'' + \text{etc.})\frac{f - e}{r'} + \pi(m'' + \text{etc.})\frac{g - f}{r''} = 0,$$

$$m''\,g\,K - \pi(m'' + \text{etc.})\frac{g - f}{r''} + \pi(m''' + \text{etc.})\frac{h - g}{r'''} = 0,$$

etc.

Die Zahl dieser Gleichungen wird der Zahl der veränderlichen Größen x, x′, x″, etc. d. h. der der Gewichte m, m′, m″, etc., die am Faden festgemacht sind, und folglich der Zahl der Größen e, f, g, etc. gleich seyn, so daß, weil $e = 1$, allezeit eine Gleichung zur Bestimmung von K übrig bleiben wird. Setzt man also zuerst $e = 1$; so giebt die erste Gleichung f, die zweite g, etc. in vielmahligen von K vom ersten, zweiten, etc. Grade, und die letzte enthält nur K und wird von einerley Grad mit diesem seyn.

Man

Digitized by Google

Man erleichtert sich aber diese Bestimmung, wenn man von der letzten Gleichung anfängt, und nach und nach zu denen steigt, die dieser vorhergehn. In dieser Absicht wollen wir durch μ, μ', μ'', etc., ρ, ρ', ρ'', etc., a, a', a'', etc. Die Größen m, m', m'', etc., r, r', r'', etc., e, f, g, etc., verkehrt genommen bezeichnen, und die ebenfals verkehrt genommene Gleichungen werden seyn:

$$\mu a K - \pi\mu \frac{a - a'}{\rho} = o,$$

$$\mu' a' K - \pi(\mu + \mu') \frac{a' - a''}{\rho'} + \pi\mu \frac{a - a'}{\rho} = o,$$

$$\mu'' a'' K - \pi(\mu + \mu' + \mu'') \frac{a'' - a'''}{\rho''} + \pi(\mu + \mu') \frac{a' - a''}{\rho'} = o,$$

etc.

Nennen wir nun n die Zahl der Gewichte, so hat man $a^n - r = e = 1$, ferner sieht man aus der ersten der obigen Gleichungen, welche hier die letzte ist, daß das Glied, das in der Reihe e, f, g, etc. dem e vorhergeht, = o seyn muß. Man muß also $a^n = o$ machen, und diese Bedingung giebt die Gleichung in K. Denn zieht man nach und nach aus den vorhergehenden Gleichungen die Werthe von a', a'', a''', etc.; so werden sie von dieser Form seyn:

$$a' = (1)\, a,$$

$$a'' = (2)\, a,$$

$$a''' = (3)\, a,$$

etc.

wo (1), (2), (3), etc. die vielnamigen in K vom ersten, zweiten, dritten, u. s. w. Grad andeuten.

Die Bedingung $a^n - r = 1$ giebt also

$(n - 1)\, a = 1$, woraus man zieht:

$a =$

Digitized by Google

$$a = \frac{\varepsilon}{(n-1)};$$

endlich giebt die Bedingung $s^n = 0$,

$$(n) = 0,$$

und dies ist die Gleichung in K, die, wie man schon weiß, lauter wirkliche, positive und ungleiche Wurzeln hat.

Sind die Gewichte alle unter einander gleich, sowie ihre Distanzen von einander auf dem Faden; so hat man

$$\mu = \mu' = \mu'' = \text{etc. und}$$

$$\rho = \rho' = \rho'' = \text{etc.} = r.$$

Setzt man also $\frac{rK}{\pi} = c$; so wird aus den vorigen Gleichungen:

$$a(c-1) + a' = 0,$$

$$a'(c-3) + 2a'' + a = 0,$$

$$a''(c-5) + 3a''' + 2a' = 0,$$

etc.

woraus man zieht:

$$a' = (1)\,a,$$

$$a'' = (2),$$

etc.

wenn man $(1) = 1 - c$,

$$(2) = 1 - 2c + \frac{c^2}{2},$$

$$(3) = 1 - 3c + \frac{3c^2}{2} - \frac{c^3}{2.3},$$

etc.

und

Digitized by Google

und allgemein

$$(q) = 1 - qc + \frac{q(q-1)}{4} c^2 - \frac{q(q-1)(q-2)}{4.9} c^3 + \text{etc.}$$

ſetzt.

Die Gleichung in K wird alſo ſeyn:

$$1 - nrK + \frac{n(n-1)}{4} r^2 K^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{4.9} r^3 K^3 + \text{etc.} = 0;$$

jedoch iſt die allgemeine Auflöſung dieſer Gleichung noch nicht bekannt.

Da übrigens das letzte Glied dieſer Gleichung durch 1, 2, 3 .... n dividirt iſt; ſo erhält ſie, wenn man alles mit dieſer Zahl multiplicirt, und in einer umgekehrten Ordnung ſtellt, dieſe Geſtalt:

$$r^n K^n - n^2 r^{n-1} K^{n-1} + \frac{n^2 (n-1)^2}{2} r^{n-2} K^{n-2} - \frac{n^2 (n-1)^2 (n-2)^2}{2.3} r^{n-3} K^{n-3} + \text{etc.} = 0,$$

welche jedoch nicht leichter aufzulöſen iſt.

36) Wäre der Faden noch über das unterſte Gewicht verlängert, gienge hierauf in einen in der Vertikallinie befindlichen Ring; und erhielte noch ein Gewicht M, das an ſeinem Ende befeſtigt iſt, und ſo zu ſagen dazu diente, ihn auszuſpannen; ſo hätte man nur zu den Ausdrückungen von T und V die zu der Würkung dieſes neuen Gewichts gehörige Glieder zu addiren. Dieſes Gewicht aber kann der Natur der Aufgabe gemäß nur ſteigen oder fallen, indem es immer in derſelben Vertikallinie bleibt, die wir für die Achſe der z annehmen, es iſt folglich klar, daß wenn wir ξ ſeine Diſtanz von dem feſten Punkte nennen, den wir für den Mittelpunkt der Coordinaten angenommen haben, man nur zu T das Glied $M \frac{d\xi^2}{2dt^2}$

Digitized by Google

und zu V das Glied $-\pi M \xi$ (27) zu addiren, und ζ in Funktionen von x, y, x', y', etc. auszudrücken hat.

Man hat daher nur den Ring und das Gewicht M als 2 neue am Faden befestigte Gewichte zu betrachten, wovon aber das erste der Länge des Fadens nach herabrütschen kann, indem es immer in derselben Distanz r vom festen Punkt des Fadens und in derselben Vertikallinie bleibt. Alsdenn werden γ und ξ die beiden letztern Glieder der Reihe z, z', z'', etc. seyn, und folglich auch durch die nämlichen Formeln ausgedrückt werden, indem die correspondirenden Glieder in den Reihen x, x', x'', etc., y, y', y'', etc. $= o$ seyn müssen.

Man erhält auf diese Art:

$$\gamma = r + r' + r'' + \text{etc.} + r^n - \frac{x^2 + y^2}{2r}$$
$$- \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2r'}$$
$$- \frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{2r''}$$
$$- \text{etc.}$$
$$- \frac{(x^n - \quad)^2 + (y^n - \quad)^2}{2r^n},$$

$$\zeta = r + r' + r'' + \text{etc.} + r^{n+1} - \frac{x^2 + y^2}{2r}$$
$$- \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2r'}$$
$$- \frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{2r''}$$
$$- \text{etc.}$$

Digitized by Google

$$- \frac{(x^n - 1)^2 + (y^n - 1)^2}{2r^n},$$

(wo, wie man sieht, die Exponenten n — 1 und n das vielfache und nicht Potenzen bedeuten,) wo n die Zahl der am Faden zwischen dem Aufhängepunkt, und dem Ringe befestigten Gewichte ist. Es ist aber $r + r' + r'' + \text{etc.} + r^n + 1$ die Länge des ganzen Fadens vom festen Punkte an bis zum Gewichte M, welche gegeben und folglich beständig ist, und die wir durch b bezeichnen wollen, und $r + r' + r'' + \text{etc.} + r^n - 1$ ist die Länge des Fadens vom Aufhängepunkt bis zum letzten der Gewichte $m, m', \text{etc.}\ m^n - 1$, welche auch gegeben ist, und die wir durch λ bezeichnen wollen. Die erstere Gleichung giebt daher den Werth von r^n, welches der Theil des Fadens ist, der zwischen dem Gewichte $m^n - 1$ und dem Ringe ist, und dieser Werth wird bis auf die sehr geringen Größen vom zweiten Grade $= \gamma - \lambda$ seyn.

Man erhält also auf diese Art:

$$\zeta = b - \frac{x^2 + y^2}{2r} - \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2r'}$$

$$- \frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{2r''} - \text{etc.}$$

$$- \frac{(x^n - 1)^2 + (y^n - 1)^2}{2(\gamma - \lambda)}.$$

Weil man nun in T und V die sehr kleinen Glieder, die geringer als von der zweiten Ordnung sind, hindansetzt; so ist klar, daß die zu T zu addirende Größe $M \frac{d\zeta^2}{2dt^2} = 0$ seyn wird, so daß der Werth von T und folglich auch der davon abgeleitete von A mit dem im vorhergehenden Artikel einerley bleiben wird. Was nun den Werth von V betrifft, wozu man die Größe $- \pi M \zeta$ addiren muß; so hat man zur die Coefficien-

ten von $\frac{x^2 + y^2}{2r}$, $\frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2r'}$, etc. in dem Ausdruck von V (35) um πM zu vermehren, und dazu noch die Glieder $-\pi M l + \pi M \frac{(x^n - 1)^2 + (y^n - 1)^2}{2(\gamma - \lambda)}$ zu addiren.

Hiedurch wird die Größe B, wenn man i das letzte Glied der Reihe e, f, g, etc. nennt:

$$B = \pi (M + m + m' + m'' + \text{etc.}) \frac{e^2}{2r}$$
$$+ \pi (M + m + m'' + \text{etc.}) \frac{(f - e)^2}{2r'}$$
$$+ \pi (M + m'' + \text{etc.}) \frac{(g - f)^2}{2r''}$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ \pi M \frac{i^2}{2(\gamma - \lambda)}.$$

Bezeichnen wir nun wie oben durch μ, μ', μ'', etc. ρ, ρ', ρ'', etc., e, f, g, etc., a, a', a'', etc., die Größen m, m', m'', etc., ρ ρ' ρ'' etc. e, f, g, etc., i verkehrt genommen; so ist klar, daß die durch diese Größen ausgedrückte Werthe von A und B seyn werden:

$$A = \mu \frac{a^2}{2} + \mu' \frac{a'^2}{2} + m'' \frac{a''^2}{2} + \text{etc.}$$

$$B = \pi M \frac{a^{n\prime}}{2(\gamma - \lambda)} + \pi (M + \mu) \frac{(a - a')^2}{2\rho} +$$
$$\pi (M + \mu + \mu') \frac{(a' - a'')^2}{2\rho'} + \text{etc.}$$

Die

Digitized by Google

Die Gleichungen zwischen a, a', etc. werden also seyn:

$$\frac{d\Delta}{da} = 0, \quad \frac{d\Delta}{da'} = 0, \text{ etc.}$$

wenn $\Delta = Ak - B$, oder

$$\mu a K - \pi M \frac{a}{\gamma - \lambda} - \pi (M + \mu) \frac{a - a'}{\rho} = 0$$

$$\mu' a' K + \pi (M + \mu) \frac{a - a'}{\rho} - \pi (M + \mu + \mu') \frac{a' - a''}{\rho'} = 0.$$

$$\mu'' a'' K + \pi (M + \mu' + \mu'') \frac{a' - a''}{\rho'} - \pi (M + \mu + \mu' + \mu'') \frac{a'' - a'''}{\rho''} = 0$$

etc.

wo $a^{n-1} = 1$ und $a^n = 0$ seyn muß.

Um diese Gleichungen aufzulösen verfährt man eben so wie im vorhergehenden Artikel, und man hat alsdenn nur die in den allgemeinen Formeln (10) gefundenen Werthe zu substituiren. Da aber diese Gleichungen noch verwickelter als jene sind, so wird man wohl zu keiner allgemeinen Auflösung zu gelangen im Stande seyn, wenn man nicht das Gewicht M, das den Faden unendlich stärker ausdehnt, als alle Gewichte m, m', etc., womit der Faden belästigt ist, annimmt. In diesem Falle lassen sich die Gleichungen auf eine einfachere Form bringen, als:

$$\mu a K - \pi M \left(\frac{a}{\gamma - \lambda} + \frac{a - a'}{\rho} \right) = 0,$$

$$\mu' a' K + \pi M \left(\frac{a - a'}{\rho} - \frac{a' - a''}{\rho'} \right) = 0,$$

$$\mu'' a'' K + \pi M \left(\frac{a' - a''}{\rho'} - \frac{a'' - a'''}{\rho''} \right) = 0,$$

etc.

Digitized by Google

Seßen wir nun die Distanzen ρ, ρ', ρ'', etc. zwischen den gleichen Gewichten ebenfals gleich, sowie die Gewichte μ, μ', μ'', etc. und machen $\frac{u}{\pi M} \rho K = c$; so erhält man:

$$a\left(c - 1 - \frac{p}{\gamma - \lambda}\right) + a' = 0 \quad \text{(I)}$$

$$a'(c - 2) + a + a'' = 0 \quad \text{(II)}$$

$$a''(c - 2) + a' + a''' = 0 \quad \text{(III)}$$

etc.

wo man sieht, daß die Größen a', a'', a''', etc. eine zurücklaufende Reihe ausmachen, deren allgemeines Glied a^{ν} von der Form $A\alpha^{\nu} + B\beta^{\nu}$ seyn wird, wenn wir α und β die beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + (c - 2)x + 1 = 0 \text{ nennen.}$$

Es sey $1 - \frac{c}{2} = \text{Cos}\,\omega$ so werden die beiden Wurzeln der Gleichung seyn:

$$\text{Cos}\,\omega \pm \text{sin}\,\omega \sqrt{-1}$$

und wenn man die beständigen A, B Größen in andere C, D verwandelt; so hat man

$$a_{\nu} = C\,\text{Cos}\,\nu\omega + D\,\text{sin}\,\nu\omega \text{ oder auch}$$

$$a_{\nu} = E\,\text{sin}\,(\nu\omega + \varepsilon),$$

wo E und ε 2 unbestimmte beständige Größen sind. Dieser Ausdruck muß zuerst der ersten Gleichung genug thun, die eine von den andern verschiedene Form hat.

Seßt man daher $\nu = 0$, und $\nu = 1$ so erhält man

$$a = E\,\text{sin}\,\varepsilon,$$

$$a' = E\,\text{sin}\,(\omega + \varepsilon),$$

und

Digitized by Google

und da $c = 2 - 2 \operatorname{Cof} \omega$,

so wird die erstere Gleichung (I)

$$(E \operatorname{sin} s \left(2 - 2 \operatorname{Cof} \omega - 1 - \frac{\rho}{\gamma - \lambda} \right) + E \operatorname{sin} (\omega + s) = 0,$$

oder wenn man mit E alles dividirt und abkürzt. M.)

$$\left[1 - \frac{\rho}{\gamma - \lambda} - 2 \operatorname{Cof} \omega \right] \operatorname{sin} s + \operatorname{sin} (\omega + s) = 0,$$

woraus man zieht

$$(\operatorname{sin} s \left[1 - \frac{\rho}{\gamma - \lambda} - 2 \operatorname{Cof} \omega \right] + \operatorname{sin} \omega \operatorname{Cof} s + \operatorname{sin} s \operatorname{Cof} \omega = 0,$$

$$\text{oder } \frac{\operatorname{sin} s}{\operatorname{Cof} s} \left[1 - \frac{\rho}{\gamma - \lambda} - 2 \operatorname{Cof} \omega + \operatorname{Cof} \omega \right] + \operatorname{sin} \omega = 0,$$

$$\text{d. h. } \operatorname{tang} s \left[\operatorname{Cof} \omega - 1 + \frac{\rho}{\gamma - \lambda} \right] = \operatorname{sin} \omega,$$

und folglich M.)

$$\operatorname{tang} s = \frac{\operatorname{sin} \omega}{\operatorname{Cof} \omega - 1 + \frac{\rho}{\gamma - \lambda}}.$$

Man muß hierauf $v^{n-1} = 1$ und $v^n = 0$ seßen, folglich

$$E \operatorname{sin} ((n-1)\omega \pm s) = 1,$$

$$E \operatorname{sin} (n\omega + s) = 0,$$

woraus man zieht:

$$E = \frac{1}{\operatorname{sin} ((n-1)\omega + s)} \text{ und}$$

$$n\omega + s = 180^\circ . s,$$

wo s eine gewisse ganze Zahl ist.

Diese

Diese letztere Gleichung wird dazu dienen ω zu bestimmen, welches folglich immer ein würklicher Winkel seyn wird, und setzt man nach und nach

$$s = 0, 1, 2, \text{ etc. } n - 1,$$

so erhält man n verschiedene Werthe von ω, die die n Wurzeln von K durch die Formeln:

$$K = \frac{cM}{\mu\rho},$$

$$c = 2 - 2\,\text{Col}\,\omega = 4\sin^2\frac{\omega}{2} \text{ geben.}$$

Setzte man $s > n$; so würde man wieder die nämlichen Werthe von c finden. Es ist folglich alles bestimmt, und man hat in diesem Fall noch den Vortheil allgemeine Ausdrücke sowohl für K als für a, a′, a″, etc. d. h. für die Coefficienten f, g, etc. $= a^{n-2}$, a^{n-3}, etc. zu erhalten.

Diese Auflösung aber wird noch einfacher, wenn man $\rho = \gamma - \lambda$ setzt, d. h. wenn der zwischen den letztern Gewichten m, m′, m″, etc. und dem festen Ringe enthaltene Theil des Fadens dem gemeinschaftlichen Zwischenraum ρ eben dieser Gewichte gleich ist, welches statt hat, wenn alle Gewichte den Theil des Fadens, der zwischen dem festen Punkte und dem Ringe ist, in gleiche Theile theilen. In diesem Falle hat man:

$$\text{tang}\,s = \text{tang}\,\omega, \text{ und folglich } s = \omega;$$

$$\text{folglich } \omega = \frac{180^\circ . s}{n + 1}, \text{ und}$$

$$a_\nu = \frac{\sin(\nu + 1)\omega}{\sin n\omega},$$

oder (weil $(n + 1)\omega = 180^\circ . s$)

$$a_\nu = \frac{\sin(n - \nu)\omega}{\sin\omega},$$

und

Digitized by Google

und $f = \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega}$,

$g = \frac{\sin 3\omega}{\sin \omega}$,

etc.

Dieser letztere Fall ist der von einer oscillirenden Chorde, die durch eine gewisse Zahl n von kleinen einander gleichen, und in gleichen Entfernungen von einander befindlichen Gewichten beschwert ist, und die, indem sie an dem einen Ende fest ist, durch eine Kraft M ausgedehnt ist, die am andern Ende würkt; es mag nun diese Kraft von einem am Faden befestigten Gewichte, oder von einer andern Ursache, oder von der Elasticität des Fadens, der als der Ausdehnung und Zusammenziehung fähig angenommen worden ist, herkommen. Auch stimmt die aus den vorhergehenden Formeln entspringende Auflösung vollkommen mit derjenigen überein, worauf wir an einem andern Ort durch eine verschiedene Analyse gekommen sind.

37) Was wir eben von der Einerleyheit der Würkungen der Spannung, die durch ein Gewicht, und derjenigen, die durch die Elasticität des Fadens selbst hervorgebracht wird, gesagt haben, scheint an sich offenbar genug, wenigstens so lange die Oscillationen sehr gering sind. Da inzwischen die Aufgabe von der Bewegung eines undehnbaren Fadens ihrer Natur nach von derjenigen, wo Oscillationen eines dehnbaren und elastischen Fadens statt finden, verschieden ist; so wollen wir auch die direkte Auflösung dieses letztern Falls geben.

Man hat hier keiner Bedingungsgleichung genug zu thun, aber man muß auf die elastische Kraft des Fadens Rücksicht nehmen, deren Würkung in der Verkürzung jedes Theils r, r′, r″, etc. besteht. Es seyen daher R, R′, R″, etc. die respektiven Elasticitäten des Fadens r, r′, r″, etc. die die verschiedenen Körper verbinden, welche Elasticitäten die Linien r, r′, r″, etc. zu verkleinern streben, und die man sich durch Funktionen eben

Digitized by Google

dieſer Linien ausgedrückt vorſtellen kann. Alsdenn entſtehen in dem Werthe von V die neuen Glieder

$$\int E\,dr + \int E'\,dr' + \int E''\,dr'' + \text{etc.},$$

und man hat darin nur ſtatt r, r', r'', etc. ihre Werthe in x, y, z, x', y', etc. zu ſubſtituiren, und hierauf alle dieſe Coordinaten als unabhängige veränderliche Größen zu behandlen.

In dem Fall alſo, wo der Faden im Anfang der Coordinaten feſt, und durch die Gewichte πm, $\pi m'$, $\pi m''$, etc. beſchwert iſt, hat man überhaupt:

$$T = m\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2} + m'\,\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{2\,dt^2} + \text{etc.},$$

$$V = -\pi m z - \pi m' z' - \text{etc.} + \int R\,dr + \int R'\,dr' + \text{etc.};$$

folglich

$$\delta V = -\pi\,(m\,\delta z + m'\,\delta z' + \text{etc.}) + R\,\delta r + R'\,\delta r' + \text{etc.}$$

Man hat hier nur ſtatt δr, $\delta r'$ ihre aus den Formeln

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$r' = \sqrt{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2)}$$

etc.;

gezogene Werthe zu ſubſtituiren; alsdenn wird jeder der veränderlichen Größen x, y, etc. eine Differentialgleichung von der allgemeinen Form:

$$d.\,\frac{\delta T}{\delta dx} - \frac{\delta T}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta x} = \rho \text{ geben.}$$

In dem Falle, wo die Körper ſich ſehr wenig von der Vertikallinie, die hier die Achſe der Coordinaten z iſt, entfernen, ſind die Werthe der andern Coordinaten x, y, x', y', etc. ſehr gering, und die der Größen r, r', etc., z, z', etc. ſind ſehr wenig davon unterſchieden, was ſie im Zuſtande des Gleichgewichts ſind, wo x, y, x', y', etc. = o ſind.

Geſetzt

Digitized by Google

Gesetzt man hätte in diesem Falle $r = p$, $r' = p'$, $r'' = p''$, etc.;
$z = q$, $z' = q'$, $z'' = q''$, etc.
und es sey allgemein $r = p + \rho$, $r' = p' + \rho'$, etc.
$z = q + \zeta$, $z' = q' + \zeta'$, etc.
so hat man $p = q$, $p' = q' - q$, $p'' = q'' - q'$, etc.,
und $p + \rho = \sqrt{(x^2 + y^2 + (q + \zeta)^2)}$,
$p' + \rho' = \sqrt{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + q' - q + \zeta' - \zeta)^2)}$,
etc.

woraus man, wenn man die Dimensionen der sehr geringen Größen x, y, ζ, x', y', etc., die sich über den zweiten Grad erstrecken, vernachlässigt, zieht:

$$\rho = \zeta + \frac{x^2 + y^2}{2p},$$

$$\rho' = \zeta' - \zeta + \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2p'},$$

$$\rho'' = \zeta'' - \zeta' + \frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{2p''},$$

etc.

Es seyen jetzt P, P', etc. die Werthe von R, R', etc., wenn r, r', etc. $= p$, p', etc. d. h. die Elasticitäten der Faden, wenn ihre Längen auf p, p', etc. gebracht sind. Man hat alsdenn nach den bekannten Formeln, wenn man $p + \rho$ statt r substituirt:

$$\int R\,dr = \int P\,dp + P\rho + \frac{dP}{2\,dp}\rho^2 + \text{etc.};$$

und eben so verhält es sich mit den andern Funktionen $\int R'dr'$, etc. Verrichtet man also diese Substitutionen, und läßt die Glieder, worin die sehr geringen Größen über den zweiten Grad steigen, aus; so erhält man:

Digitized by Google

$$T = m\frac{dx^2 + dy^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2} + m'\frac{dx'^2 + dy'^2 + d\zeta'^2}{2\,dt^2}$$

$$+ m''\frac{dx''^2 + dy''^2 + d\zeta''^2}{2\,dt^2} + \text{etc.}$$

$$V = \int P\,dp - \pi m q + \int P'\,dp' - \pi m' q' + \int P''\,dp'' - \pi m'' q'' + \text{etc.}$$

$$+ (P - \pi m)\zeta + P'(\zeta' - \zeta) - \pi m'\zeta' + P''(\zeta'' - \zeta')$$

$$- \pi m''\zeta'' + \text{etc.}$$

$$+ P\frac{x^2 + y^2}{2p} + \frac{dP}{2dp}\zeta^2 + P'\frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2p'}$$

$$+ \frac{dP'}{2dp'}(\zeta' - \zeta)^2$$

$$+ P''\frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{2p''} + \frac{dP''}{2dp''}(\zeta'' - \zeta')^2 + \text{etc.}$$

Damit nun in der Stellung, worin die sehr geringen Größen x, y, ζ, x', y', etc. = o sind, das Gleichgewicht statt finde, so müssen nach (9) die ersten Dimensionen dieser Größen in dem Werthe von V verschwinden. Setzt man also die Coefficienten von ζ, ζ', ζ'', etc. = o; so erhält man die Gleichungen:

$$P - \pi m - P' = o,$$

$$P' - \pi m' - P'' = o,$$

$$P'' - \pi m'' - P''' = o,$$

etc.

woraus man zieht

$$P' = P - \pi m,$$

$$P'' = P - \pi(m + m'),$$

$$P''' = P - \pi(m + m' + m''),$$

etc.

Ver-

Digitized by Google

Vergleicht man nun diese Ausdrückungen von T und V mit denen (36); so sieht man, daß sie von einerley Form sind, wenigstens in Ansehung des Theils, der die veränderlichen Größen x, y, x′, y′, etc. enthält, und daß sie völlig einerley werden, wenn man $P = \pi (M + m + m' + m'' + \text{etc})$ macht, so daß die Werthe dieser veränderlichen Größen in beiden Aufgaben nothwendig einerley seyn werden. Was nun die andern veränderlichen Größen ζ, ζ′, etc. betrifft; so werden sie ähnliche Werthe haben, wenn man nur die Größen

$$\frac{P}{p}, \quad \frac{P'}{p'}, \quad \text{etc. in} \quad \frac{dP'}{dp}, \quad \frac{dP'}{dp'}, \quad \text{etc.}$$

verwandelt, wie man dies anfänglich bey den vorhergehenden Ausdrückungen von T und V gesehn hat. Wir wollen uns also nicht länger bey dieser Aufgabe verweilen.

38) Die Fälle, die wir eben betrachtet haben, sind alle vollkommener Auflösungen fähig, indem die Voraussetzung der sehr geringen Bewegungen die Differentialgleichungen nur linear und folglich integrabel macht, wie wir (2) gesehn haben. Jedoch können hier Umstände statt finden, die die Vortheile dieser Voraussetzung zu nichte machen. Wäre z. B. der Faden an seinen beiden Enden fest, und zugleich undehnbar, und der Zusammenziehung unfähig, oder wären die Körper durch gerade Stangen unter einander verbunden, die durch Bänder an einander befestigt wären, so daß die erstere und letztere sich um 2 feste Punkte drehen müßte, alsdenn hätte man, wenn man immer annähme, die Körper entfernten sich sehr wenig von der Vertikallinie, für T und V die nämlichen Werthe als (35), jedoch mit dem Unterschied, daß die veränderlichen Größen x, y, x′, etc., da sie vorhin völlig unabhängig von einander waren, der aus der Bedingung, daß das unterste Ende des Fadens auch fest sey, entspringenden Gleichung genug thun müßten. Nennt man daher γ die vertikale Distanz zwischen diesem festen Punkt und dem obern festen Punkte; so erhält man wie (36)

Digitized by Google

$$y = r + r' + r'' + \text{etc.} + r^n - \frac{x^2 + y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}{2r'}$$

$$- \frac{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}{2r''} - \text{etc.} - \frac{(x^n-1)^2 + (y^n-1)^2}{2r^n}$$

Es sind aber die Größen r, r', r'', etc. r^n insgesammt gegeben, indem sie die Längen der verschiedenen Fäden oder Stangen sind, die die Körper verbinden, und ihre Summe $r + r' + r'' + \text{etc.} + r^n$ drückt die ganze Länge des Fadens zwischen diesen beiden festen Punkten aus: $r + r' + r'' + \text{etc.} + r^n - y$ ist folglich der Ueberschuß der Länge des Fadens über den ihm entsprechenden Theil der Achse. Nennt man daher c^2 diesen Ueberschuß, der bekannt ist, so hat man die Gleichung:

$$c^2 = \frac{x^2 + y^2}{2r} + \frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}{2r'} +$$

$$\frac{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}{2r''} + \text{etc.} +$$

$$\frac{(x^n-1)^2 + (y^n-1)^2}{2r^n}$$

wo, wie man sieht, die veränderlichen Größen überall von 2 Dimensionen sind, so daß es unmöglich ist irgend eine zu bestimmen, ohne die Wurzeln auszuziehen.

Man hat also hier den Fall, wovon wir (16) allgemein geredet haben, und der durch die allgemeine Methode für die Bestimmung sehr geringer Bewegungen nicht kann aufgelößt werden; welches um so mehr besonders ist, da, wenn man die Faden oder Stangen nur sehr wenig ausdehnbar, und der Zusammenziehung fähig annimmt, die Aufgabe vollkommen aufgelößt werden kann. Dies ist eine merkwürdige Bemerkung, die noch nicht gemacht worden ist.

Um

Digitized by Google

Um diese Wahrheit noch in ein helleres Licht zu setzen; so wollen wir den vorhergehenden Fall unter der Voraussetzung auflösen, daß nur 2 am Faden befestigte Gewichte m, m' vorhanden seyen, und daß die Bewegungen in einer Ebene vorgiengen. Man hat alsdenn nur 2 veränderliche Größen x und x' zu bestimmen, indem alle andere (per hyp) = 0 sind.

Die Bedingungsgleichung ist also in diesem Falle

$$c^2 = \frac{x^2}{2r} + \frac{(x'-x)^2}{2r'} + \frac{x'^2}{2r''}, \quad (A)$$

und die Werthe von T und V sind wie (35)

$$T = m\frac{dx^2}{2dt^2} + m'\frac{dx'^2}{2dt^2},$$

$$V = \pi - (m+m')r - \pi m'r' + \pi(m+m')\frac{x^2}{2r} + \pi m'\frac{(x'-x)^2}{2r'}.$$

Um mehrerer Leichtigkeit willen kann man sich des allgemeinen Integrals T + V = Const. bedienen, welches auch in diesem Falle statt findet, indem die Bedingungsgleichung kein t (4) enthält. Man erhält daher:

$$m\frac{dx^2}{2dt^2} + m'\frac{dx'^2}{2dt^2} + \pi(m+m')\frac{x^2}{2r} + \pi m'\frac{(x'-x)^2}{2r'} = b^2 \quad (B)$$

wo b eine willkührliche beständige Größe ist. Diese Gleichung nun mit der obigen Bedingungsgleichung verbunden, dient dazu x und x' zu bestimmen.

Wir wollen nur mehrerer Einfachheit willen die beiden Gewichte m, m' einander gleich setzen, so wie auch die Längen r, r', r'' der 3 Stangen und $\pi = 1$, ferner aber

$$x = \xi \sin\varphi, \quad x' = \xi \cos\varphi$$

Digitized by Google

alsdenn giebt die Bedingungsgleichung (A):

$$\left(C^2 = \frac{\xi^2 \sin^2\varphi}{2r} + \frac{\xi^2 \cos^2\varphi}{2r} + \frac{(\xi\cos\varphi - \xi\sin\varphi)^2}{2r}\right.$$

oder wenn man die ganze Gleichung mit $2r$ multiplicirt und mit ξ^2 dividirt

$$\frac{2rc^2}{\xi^2} = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi + (\cos\varphi - \sin\varphi)^2$$

Aber $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

und $(\cos\varphi - \sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi$

folglich

$$\frac{2rc^2}{\xi^2} = 2 - 2\cos\varphi\sin\varphi \text{ oder M.}\Big)$$

$$\frac{rc^2}{\xi^2} = 1 - \cos\varphi\sin\varphi = 1 - \frac{\sin 2\varphi}{2}, \quad (C)$$

und die Differentialgleichung (B) wird:

$$\left(m\frac{\xi^2 d\varphi^2 \cos^2\varphi}{2dt^2} + m\frac{\xi^2 d\varphi^2 \sin^2\varphi}{2dt^2} + 2m\frac{\xi^2\sin^2\varphi}{2r} + \right.$$

$$m\frac{(\xi\cos\varphi - \xi\sin\varphi)^2}{2r} = b^2$$

oder wenn man mit $2r$ überall multiplicirt und mit $m\xi^2$ dividirt

$$r\frac{d\varphi^2}{dt^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + 2\sin^2\varphi + (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 = \frac{2rb^2}{m\xi^2}$$

d. h. M.)

Digitized by Google

$$r\frac{d\varphi^2}{dt^2} + 2\sin^2\varphi + (\mathrm{Cof}\,\varphi - \sin\varphi)^2 = \frac{2rb^2}{m\xi^2}$$

Hieraus zieht man

$$\left(dt = \frac{d\varphi\sqrt{r}}{\sqrt{\left[\frac{2rb^2}{m\xi^2} - 2\sin^2\varphi - (\mathrm{Cof}\,\varphi - \sin\varphi)^2\right]}}\right.$$

Aber aus (C) findet man $\xi^2 = \frac{2rc^2}{2 - \sin 2\varphi}$ M.$\Big)$

den Werth von ξ^2 substituirt:

$$\left(dt = \frac{d\varphi\sqrt{r}}{\sqrt{\left[\frac{b^2}{mc^2}(2 - \sin 2\varphi) - 2\sin^2\varphi - (\mathrm{Cof}\,\varphi - \sin\varphi)^2\right]}}\right.$$

$$= \frac{d\varphi\sqrt{r}}{\sqrt{\left[\frac{b^2}{mc^2}(2 - \sin 2\varphi) - 3\sin^2\varphi - \mathrm{Cof}^2\varphi + 2\sin\varphi\,\mathrm{Cof}\,\varphi\right]}}\ \text{M.}\Big)$$

$$= \frac{d\varphi\sqrt{r}}{\sqrt{\left[\left(\frac{b^2}{mc^2} - 1\right)(2 - \sin 2\varphi) + \mathrm{Cof}\,2\varphi\right]}}$$

von welcher Differentialgröße das Integral von der Rektification der Kegelschnitte abhängt, so daß also auch in dem einfachsten Falle diese Aufgabe von einer höhern Ordnung als die logarithmischen und Zirkelfunktionen ist.

Digitized by Google

39) Wir wollen die Voraussetzung, daß die Körper durch gerade und unbeugsame Stangen verbunden sind, beybehalten, und uns vorstellen, die Bänder, die diese Stangen an einander befestigen, seyen elastisch, d. h. sie hätten Kräfte, wodurch sie alle diese Seiten des Polygons mit einander in gerader Linie zu stellen sich bestreben; alsdenn hat man nur in dem Werthe von V die aus diesen verschiedenen Kräften, deren Würkung in der Verringerung der Berührungswinkel des Polygons besteht, entspringende Glieder einzuführen.

Es seyen E, E′, E″, etc. die elastischen Kräfte, die in den Winkeln oder an den Orten, wo die Stangen r und r′, r′ und r″, r″ und r‴, etc. mit einander verbunden sind, und wo die Körper m, m′, m″, etc. ihre Stellung haben, würken; ferner seyen e, e′, e″, etc. die Complemente dieser Winkel zu 180° d h. die Berührungswinkel des Polygons, dessen auf einander folgende Seiten r, r′, r″, etc. sind.

Alsdenn werden die zu V zu addirenden Glieder seyn:

$$\int E\,de + \int E'\,de' + \int E''\,de'' + \text{etc.}$$

wenn man, wie allezeit geschehen kann, E, E′, E″, etc. als gegebene Funktionen von e, e′, e″, etc. ansieht. Man bestimmt diese Winkel in Funktionen der Coordinaten, wie wir (1 Theil 5 Abschn. §. 2.) gethan haben. Denn es ist klar, daß wenn man sich eine gerade Linie p vorstellt, die die Enden der beiden Seiten r und r′, die einen Winkel einschliessen, mit einander verbindet, man ein Dreyeck erhält, dessen 3 Seiten r, r′, p sind, und darin 180° — e der der Seite p entgegengesetzte Winkel ist; folglich hat man auch $\text{Cos}\, e = -\frac{r^2 + r'^2 - p^2}{2rr'}$;

und eben so $\text{Cos}\, e' = -\frac{r'^2 + r''^2 - p'^2}{2r'r''}$, wenn man p′ für die 3te Seite des Dreyecks annimmt, dessen beiden andern Seiten r′ und r″ sind u. s. f.

Ferner

Digitized by Google

Ferner sieht man leicht, daß man hat

$$p = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)},$$

$$p' = \sqrt{[(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2]},$$

$$p'' = \sqrt{[(x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2 (z''' - z'')^2]},$$

etc.

folglich, da

$$r = \sqrt{[(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$r' = \sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]},$$

$$r'' = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]},$$

etc.

$$\text{Col } e = \frac{x(x' - x) + y(y' - y) + z(z' - z)}{r\,r'},$$

$$\text{Col } e' = \frac{(x' - x)(x'' - x') + (y' - y)(y'' - y') + (z' - z)(z'' - z')}{r'\,r''},$$

$$\text{Col } e'' = \frac{(x'' - x')(x''' - x'') + (y'' - y')(y''' - y'') + (z'' - z')(z''' - z'')}{r''\,r'''},$$

etc.

Man setzt gemeiniglich voraus, daß die elastische Kraft bey elastischen Blechen dem Berührungswinkel selbst proportional ist, man kann sie aber auf gleiche Art dem Sinus dieses Winkels proportional annehmen, weil bey unendlich kleinen Winkeln der Sinus mit dem Winkel selbst zusammenfällt; diese Voraussetzung scheint auch mehr der Art angemessen zu seyn, nach der man sich vorstellen kann, daß die elastische Kraft bey

Digitized by Google

der Krümmung der elastischen Bleche hervorgebracht wird. Es mag dies nun seyn wie es will; so erhält man, wenn man setzt:

$$E = H \sin e,$$

$$E' = H \sin e',$$

$$E'' = H \sin e'',$$

etc.

wo A einen beständigen Coefficienten bedeutet,

$$\int E\,de = H(1 - \mathrm{Cos}\, e),$$

$$\int E'de' = H(1 - \mathrm{Cos}\, e'),$$

etc.

wo man nur für e, Cos e, Cos e', etc. die vorhergehenden Werthe zu substituiren, und hernach wie gewöhnlich zu verfahren hat.

Sind die Coordinaten x, x', x'', etc. y, y', y'', etc. sehr klein, wie wir (35 sq.) angenommen haben; so hat man nach eben diesem Artikel:

$$z = r - \frac{x^2 + y^2}{2r},$$

$$z' - z = r - \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2r'},$$

$$z'' - z' = r'' - \frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{2r''},$$

etc.

Substituirt man daher diese Werthe in den Ausdrücken von Cos e, Cos e', Cos e'', etc. und vernachlässigt die Glieder, wo x, x', x'', etc., y, y', y'', etc. zusammen höhere Dimensionen als die 2te ausmachen, so erhält man:

Cos

$$\text{Cof } e = 1 - \frac{x^2 + y^2}{2r^2} - \frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}{2r'^2} + \frac{x(x'-x) + y(y'-y)}{rr'},$$

$$\text{Cof } e' = 1 - \frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}{2r'^2} - \frac{(x''-x')^2 + (y''-y')}{2r''^2} + \frac{(x'-x)(x''-x') + (y'-y)(y''-y')}{r'r''},$$

die auf die Elasticität in dem Ausdruck V sich beziehenden Glieder sind also:

$$\frac{K}{2}\left[\left(\frac{x}{r} + \frac{x'-x}{r'}\right)^2 + \left(\frac{y}{r} + \frac{y'-y}{r'}\right)^2\right] +$$

$$\frac{K}{2}\left[\left(\frac{x'-x}{r'} + \frac{x''-x'}{r''}\right)^2 + \left(\frac{y'-y}{r'} + \frac{y''-y'}{r''}\right)^2\right] +$$

$$\frac{K}{2}\left[\left(\frac{x''-x'}{r''} + \frac{x'''-x''}{r'''}\right) + \left(\frac{y''-y'}{r''} + \frac{y'''-y''}{r'''}\right)^2\right] +$$

etc.

Addirt man daher diese Glieder zum Werthe von V (35) und verrichtet sodann den Kalkul auf dieselbe Art; so erhält man die Bewegung eines an einem seiner Enden festen elastischen, und mit einer gewissen Anzahl von Gewichten beschwerten, Fadens.

Alle Aufgaben, die man noch über die Bewegung mehrerer Körper aufwerfen könnte, die durch Faden oder Stangen unter einander verbunden sind, werden allezeit leicht durch die Anwendung unserer allgemeinen Formeln aufgelößt, und wir glauben daher uns nicht länger bey dieser Materie aufhalten zu müssen, da sie im Grunde doch nur zur Befriedigung der Neugierde dient.

Digitized by Google

40) Uebrigens wird die Auflösung dieser Arten von Aufgaben dadurch sehr vereinfacht, wenn man den Faden oder die Stange, die die verschiedenen Körper verbindet, als unbiegsam und von einer gegebenen Figur betrachtet. Man hat alsdann nur solche veränderliche Größen, die von der Bewegung eines Fadens im Raume, und von der Bewegung der Körper der Länge des Fadens nach abhängen; und man erhält die einfachsten Formeln, wenn man durch diese veränderliche Größen selbst die Werthe der Coordinaten ausdrückt, und diese Werthe in die allgemeine Ausdrücke von T und V einführt, denn jede veränderliche Größe giebt allezeit eine Gleichung von der Form:

$$d.\frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0,$$

wie wir oben erwiesen haben.

Um ein sehr einfaches Beyspiel zu geben, wollen wir setzen, eine gerade um einen festen Punkt bewegliche Stange sey von einer beliebigen Anzahl von Gewichten m, m′, m″, etc. beschwert, die entweder fest seyen, oder die Freyheit hätten, der Länge der Stange nach sich zu bewegen. Nehmen wir nun einen festen Punkt für den Anfang der Coordinaten an, und nennen r, r′, r″, etc. die veränderlichen oder beständigen Distanzen der Körper m, m′, m″, etc. von diesem Punkte, und ψ, φ die Winkel, die die Stange mit der horizontalen Ebene der x und y und ihre Projektion auf dieser Ebene mit der Achse der x macht; so ist klar, daß wie (17)

$$x = r \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos}\varphi,$$
$$y = r \operatorname{Cos}\psi \sin\varphi,$$
$$z = r \sin\psi,$$

und daß die andern Coordinaten x′, y′, z′, x″, y″, etc. auf eben die Art ausgedrückt werden, wenn man nur r in r′, r″, etc. verwandelt, indem die Winkel ψ und φ für alle Radien r, r′, etc. einerley sind. Man hat folglich

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2(\operatorname{Cos}^2\psi\, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2$$
$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = r'^2(\operatorname{Cos}^2\psi\, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr'^2$$

etc. wenn

wenn man alle Körper m, m′, etc. auf einmal beweglich annimmt. Nimmt man also auf ihre Schwere oder beständige und vertikale Kraft π Rücksicht; so erhält man (27)

$$T = (mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.}) \cdot \frac{\text{Cos}^2\psi\, d\varphi^2 + d\psi^2}{2\,dt^2}$$

$$+ m\frac{dr^2}{2\,dt^2} + m'\frac{dr'^2}{2\,dt^2} + m''\frac{dr''^2}{2\,dt^2} + \text{etc.},$$

$$V = -\pi(mr + m'r' + m''r'' + \text{etc.})\,\text{sin}\,\psi;$$

und da die veränderlichen Größen r, r′, r″, etc., φ, ψ unabhängig von einander sind; so giebt jede derselben eine Differentialgleichung.

Läßt man nun φ zuerst variiren; so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d.(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})\,\text{Cos}^2\psi\, d\varphi}{dt^2} = 0,$$

deren Integral ist:

$$\frac{(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})\,\text{Cos}^2\psi\, d\varphi}{dt} = A.$$

Läßt man hierauf ψ variiren; so erhält man diese andere Differentialgleichung:

$$\frac{d.(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})\,\text{sin}\,\psi\,\text{Cos}\,\psi\, d\varphi^2}{dt^2}$$

$$\frac{-(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})\,\text{sin}\,\psi\,\text{Cos}\,\psi\, d\varphi^2}{dt^2}$$

$$-\pi(mr + m'r' + m''r'' + \text{etc.})\,\text{Cos}\,\psi = 0.$$

Substituirt man hier statt $\frac{d\varphi}{dt}$ dessen aus dem vorhergehenden Integrale gezogenen Werth; so wird sie

d.

Digitized by Google

$$\frac{d.(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})\, d\psi}{dt^2}$$

$$\frac{A^2 \sin\psi}{(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.}) \operatorname{Cof}^3\psi}$$

$$\pi\,(mr + m'r' + m''r'' + \text{etc.}) \operatorname{Cof}\psi = 0,$$

welche mit $(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})\, d\psi$ multiplicirt integrabel seyn würde, wenn die Größe

$$\pi\,(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})\,(mr + m'r' + m''r'' + \text{etc.})$$

beständig, oder $= 0$, oder eine Funktion von ψ wäre.

Der erste Fall findet überhaupt statt, wenn alle Größen r, r', r'', etc. beständig, d. h., wenn alle Körper an die Stange befestigt sind. In diesem Falle ist offenbar, daß die beiden Gleichungen in φ und ψ und folglich auch die Oscillationen der Stange eben so sind, als wäre ein einziger Körper M in einer Distanz R vom festen Punkte gestellt, so daß man hätte

$$MR^2 = mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.}$$

$$MR = mr + m'r' + m''r'' + \text{etc.}$$

Der Werth von R ist daher die Distanz vom Mittelpunkte der Schwingung, und der von M die in diesen Mittelpunkt zu setzende Masse, damit einerley Stoß einerley Bewegung beym einfachen und zusammengesetzten Pendel hervorbringe.

Der Fall, wo $\pi\,(m'r'^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})\,(mr + m'r' + m''r'' + \text{etc.})$ eine Funktion von ψ wäre, ist völlig imaginair, und wir unternehmen es daher nicht, ihn weiter zu untersuchen. Wir begnügen uns vielmehr den andern Fall in Erwägung zu ziehen, wo diese Größe $= 0$ ist, oder wenigstens bey der Voraussetzung von $\pi = 0$ verschwindet, welches geschieht, wenn man von der Schwere der Körper abstrahirt und folglich der Werth von $V = 0$ ist.

Wirft

Wirft man daher in der letztern Gleichung in ψ die Glieder $= \int (mr + m'r' + m''r'' + \text{etc.}) \operatorname{Cof} \psi$ weg, und multiplicirt die ganze Gleichung durch

$$(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})\, d\psi;$$

so wird sie integrabel, und man bekömmt zum Integral:

$$\frac{(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})^2\, d\psi^2}{dt^2} - \frac{A^2}{\operatorname{Cof}^2 \psi} = B.$$

Es sey $dt = (mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})\, d\vartheta$,

so hat man, (wenn man diesen Werth von dt substituirt M.)

$$\frac{d\psi^2}{d\vartheta^2} - \frac{A^2}{\operatorname{Cof}^2 \psi} = B,$$

woraus man zieht

$$d\vartheta = \frac{\operatorname{Cof} \psi\, d\psi}{\sqrt{(A^2 + B \operatorname{Cof}^2 \psi)}}$$

$$= \frac{d.\ \operatorname{sin} \psi}{\sqrt{(A^2 + B - B \operatorname{sin}^2 \psi)}}$$

und wenn man integrirt; so erhält man:

$$\sqrt{\frac{B}{A^2 + B}} \cdot \operatorname{sin} \psi = \operatorname{sin} (\vartheta \sqrt{B} + \alpha),$$

wo α, eben so wie A und B, eine willkührliche beständige Größe ist.

Es ist aber auch $d\varphi = \frac{A\, d\vartheta}{\operatorname{Cof}^2 \psi}$. Man hat also, eben so wie man $\operatorname{sin} \psi$ in Funktionen von ϑ hat, wenn man gehörig substituirt und integrirt φ in Funktionen von ϑ.

Digitized by Google

Es bleiben also nun nur noch die Werthe der Distanzen r, r′, r″, etc. zu bestimmen übrig. Um hier so allgemein als möglich zu verfahren, wollen wir annehmen, unter den Körpern, womit die Stange beschwert ist, wären eine oder mehrere fest, so daß ihre Distanzen vom Mittelpunkte beständig blieben; und wir wollen durch MR^2 die Summe der Produkte der Massen dieser Körper in die Quadrate ihrer Distanzen bezeichnen. Setzen wir daher die Massen m, m′, m″, etc. als beweglich an; so hat man nur zur Summe der Glieder $mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 +$ etc. die beständige Größe MR^2 zu addiren.

Setzt man also um der Abkürzung willen

$$\frac{\mathrm{Cos}^2\psi\, d\varphi^2 + d\psi^2}{dt^2} = u^2;$$

so wird der Werth von T:

$$T = (MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})\, u^2$$
$$+ m\frac{dr}{2dt^2} + m'\frac{dr'^2}{2dt^2} + m''\frac{dr''^2}{2dt^2} + \text{etc.},$$

und da $V = o$ und r, r′, etc. veränderlich sind; so erhält man die Gleichungen

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - ru^2 = o,$$

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} - r'u^2 = o,$$

$$\frac{d^2 r''}{dt^2} - r''u^2 = o,$$

etc.

welche, wenn man u^2 wegschafft, geben:

$$r\,d^2$$

Digitized by Google

$$\frac{r\,d^2\,r' - r'\,d^2\,r}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{r\,d^2\,r'' - r''\,d^2\,r}{dt^2} = 0,$$

etc.

und wenn man integrirt:

$$\frac{r\,dr' - r'\,dr}{dt} = a,$$

$$\frac{r\,dr' - r''\,dr}{dt} = b,$$

etc.

wo a und b willkührliche beständige Größen sind.

Es sey $r' = pr$,

$r'' = p'r$,

etc.

so ist $r^2\,dp = a\,dt$,

$r^2\,dp' = b\,dt$,

etc.

folglich $dp' = \frac{b\,dp}{a}$,

$$p' = \frac{bp}{a} + \beta,$$

und eben so $p'' = \frac{cp}{a} + \gamma$.

etc.

wo β, γ, etc. andere willkührliche beständige Größen sind.

Digitized by Google

Ich nehme jetzt das allgemeine Integral $T + V = \text{Const.}$ wieder vor, welches, da $V = 0$, sich auf die Form

$$(MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})\,u^2 + m\frac{dr^2}{2\,dt^2} + m'\frac{dr'^2}{2\,dt^2} + m''\frac{dr''^2}{2\,dt^2} + \text{etc.} = C^2;$$

und wenn man für $r^2 u^2$, $r'^2 u^2$, $r''^2 u^2$, etc. ihre Werthe

$$\frac{r\,d^2 r}{dt^2}, \quad \frac{r'\,d^2 r'}{dt^2}, \quad \frac{r''\,d^2 r''}{dt^2}, \text{ etc.}$$

die man aus den Gleichungen

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - ru^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} - ru^2 = 0$$

etc.

gezogen hat, substituirt; auf die Form:

$$\frac{d^2 \cdot (MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})}{4\,dt^2} = c^2$$

gebracht wird, die durch eine doppelte Integration giebt:

$MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.} = 2c^2t^2 + Dt + E$,

wo D und E wieder 2 neue beständige Größen sind.

Es sey nun Kürze halber

$$MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.} = z,$$

so hat man $z = 2C^2t^2 + Dt + E$, woraus man t in Funktionen von z zieht. Wir wollen diese Funktion durch z andeuten; so daß $t = z$ und wenn man differentiirt $dt = dz$; aber wir haben $dt = z\,d\vartheta$ (wenn man nach der obigen

Digitized by Google

obigen Vorschrift MR^2 zu den Gliedern $mr^2 + m'r'^2 +$ etc. addirt) gesetzt; folglich $z\,d\vartheta = dZ$, und

$$d\vartheta = \frac{dZ}{z} \text{ und wenn man integrirt}$$

$$\vartheta = \int \frac{dZ}{z}.$$

Hat man auf diese Art ϑ in Funktionen von z; so hat man umgekehrt z in Funktionen von ϑ, und bezeichnen wir diese Funktion durch Θ; so hat man $z = \Theta$ und folglich $dt = \Theta d\vartheta$, und wenn man integrirt $t = \int \Theta\, d\vartheta$, so daß eben dadurch man auch t in Funktionen von ϑ hat.

Substituirt man daher in dem Werthe von z für r'^2, r''^2, etc. ihre Werthe pr^2, $p'r^2$, etc. und hernach $\frac{bp}{a} + \beta$, etc. für p', etc.; so ist klar, daß man hat $z = MR^2 + r^2 P$, wo P eine rationale, und ganze Funktion von p vom zweiten Grade ist. Es ist also $r^2 = \frac{Z - MR^2}{P}$, und wenn man diesen Werth so wie den von dt in die Differentialgleichung $r^2\,dp = a\,dt$ substituirt, die wir weiter oben gefunden haben; so hat man

$$\frac{z - MR^2}{P}\,dp = a\,\Theta\,d\vartheta \text{ nämlich}$$

$$\frac{dp}{P} = \frac{a\,\Theta\,d\vartheta}{z - MR^2} = \frac{a\,\Theta\,d\vartheta}{\Theta - MR^2}$$

von welcher getrennten Gleichung das Integral p in Funktionen von ϑ giebt. Und substituirt man hierauf diesen Werth von p in dem vorhergehenden von r^2, nämlich

$$r^2 = \frac{z - MR^2}{P} = \frac{\Theta - MR^2}{P},$$

Digitized by Google

so hat man auch r in Funktionen von ϑ, und da

$$r' = pr,\ r'' = p'r = \left(\frac{bp}{a} + \beta\right) r, \text{ etc. so hat man auch}$$

r′, r″, etc. in Funktionen von ϑ. Alle veränderliche Größen φ, ψ, t, r, r′, r″, etc. sind also bekannt in Funktionen von ϑ, und wenn man ϑ vermittelst des Werths von t in ϑ wegschafft; so hat man φ, ψ, r, r′, r″, etc. in Funktionen von t; welches die Lage der Stange, und jedes der beweglichen Körper in jedem Augenblick angiebt.

Da das beständige Glied MR^2 die Summe der Massen der an der Stange befestigten Körper durch die Quadrate ihrer Distanzen vom Mittelpunkte der Umdrehung ausdrückt; so ist klar, daß wenn man nun auf die Masse der Stange selbst sehen will, man nur die Zahl dieser Körper $= \infty$ anzunehmen hat, und alsdenn wird MR^2 die Summe der Produkte jedes Theilchens der Stange in das Quadrat ihrer Distanz vom Mittelpunkte der Umdrehung seyn. Die Aufgabe ist also nicht verwickelter, als wenn man auf die Masse der Stange gar keine Rücksicht nimmt.

41) Will man auf die Masse und Figur der beweglichen Körper Rücksicht nehmen; so muß man überhaupt jeden Körper als eine Versammlung von unzähligen Theilchen betrachten, die unter einander einerley Lage erhalten, wenn der Körper solid ist, und die sie nach gewissen Gesetzen verändern können, wenn der Körper biegsam oder flüssig ist; und wir haben am Ende des vorigen Abschnitts (112 sq.) gezeigt, wie man diese Betrachtung durch auf die Figur des Körpers sich beziehende Differentiationen und Integrationen in den Calkul übertragen könne.

Wir werden aber noch in besondern Abschnitten von der Bewegung fester und flüssiger Körper handlen, indem diese Materie Stoff zu wichtigen und merkwürdigen Untersuchungen hergiebt, und wir begnügen uns am Ende des gegenwärtigen, ein Beyspiel von der Methode zu geben, die man bey der Aufgabe über die Bewegung der schwingenden Seiten anzuwenden hat.

Wir

Digitized by Google

Wir wollen den Fall (37) annehmen, wo der Faden schwer und dehnbar ist, und durch Dm die Maaße eines gewissen Elements des Fadens, dessen Länge Ds sey, bezeichnen; indem wir das Zeichen S gebrauchen, um die auf die durch D bezeichneten Differentialien sich beziehenden Integrationen anzudeuten, übrigens aber die andern Benennungen (37) beybehalten; alsdenn ist klar, daß

$$T = S\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\,Dm,$$

$$V = S(-\pi z\,Dm + \int R\,d\,Ds)$$

wo R die Elasticität oder die Zusammenziehungs-Kraft des Elements Ds ist, welche allezeit als eine Funktion eben dieses Elements angesehen werden kann.

Man hat also, da hier keiner Bedingungsgleichung genug zu thun ist, nach der Formel (4 Abschn. 15.) folgende allgemeine Gleichung für die Bewegung des Fadens oder der Saite:

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)Dm - \pi S\delta z\,Dm + SR\delta Ds = 0.$$

Es ist aber klar, daß das Element der Krümmung des Fadens $Ds = \sqrt{(Dx^2 + Dy^2 + Dz^2)}$ ist; folglich wenn man nach δ differentiirt:

$$\delta Ds = \frac{Dx\,\delta Dx}{Ds} + \frac{Dy\delta Dy}{Ds} + \frac{Dz\delta Dz}{Ds},$$

und folglich $SR\delta Ds = SR\frac{Dx\delta Dx}{Ds} + SR\frac{Dy\delta Dy}{Ds} + SR\frac{Dz\delta Dz}{Ds}$;

wo man nach (4 Abschn. 16.) die doppelten durch δD bezeichneten Differentialien unter dem Zeichen S zum verschwinden bringen muß.

Man

Digitized by Google

Man verwandle daher $S R \frac{Dx \delta Dx}{Ds}$ in

$$R'' \frac{Dx'' \delta x''}{Ds''} - R' \frac{Dx' \delta x'}{Ds'} - S \delta x D. \frac{RDs}{Ds},$$

indem man mit einem Strich die auf den Anfang des Integrals, d. h. auf das oberste Ende des Fadens sich beziehenden Größen bezeichnet, durch 2 Striche aber diejenigen, die sich auf den letzten Punkt des Integrals d. h. auf das unterste Ende des Fadens beziehen.

Auf gleiche Art verfährt man mit den ähnlichen Gliedern, wodurch sich die vorige Gleichung in folgende verwandelt, worin unter dem Zeichen S nur die einfachen Variationen δx, δy, δz vorkommen:

$$S\Big[\Big(\frac{d^2x}{dt^2} Dm - D\frac{RDx}{Ds}\Big)\delta x + \Big(\frac{d^2y}{dt^2} Dm - D\frac{RDy}{Ds}\Big)\delta y + \Big(\frac{d^2z}{dt^2} Dm - \pi Dm - D\frac{RDz}{Ds}\Big)\delta z\Big] +$$

$$R''\Big(\frac{Dx''}{Ds''}\delta x'' + \frac{Dy''}{Ds''}\delta y'' + \frac{Dz''}{Ds''}\delta z''\Big) -$$

$$R'\Big(\frac{Dx'}{Ds'}\delta x' + \frac{Dy'}{Ds'}\delta y' + \frac{Dz}{Ds'}\delta z'\Big) = 0.$$

Da nun diese Variationen unabhängig von einander sind; so hat man sogleich diese 3 unbestimmte Gleichungen für alle Punkte des Fadens:

$$\frac{d^2x}{dt^2} Dm - D.\frac{RDx}{Ds} = 0,$$

d^2y

Digitized by Google

$$\frac{d^2 y}{dt^2} Dm - D. \frac{RDy}{Ds} = o,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} Dm - \varpi Dm - D. \frac{RDz}{Ds} = o.$$

Was nun die Glieder betrifft, worin $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$, $\partial x''$, $\partial y''$, $\partial z''$, vorkommen, so ist zu bemerken, daß, da der Faden an seinen beiden Enden als fest angenommen worden ist; diese Variationen an sich $= o$ seyn werden, und die genannten Glieder verschwinden werden, so daß in diesem Falle die Auflösung der Aufgabe einzig und allein von den drei vorhergehenden Gleichungen abhängen wird.

Wäre aber der Faden an seinem obersten Ende fest, an seinem untersten aber frey; so hat man nur die 3 Variationen dx', $\partial y'$, $\partial z'$, die $= o$ seyn werden, und um die andern zum verschwinden zu bringen, hat man nur $R'' = o$ zu setzen. In diesem Falle hat man also auch noch der Bedingung Genug zu thun, daß R am untersten Ende des Fadens $= o$ seyn muß.

In Ansehung der Werthe von Ds und Dm aber ist klar, daß das Element der Krümmung des Fadens

$= \sqrt{(Dx^2 + Dy^2 + Dz^2)}$ ist,

und daß die Masse dieses Elements $Dm = \varepsilon Ds$ ist, wenn ε die Dicke dieses Elements bedeutet.

42) Nimmt man also an, der Faden entferne sich sehr wenig von der geradlinichten Figur, d. h. von der Achse der z, so daß x und y allezeit sehr klein in Ansehung der z und also auch Dx, Dy in Ansehung der Dz, so hat man bis auf die Größen von der zweiten Ordnung $Ds = Dz$.

Nimmt man nun ausserdem noch an, der Faden sey sehr wenig dehnbar, so daß die Längen s fast beständig in Ansehung der Zeit seyen, so hat man $\frac{d. Ds}{dt}$ und folglich auch $\frac{d. Dz}{dt}$ beinah $= o$.

Digitized by Google

Die letztere Gleichung reducirt sich also auf

$$\pi Dm + DR = 0,$$

woraus man durch die Integration zieht:

$$R = Const. - \pi S \varepsilon Ds,$$

indem $Dm = \varepsilon Ds$.

Bey der gewöhnlichen Theorie der schwingenden Saiten abstrahirt man von der Schwere ihrer Theilchen, und nimmt sie an ihren beiden Enden als fest an. Macht man also in diesem Falle $\pi = 0$; so hat man $R = Const.$ und nimmt man auch das Element Ds oder Dz als beständig an, so hat man folgende beide Gleichungen in partiellen Differentialien:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{R}{\varepsilon} \cdot \frac{D^2x}{Dz^2} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{R}{\varepsilon} \cdot \frac{D^2y}{Dz^2} = 0,$$

davon das complette Integral ist, wenn $\varepsilon = Const.$

$$x, y = f\left(z + t\sqrt{\frac{R}{\varepsilon}}\right) - F\left(z - t\sqrt{\frac{R}{\varepsilon}}\right),$$

wo f, F z willkührliche Funktionen bedeuten.

Diese Formel enthält die ganze Theorie der Schwingungen der schallenden Saiten wie man in den Memoiren der Akademien zu Berlin, Petersburg und Turin sehen kann *).

Ist

*) Die Aufgabe de chordis vibrantibus ist sicher immer eine der merkwürdigsten in der ganzen Mathematik. Lange stritten darüber die Mathematiker vom ersten Range ein Taylor, D'Alembert, Euler, Bernoulli, La Grange u. a. Es stritten also hier Männer, von denen jeder den auch gebrei-

Digitized by Google

Ist bey einer schwingenden schweren Saite das untere Ende frey; so muß $R = o$ seyn, läßt man also die Integrationen, deren Zeichen S ist, am obern Ende der Kette, wo $z = o$ ist, anfangen; so hat man

$$R = \pi (A - S.Ds),$$

wo A der Werth des Integrals $S.Ds$ für die ganze Länge der Kette ist.

Verrichtet man daher diese Substitution in den beiden erstern Gleichungen; so erhält man da

$$Dm = .Ds$$

wenn man $Ds =$ const. annimmt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \pi . \frac{D.(A - S.Ds)\,Dx}{.Ds^2} = o,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \pi \frac{D.(A - S.Ds)\,Dy}{.Ds^2} = o.$$

Ist nun die Kette gleichförmig dick; so ist $. = 1$, $S.Ds = s$, $A = l =$ der Länge der Kette und die Gleichungen werden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \pi \frac{D.(l - s)\,Dx}{Ds^2} = o,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \pi \frac{D.(l - s)\,Dy}{Ds^2} = o,$$

welche aber durch keine bis jetzt bekannte Methode integrirt werden können.

43)

gebreitetesten Ruhm hatte, natürlich war auch hier theils ein Mißverstand Schuld, theils daß man calkuliren mußte ohne die Erfahrung zu Rathe ziehen zu können. Ich würde zu weit ausschweifen, wenn ich den ganzen Verlauf der Sache oder die Geschichte dieses Streits hierhersetzen wollte.

Digitized by Google

43) Wollte man den Faden als undehnbar betrachten; so müßte man in dem Ausdruck von V das Glied $S\int R\,dDs$, und folglich in der allgemeinen Gleichung das Glied $SR\,\delta Ds$ wegschaffen; aber auf der andern Seite müßte man auch auf die Unveränderlichkeit der Elemente Ds Rücksicht nehmen, woraus die Bedingungsgleichung $Ds - \text{const.} = 0$ entspringt. Hiedurch erhält man das Glied $S\lambda\delta Ds$, welches zum ersten Glied eben dieser Gleichung (4 Abschn. 13.) zu addiren ist. Man hat auf diese Art, da dieses neue Glied völlig demjenigen ähnlich ist, welches weggeschafft werden soll, wenn man nur λ statt R setzt, allezeit die nämlichen Formeln.

Jedoch muß man in Ansehung der schwingenden Saiten bemerken, daß im Falle der Undehnbarkeit man die beiden Enden nicht fest, so wie bey dem der Dehnbarkeit annehmen kann; denn damit die Saite gespannt sey, muß eins der Enden durch eine Kraft gezogen werden, die sie zu bewegen strebt; und die einfachste Voraussetzung ist sich wie (36) vorzustellen, daß die Saite in einen festen Ring gehe, und hernach ein gegebenes Gewicht πM trage. Man erhält auf diese Art für das untere Ende der Saite $x'' = 0$, und folglich $\delta x'' = 0$, $\delta y'' = 0$; aber z'' ist veränderlich und drückt die vertikale Distanz des Gewichts πM vom Anfange der Coordinaten z aus. Um nun auf die Würkung dieses Gewichts ebenfals Rücksicht zu nehmen; so muß man zum Werthe von V das Glied $-\pi Mz''$ addiren, indem die Würkung des Gewichts z'' zu vergrößern strebt, und folglich zum ersten Gliede der allgemeinen Gleichung den Differentialausdruck $-\pi M\delta z''$. Aber $\delta z''$ ist nicht wie (42) $= 0$; es muß also in der allgemeinen Gleichung das Glied $\lambda'' \frac{Dz''}{Ds''}\,\delta z''$ übrig bleiben, wenn man λ anstatt R in der Formel (41) setzt. Addirt man dieses Glied zum vorhergehenden; so erhält man $(\lambda'' \frac{Dz''}{Ds''} - \pi M)\,\delta z''$, welche Größe unabhängig von $\delta z'' = 0$ seyn muß, woraus man zieht $\lambda'' \frac{Dz''}{Ds''} - \pi M = 0$ oder da $Dz'' = Ds''$ sehr nahe $\lambda'' = \pi M$. Da nun

Digitized by Google

nun bey sehr kleinen Oscillationen $\lambda = \text{const.}$ ist; so hat man allgemein, wenn man von der Schwere abstrahirt $\lambda = \pi M$; woraus man sieht, daß die Spannkraft πM im Fall der Undehnbarkeit der Zusammenziehungskraft R des als dehnbar angenommenen Fadens gleich ist.

44) Diese verschiedene Beyspiele enthalten beynah alle Aufgaben, die die Geometer über die Bewegung eines Körpers oder eines Systems von Körpern aufgelöst haben. Wir haben sie mit Vorsatz gewählt, damit man um desto besser von den Vortheilen unserer Methode urtheilen könne, wenn man unsere Auflösungen mit denen vergleicht, die man in den Werken der Hrn. Euler, Clairaut, D'Alembert, u. s. w. antrifft, und wo man zu den Differentialgleichungen nur durch Schlüsse, Constructionen und oft sehr langwierigen und verwickelten Analysen gelangt. Die Gleichförmigkeit und Schnellheit des Verfahrens bey dieser Methode sind das was sie von allen andern hauptsächlich unterscheiden muß, und das wir besonders in ihren Anwendungen zeigen wollten.

Digitized by Google

Sechster Abschnitt.

Ueber die Rotation der Körper.

Die Wichtigkeit und Schwere dieser Aufgabe haben mich dazu bewogen ihr einen besondern Abschnitt zu widmen, und sie von ihren ersten Gründen an vorzutragen. Ich gebe zuerst die allgemeinsten und zugleich einfachsten Formeln, um die Umdrehungsbewegung eines durch gewisse Kräfte getriebenen Körpers vorzustellen. Hierauf aber gebe ich verschiedene Anwendungen dieser Gleichungen.

Ohnerachtet dieser Gegenstand schon von mehrern Geometern abgehandelt worden ist; so wird doch die Theorie, die wir davon anstellen werden, nicht minder nützlich seyn. Auf der einen Seite giebt sie von neuen Mittel an die Hand, das berühmte Problem der Umdrehung der Körper von einer gewissen Figur aufzulösen; auf der andern aber dient sie dazu, die schon gegebenen Auflösungen davon, die alle auf verschiedenen Principien beruhen und unter verschiedenen Gestalten dargestellt sind, unter einem Gesichtspunkt zu vereinigen. Diese Arten von Vergleichungen sind allezeit instruktiv und können dem Fortgange der Analyse nicht anders als zuträglich seyn; ja man kann sogar behaupten, daß sie nach dem Zustande worin sie sich jetzt befindet, dazu eine nothwendige Erforderniß sind. Denn diese Wissenschaft wird in demselben Verhältniß immer verwickelter, worin sie sich ausbreitet und durch neue Methoden bereichert wird, und nur durch eine allgemeine Zusammenstellung der Methoden, die diese Vortheile gewähren, kann man sie vereinfachen.

§. I.

Allgemeine auf die Umdrehungsbewegung sich beziehende Formeln.

1) Die (1. Theil 5. Abschn. 55.) gefundene Differentialformeln zur Ausdrückung der Variationen, die die Coordinaten eines gewissen Systems

Digitized by Google

stems von Punkten, deren Distanzen von einander unveränderlich sind, erfahren finden natürlich bey der gegenwärtigen Untersuchung ebenfalls ihre Anwendung. Denn diese Voraussetzung macht nur, daß die aus den Variationen der Distanzen zwischen den verschiedenen Punkten entspringenden Glieder verschwinden, so daß die übrigbleibenden Glieder das ausdrükken, was bey der Bewegung des Systems allgemein und allen Punkten gemein ist, wenn man von ihren relativen Bewegungen abstrahirt, und eben diese allgemeine und absolute Bewegung haben wir uns zu untersuchen vorgenommen.

2) Verwandlen wir in den eben genannten Formeln die Charakteristik δ in d; so erhält man für die absolute Bewegung des Systems diese 3 Gleichungen:

$$dx = d\lambda + z\,dM - y\,dN,$$
$$dy = d\mu + x\,dN - z\,dL,$$
$$dz = d\nu + y\,dL - x\,dM,$$

worin x, y, z wie gewöhnlich die Coordinaten jedes Punkts des Systems in Ansehung der 3 festen und auf einander senkrechten Achsen vorstellen; und wo $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, dL, dM, dN unbestimmte Größen sind, die für alle Punkte einerley sind, und die nur von der Bewegung des Systems überhaupt abhängen.

3) Es seyen jetzt x', y', z', die Coordinaten für einen bestimmten Punkt des Systems, alsdenn hat man also auch:

$$dx' = d\lambda + z'\,dM - y'\,dN,$$
$$dy' = d\mu + x'\,dN - z'\,dL,$$
$$dz' = d\nu + y'\,dL - x'\,dM;$$

folglich wenn man diese Formeln von den vorhergehenden abzieht, und um mehrerer Einfachheit willen setzt:

$$x - x' = \xi,$$
$$y - y' = \eta,$$
$$z - z' = \zeta,$$

so

Digitized by Google

so hat man diese Differentialgleichungen:

$$d\xi = \zeta dM - \eta dN,$$
$$d\eta = \xi dN - \zeta dL,$$
$$d\zeta = \eta dL - \xi dM,$$

worin die veränderlichen Größen ξ, η, ζ die Coordinaten der verschiedenen Punkte des Systems vorstellen, wenn man sie von einem bestimmten Punkt desselben Systems annimmt, den wir ins künftige Mittelpunkt des Systems nennen wollen.

4) Da diese Gleichungen linear und nur von der ersten Ordnung sind; so folgt aus der bekannten Theorie dieser Arten von Gleichungen, daß, wenn man durch ξ', ξ'', ξ''' drei besondere Werthe von ξ ausdrückt und durch η', η'', η''' und ζ', ζ'', ζ''' die correspondirenden Werthe von η und ζ, man diese completen Integrale erhalten wird:

$$\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi''',$$
$$\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta''',$$
$$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''',$$

wo a, b, c 3 beliebige beständige Größen sind. Es ist klar, daß ξ', η', ζ' nichts anders als die Coordinaten eines gewissen gegebenen Punkts des Systems sind, und daß ebenso ξ'', η'', ζ'', und ξ''', η''', ζ''' die Coordinaten zweier andern ebenfals nach Willkühr angenommenen Punkten sind, indem diese Coordinaten ihren gemeinschaftlichen Anfang in dem Mittelpunkte des Systems haben. Kennt man also die Ordinaten für 3 gegebene Punkte; so hat man durch die vorhergehenden Formeln die Werthe der Coordinaten für alle andere Punkte, welche Werthe lineare ähnliche Funktionen der gegebenen Coordinaten seyn werden.

Aber man muß die beständigen Größen a, b, c bestimmen.

In dieser Hinsicht bemerke ich, daß, weil man in den Differentialgleichungen die Distanzen zwischen den verschiedenen Punkten des Systems als unveränderlich angesehn hat, diese Distanzen Funktionen der durch die Integration eingeführten beständigen Größen seyn müssen; man muß

Digitized by Google

also einige dieser Distanzen als gegeben annehmen, um die eben genannten beständigen Größen bestimmen zu können.

Es sey daher

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = A^2,$$
$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = A'^2,$$
$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = A''^2,$$
$$\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = A'''^2,$$
$$(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2 = B'^2,$$
$$(\xi - \xi'')^2 + (\eta - \eta'')^2 + (\zeta - \zeta'')^2 = B''^2,$$
$$(\xi - \xi''')^2 + (\eta - \eta''')^2 + (\zeta - \zeta''')^2 = B'''^2,$$
$$(\xi' - \xi'')^2 + (\eta' - \eta'')^2 + (\zeta' - \zeta'')^2 = C'^2,$$
$$(\xi' - \xi''')^2 + (\eta' - \eta''')^2 + (\zeta' - \zeta''')^2 = C''^2,$$
$$(\xi'' - \xi''')^2 + (\eta'' - \eta''')^2 + (\zeta'' - \zeta''')^2 = C'''^2,$$

wo die Distanzen A, A', A'', A''', B', B'', etc. als gegeben angenommen werden, und setzt man nun Kürze halber:

$$F' = \frac{A^2 + A'^2 - B'^2}{2},$$

$$F'' = \frac{A^2 + A''^2 - B''^2}{2},$$

$$F''' = \frac{A^2 + A'''^2 - B'''^2}{2},$$

$$G' = \frac{A'^2 + A''^2 - C'^2}{2},$$

Digitized by Google

$$G'' = \frac{A'^2 + A''^2 - C''^2}{2},$$

$$G''' = \frac{A''^2 + A'''^2 - C'''^2}{2};$$

so erhält man an die Stelle der 6 letztern Gleichungen folgende einfachere

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = F',$$
$$\xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' = F'',$$
$$\xi\xi''' + \eta\eta''' + \zeta\zeta''' = F''',$$
$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = G',$$
$$\xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = G'',$$
$$\xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = G'''.$$

Substituirt man daher in den 3 erstern dieser Gleichungen die Werthe von ξ, η, ζ (3); so erhält man vermittelst der andern Gleichungen die 3 folgenden:

$$aA'^2 + bG' + cG'' = F',$$
$$aG' + bA''^2 + cG''' = F'',$$
$$aG'' + bG''' + cA'''^2 = F''',$$

woraus man leicht die Werthe von a, b, c zieht.

5) Haben die 3 Punkte des Systems, die wir (3) für gegeben angenommen haben, eine solche Lage, daß sie rechtwinklichte Dreiecke um das Centrum bilden, das die gemeinschaftliche Spitze derselben ist, d. h. daß diese Punkte in 3 geraden Linien angenommen seyen, die durch das Centrum gehen und rechte Winkel unter einander bilden; so hat man offenbar

$$G' = 0, \quad G'' = 0, \quad G''' = 0;$$

und

Digitized by Google

und die 3 obigen Gleichungen geben sogleich:

$$a = \frac{F'}{A'^2}, \quad b = \frac{F''}{A''^2}, \quad c = \frac{F'''}{A'''^2}.$$

6) Obgleich übrigens die 3 eben genannten Punkte nach Willkühr angenommen sind; so ist doch klar, daß, wenn man die 6 Größen A', A'', A''', G', G'', G''' als gegeben ansieht, die Coordinaten eines dieser Punkte durch die der beiden andern bestimmt seyn werden. Die Coordinaten ξ''', η''', ζ''' werden z. B. durch die 3 Gleichungen:

$$\xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = G'',$$

$$\xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = G''',$$

$$\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = A'''^2,$$

bestimmt, welche wenn $G' = 0$, $G'' = 0$, $G''' = 0$, geben

$$\xi''' = (\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')\frac{A'''}{A'A''},$$

$$\eta''' = (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')\frac{A'''}{A'A''},$$

$$\zeta''' = (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')\frac{A'''}{A'A''}.$$

7) Auf eine so direkte Art man aber bey der vorhergehenden Analyse zu Werke geht; so kann man doch durch einen natürlichern Weg zu denselben Resultaten gelangen, wenn man von der geometrischen Betrachtung ausgeht, daß die Lage eines gewissen Punkts im Raume allezeit durch dessen Distanzen von 3 gegebenen Punkten bestimmt sey.

Denn gesetzt, die Coordinaten dieser Punkte seyen

x', y', z' für den ersten,

x'', y'', z'' für den 2ten,

x''', y''', z''' für den 3ten,

Digitized by Google

und x, y, z seyen überhaupt die Coordinaten eines gewissen andern Punkts, dessen Distanzen von diesen 3 Punkten durch l, m, n ausgedrückt seyen; so ist klar, daß man folgende 3 Gleichungen haben wird:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = l^2,$$

$$(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2 = m^2,$$

$$(x - x''')^2 + (y - y''')^2 + (z - z''')^2 = n^2,$$

durch deren Hülfe man x, y, z in Funktionen von x', y', z', x'', etc. bestimmen kann.

8) Um nun diese Bestimmung zu erleichtern; so nennen wir f, g, h die Distanzen zwischen den 3 gegebenen Punkten d. h. die 3 Seiten des durch diese Punkte gebildeten Dreiecks, dies giebt folgende 3 Gleichungen:

$$(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 = f^2,$$

$$(x''' - x')^2 + (y''' - y')^2 + (z''' - z')^2 = g^2,$$

$$(x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2 + (z''' - z'')^2 = h^2.$$

Setzen wir nun Kürze halber

$$x - x' = \xi,$$

$$y - y' = \eta,$$

$$z - z' = \zeta,$$

$$x'' - x' = \xi',$$

$$y'' - y' = \eta',$$

$$z'' - z' = \zeta',$$

$$x''' - x' = \xi'',$$

$$y''' - y' = \eta'',$$

$$z''' - z' = \zeta'';$$

Digitized by Google

und man substituirt diese Werthe nebst denen im vorhergehenden Artikel gefundenen, so verwandeln sich die vorhergehenden Gleichungen in diese:

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = f^2,$$

$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = g^2,$$

$$(\xi'' - \xi')^2 + (\eta'' - \eta')^2 + (\zeta'' - \zeta')^2 = h^2,$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2,$$

$$(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2 = m^2,$$

$$(\xi - \xi'')^2 + (\eta - \eta'')^2 + (\zeta - \zeta'')^2 = n^2,$$

die sich in diese einfachere verwandeln lassen:

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = f^2,$$

$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = g^2,$$

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = \frac{f^2 + g^2 + h^2}{2},$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2,$$

$$\xi'\xi + \eta'\eta + \zeta'\zeta = \frac{f^2 + l^2 - m^2}{2},$$

$$\xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = \frac{g^2 + l^2 - n^2}{2}.$$

9) Die Schwierigkeit besteht nun darin die unbekannten Größen ξ, η, ζ in den 3 letzten Gleichungen zu finden. Setzt man daher Kürze halber

$$\frac{f^2 + l^2 - m^2}{2} = \mu,$$

$$\frac{g^2 + l^2 - n^2}{2} = \nu,$$

Digitized by Google

so zieht man sogleich aus den beiden letztern:

$$\xi = \frac{\mu\eta'' - \nu\eta' - (\zeta'\eta'' - \zeta''\eta')\zeta}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'},$$

$$\eta = \frac{\mu\xi'' - \nu\xi' - (\zeta'\xi'' - \zeta''\xi')\zeta}{\eta'\xi'' - \eta''\xi'},$$

und substituirt man diese Werthe in der Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2;$$

so erhält man, wenn man die Glieder ordnet:

$$[(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2 + (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2 + (\xi'\eta'' + \eta'\xi'')^2]\zeta^2$$
$$+ 2[(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')(\mu\eta'' - \nu\eta') - (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')$$
$$(\mu\xi'' - \nu\xi')]\zeta = (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2 l^2 - (\mu\xi'' - \nu\xi')^2 -$$
$$(\mu\eta'' - \nu\eta')^2.$$

Deuten wir nun durch A den Coefficienten von ζ^2, durch 2 B den von ζ und durch C die beiden Glieder $(\mu\xi'' - \nu\xi')^2 + (\mu\eta'' - \nu\eta')^2$ an; so hat man die Gleichung

$$A\zeta^2 + 2B\zeta = (\xi'\eta'' - \eta'\zeta'')^2 l^2 - C$$

aufzulösen, welche giebt

$$\left(\zeta + \frac{B}{A} = \sqrt{[(\xi'\eta'' - \eta'\zeta'')^2 l^2 A + B^2 - AC]} \text{ oder } \mathfrak{M}.\right)$$

$$A\zeta + B = \sqrt{[\xi'\eta'' - \eta'\zeta'')^2 l^2 A + B^2 - AC]}.$$

Es ist aber

$$B^2 - AC = (\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2 (\mu\eta'' - \nu\eta')^2 - (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2$$
$$(\mu\xi'' - \nu\xi')^2 -$$
$$[(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2 + (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2 + (\xi'\eta'' + \eta'\xi'')^2]$$
$$[(\mu\xi'' - \nu\xi')^2 + (\mu\eta'' - \nu\eta')^2] =$$

$(\eta'\zeta''$

Digitized by Google

$$(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2(\mu\eta'' - \nu\eta')^2 - (\eta'\nu - \eta''\mu)^2(\eta''\zeta' - \zeta''\eta')^2$$
$$- 2(\eta'\nu - \eta''\mu)(\eta''\zeta' - \zeta''\eta')(\mu\xi'' - \nu\xi')(\xi'\zeta'' - \zeta'\xi'')$$
$$+ 2(\eta'\nu - \eta''\mu)(\eta''\zeta' - \zeta''\eta')(\mu\xi'' - \nu\xi')(\eta'\xi'' - \xi'\eta'')$$
$$+ 2(\eta'\nu - \eta''\mu)(\eta''\zeta' - \zeta''\eta')(\mu\xi'' - \nu\xi')(\xi'\zeta'' - \zeta'\xi'')$$
$$+ 2(\eta'\nu - \eta''\mu)(\eta''\zeta' - \zeta''\eta')(\mu\xi'' - \nu\xi')(\eta'\xi'' - \xi'\eta'')$$
$$+ 2(\xi'\nu - \xi''\mu)(\xi''\eta' - \eta''\xi')(\mu\xi'' - \nu\xi')(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')$$
$$+ 2(\xi'\nu - \xi''\mu)(\xi''\eta' - \eta''\xi')(\mu\xi'' - \nu\xi')(\xi'\zeta'' - \zeta'\xi'')$$
$$+ 2(\xi'\nu - \xi''\mu)(\xi''\eta' - \eta''\xi')(\mu\xi'' - \nu\xi')(\eta'\xi'' - \xi'\eta'')$$
$$+ 2(\eta'\nu - \eta''\mu)(\eta''\zeta' - \zeta''\eta')(\mu\eta'' - \nu\eta')(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')$$
$$+ 2(\eta'\nu - \eta''\mu)(\eta''\zeta' - \zeta''\eta')(\mu\eta'' - \nu\eta')(\xi'\zeta'' - \zeta'\xi'')$$
$$+ 2(\eta'\nu - \eta''\mu)(\eta''\zeta' - \zeta''\eta')(\mu\eta'' - \nu\eta')(\eta'\xi'' - \xi'\eta'')$$
$$+ (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2(\mu\eta'' - \nu\eta')^2 = \mathfrak{M}.)$$

$$(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2(\mu\eta'' - \nu\eta')^2 - (\eta'\nu - \eta''\mu)^2(\eta''\zeta' - \zeta''\eta')^2$$
$$+ 2(\eta'\nu - \eta''\mu)(\eta''\zeta' - \zeta''\eta')(\mu\xi'' - \nu\xi')(\xi'\zeta'' - \zeta'\xi'')$$
$$+ (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2(\mu\xi'' - \nu\xi')^2 +$$
$$[(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2 + (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2 + (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2]$$
$$[(\mu\xi'' - \nu\xi')^2 + (\mu\eta'' - \nu\eta')^2] =$$
$$- 2(\eta'\nu - \eta''\mu)(\eta''\zeta' - \zeta''\eta')(\mu\eta'' - \nu\eta')(\xi'\zeta'' - \zeta'\xi'')$$
$$- [(\xi'\zeta'' - \zeta'\xi'')^2 + (\eta'\xi'' - \xi'\eta'')^2](\mu\eta'' - \nu\eta')^2$$
$$- (\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2(\mu\xi'' - \nu\xi')^2 - [(\eta'\xi'' - \xi'\eta'')^2 + (\zeta'\eta'' - \eta'\zeta'')^2]$$
$$(\mu\xi'' - \nu\xi')^2 - [(\eta'\nu - \eta''\mu)(\mu\eta'' - \nu\eta') + (\zeta'\eta'' - \eta'\zeta'')$$
$$(\mu\xi'' - \nu\xi')]^2 =$$
$$- [(\eta'\nu - \eta''\mu)^2(\mu\eta'' - \nu\eta')^2 + (\mu\xi'' - \nu\xi')^2(\eta'\xi'' - \xi'\eta'')^2]$$
$$- [(\eta'\nu - \eta''\mu)^2(\mu\zeta'' - \nu\xi')^2 + (\mu\eta'' - \nu\eta')^2(\eta'\xi'' - \xi'\eta'')^2$$
$$+ (\mu\xi'' - \nu\xi')^2(\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2].$$

Setzt man also noch

$$(\mu\zeta'' - \nu\zeta')^2 + (\mu\eta'' - \nu\eta')^2 + (\mu\xi'' - \nu\xi')^2 = D;$$

so

so hat man

$$A\zeta + B = (\xi'\eta'' - \eta''\xi')\sqrt{(A^2 - D)}.$$

Die Werthe von A, B, D lassen sich aber leicht so ausdrücken.

$$A = (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)(\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2) -$$
$$(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')^2$$
$$= f^2 g^2 - \left(\frac{f^2 + g^2 - h^2}{2}\right)^2,$$

$$B = \mu[(\zeta'\zeta'' + \eta'\eta'' + \xi'\xi'')\zeta'' - (\zeta''^2 + \eta''^2 + \xi''^2)\zeta']$$
$$- \nu[(\zeta'^2 + \eta'^2 + \xi'^2)\zeta'' - (\zeta'\zeta'' + \eta'\eta'' + \xi'\xi'')\zeta'].$$
$$= \mu\left[\frac{f^2 + g^2 - h^2}{2}\zeta'' - g^2\zeta'\right] -$$
$$\nu\left[f^2\zeta'' - \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2}\zeta'\right],$$

$$D = \mu^2(\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2) + \nu^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)$$
$$- 2\mu\nu(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'') =$$
$$\mu^2 g^2 + \nu^2 f^2 - \mu\nu(f^2 + g^2 - h^2).$$

Substituirt man daher diese Werthe, und setzt um mehrerer Einfachheit willen

$$a = \frac{\mu g^2 - \nu\frac{f^2 + g^2 - h^2}{2}}{f^2 g - \left(\frac{f^2 + g^2 - h^2}{2}\right)}$$

$$b =$$

Digitized by Google

$$b = \frac{\nu f^2 - \mu \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2}}{f^2 g^2 - \left(\frac{f^2 + g^2 - h^2}{2}\right)^2},$$

$$c = \frac{\sqrt{\left[(f^2 g^2 l^2 - \left(\frac{f^2 + g^2 - h^2}{2}\right)^2 l^2 - \mu^2 g^2 - \nu^2 f^2 + \mu\nu (f^2 + g^2 - h^2)\right]}}{f^2 g^2 - \left(\frac{f^2 + g^2 - h^2}{2}\right)^2};$$

so erhält man:

$$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c(\xi'\eta'' - \eta'\xi'').$$

Um nun die Werthe von ξ und η zu erhalten, hat man nur anzumerken, daß die primitiven Gleichungen dieselben bleiben, wenn man die Größen ζ, ζ', ζ'' in η, η', η'' oder in ξ, ξ', ξ'' verwandelt. Die Größen a, b aber sind rationale Funktionen von $l^2, g^2, h^2, l^2, m^2, n^2$ und müssen also auch dieselben bleiben, und drückt man die Größe c durch eine radikale Funktion eben dieser Größen f, g, etc. aus; so kann sie ihr Zeichen verwechseln; man hat daher allgemein:

$$\eta = a\eta' + b\eta'' \pm c(\xi'\zeta'' - \zeta'\xi''),$$
$$\xi = a\xi' + b\xi'' \pm c(\zeta'\eta'' - \eta'\zeta'').$$

Um ferner die Zeichen von c zu bestimmen hat man nur die beiden Gleichungen

$$\xi'\xi + \eta'\eta + \zeta'\zeta = \mu,$$
$$\xi''\xi + \eta''\eta' + \zeta''\zeta = \nu$$

zu betrachten, und man muß um die Gleichungen zu verificiren, wenn man die vorhergehenden Werthe von ζ, η, ξ substituirt, die untern Zeichen

Digitized by Google

chen von c in den Ausdrückungen von η und ξ nehmen. Hiedurch erhält man endlich:

$$\xi = a\xi' + b\xi'' + c(\eta'\zeta'' + \zeta'\eta''),$$
$$\eta = a\eta' + b\eta'' + c(\zeta'\xi'' - \xi''\zeta''),$$
$$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c(\xi'\eta'' - \eta'\xi'').$$

10) Hier ist klar, daß in diesen Ausdrücken die Größen a, b, c, da sie Funktionen der Distanzen f, g, h, l, m, n sind, nur von der respektiven Lage der verschiedenen Punkte unter einander abhängen; so daß, wenn man diese Lage als unveränderlich annimmt, welches bey jedem festen Körper statt hat, a, b, c beständig bleiben müssen, während dem daß sich der Körper bewegt. Nur von einem Punkte des Körpers zum andern werden diese Größen veränderlich seyn, da die auf bestimmte Punkte des Körpers sich beziehenden Größen ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'' die nämlichen in Ansehung aller andern Punkte seyn werden, und von einem Momente zum andern während der Bewegung des Körpers sich verändern.

Um sich eine deutlichere Idee von diesen verschiedenen Größen in Ansehung eines gewissen Körpers zu machen, hat man nur zu erwägen, daß, wenn man durch den gegebenen Punkt des Körpers, der den Coordinaten x', y', z' entspricht, und den wir oben den ersten Punkt genannt haben, da wir ihn inskünftige den Mittelpunkt des Körpers nennen wollen, wenn man, sage ich, durch diesen Punkt drey den Achsen der Coordinaten x, y, z parallele Achsen zieht, die Differenzen $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ d. h. die Größen ξ, η, ζ zugleich auch die Coordinaten eines gewissen Punkts des Körpers in Ansehung eben dieser Achsen seyn werden, und daß auf gleiche Art die Größen ξ', η', ζ' und ξ'', η'', ζ'' die Coordinaten zweier andern gegebenen Punkte in Beziehung auf die nämlichen Achsen seyn werden.

Da nun die Lage dieser Punkte in dem Körper willkührlich ist; so kann man um mehrerer Einfachheit willen annehmen, daß ihre Distanzen vom Mittelpunkt des Körpers = 1 seyen, und daß ferner die durch das

Cen-

Digitized by Google

Centrum, und die beiden genannten Punkte gezogene gerade Linien einen rechten Winkel mit einander bilden, wodurch man hat

$$f = 1, \quad g = 1,$$
$$h^2 = f^2 + g^2 = 2;$$

welches die Werthe von a, b, c sehr vereinfacht. Man stelle sich nun vor, der Körper habe eine solche Lage, daß die beiden eben genannten geraden Linien mit den Achsen der Coordinaten ξ und η zusammenfallen, so daß man in diesem Falle hat

$$\xi' = 1, \quad \eta' = 0, \quad \zeta' = 0,$$
$$\xi'' = 0, \quad \eta'' = 1, \quad \zeta'' = 0;$$

alsdenn geben die Formeln (9):

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c.$$

Hieraus folgt, daß a, b, c nichts anders als rechtwinklichte Coordinaten eines gewissen Punkts des Körpers in Beziehung auf 3 durch desselben Mittelpunkt gehenden, und im Inwendigen desselben festen Achsen sind, wovon die eine durch den Punkt, der zu den Coordinaten ξ', η', ζ' gehört, die andere aber durch den auf die Coordinaten ξ'', η'', ζ'' sich beziehenden Punkt geht, und die dritte diesen beiden senkrecht ist.

11) Man hat daher für jeden Punkt des Körpers oder Systems die Coordinaten:

$$x = x' + \xi,$$
$$y = y' + \eta,$$
$$z = z' + \zeta,$$

worin $\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi'''$,
$\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta'''$,
$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta'''$,

wenn man Kürze halber setzt:

$$\xi''' = \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'',$$

Digitized by Google

$$\eta''' = \zeta' \xi'' - \xi' \zeta'',$$
$$\zeta''' = \xi' \eta'' - \eta' \xi''.$$

Es müssen aber die 6 Größen ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'' den 3 Bedingungsgleichungen (8)

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1,$$
$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1,$$
$$\xi' \xi'' + \eta' \eta'' + \zeta' \zeta'' = 0;$$

genug thun, so daß man überhaupt nur 6 von der Veränderung der Lage der Körper abhängende veränderliche Größen hat, nämlich die 3: x', y', z', die die Lage des Mittelpunkts im Raume bestimmen, und 3 der 6 ξ', η', ζ', ζ'', etc. Diese veränderliche Größen sind in Ansehung aller Punkte einerley, gegentheils aber sind die 3 Größen a, b, c für jeden Punkt verschieden, und hängen nur von der respektiven Lage der Punkte unter einander ab.

Uebrigens ist es gut hier zu bemerken, daß die 3 Größen ξ''', η''', ζ''' ebenfals so beschaffen sind, daß

$$\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = 1,$$
$$\xi' \xi''' + \eta' \eta''' + \zeta' \zeta''' = 0,$$
$$\xi'' \xi''' + \eta'' \eta''' + \zeta'' \zeta''' = 0;$$

die erstere dieser Gleichungen folgt daraus, daß

$$(\eta' \zeta'' - \zeta' \eta'')^2 + (\zeta' \xi'' - \xi' \zeta'')^2 + (\xi' \eta'' - \eta' \xi'')^2$$
$$= (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)(\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2) - (\xi' \xi'' + \eta' \eta'' + \zeta' \zeta'')^2 = 1;$$

und die beiden andern sind an und für sich evident.

Man hat also auf diese Art zwischen den 9 veränderlichen Größen ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'', ξ''', η''', ζ''', 6 einander völlig ähnliche Bedingungsgleichungen, welches macht, daß diese Größen mit einander verwechselt werden können.

12)

Digitized by Google

12) Die durch besondere Betrachtungen so eben gefundene Formeln können auch sogleich aus der einfachen Betrachtung der rechtwinklichten Coordinaten hergeleitet werden. Denn da ξ, η, ζ Coordinaten eines gewissen Punkts des Körpers oder Systems in Bezug auf die 3 Achsen, die sich im Mittelpunkte senkrecht schneiden, sind, und a, b, c ebenfals die Coordinaten dieses Punkts aber in Bezug auf die 3 andern Achsen sind, die sich auch in demselben Mittelpunkte schneiden; so müssen 1) ξ, η, ζ in Funktionen von a, b, c ausgedrückt werden können, und 2) müssen diese Funktionen nur linear seyn. Denn wenn man annimmt, eine lineare Gleichung zwischen ξ, η, ζ drücke eine gewisse Ebene aus; so muß die in a, b, c umgeänderte ebenfalls linear seyn, indem die Gleichung von einer Ebene allezeit vom ersten Grade ist, die Coordinaten, worauf man sie bezieht, mögen auch beschaffen seyn, wie sie wollen.

Die Ausdrücke von ξ, η, ζ in a, b, c können also nur von folgender Form seyn:

$$\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi''',$$
$$\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta''',$$
$$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''';$$

wo die Größen $\xi', \xi'', \xi''', \eta'$, etc., für alle Punkte des Körpers einerley sind, und allein von der Lage der Achsen der a, b, c in Bezug auf ξ, η, ζ abhängen.

13) Da nun die Coordinaten ξ, η, ζ und a, b, c einerley Ursprung haben, und einem gewissen Punkt entsprechen, so ist klar, daß die Distanz dieses Punkts vom bekannten Anfange der Coordinaten an, durch

$$\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \text{ und } \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

ausgedrückt werden kann. Diese beiden Größen

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \text{ und } a^2 + b^2 + c^2$$

müssen folglich identisch seyn, und aus der erstern die zweite werden, wenn man die Werthe von ξ, η, ζ in a, b, c substituirt.

Digitized by Google

Verrichtet man diese Substitutionen, und vergleicht die ähnlichen Glieder mit einander; so erhält man die 6 Bedingungsgleichungen *):

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1,$$
$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1,$$
$$\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = 1,$$
$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0,$$
$$\xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = 0,$$
$$\xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = 0;$$

wodurch die 9 veränderlichen Größen ξ', η', ζ', ξ'', etc. auf 3 unbestimmte gebracht werden können, und diese Gleichungen kommen mit denen (11), wie man sieht, überein.

14) Betrachtet man überhaupt 2 gewisse Punkte, wovon einer zu den Coordinaten ξ, η, ζ und der andere zu den Coordinaten ξ_1, η_1, ζ_1, gehört, und wo a, b, c, a_1, b_1, c_1 die anderen eben diesen Punkten entsprechende Coordinaten sind; so ist klar, daß die Distanz zwischen diesen beiden Punkten auf gleiche Art durch

$$\sqrt{[(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2]} \text{ und}$$
$$\sqrt{[(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2]}$$

ausgedrückt werden wird; so daß man immer diese identische Gleichung hat:

$$(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 = (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2.$$

Aber um ξ_1, η_1, ζ_1 zu erhalten, ist klar, daß man nur a, b, c in a_1, b_1, c_1 in den allgemeinen Ausdrücken von ξ, η, ζ zu verwandlen hat, und daß man, um die Werthe von $\xi - \xi_1$, $\eta - \eta_1$, $\zeta - \zeta_1$ zu

*) Eben dies hat schon Hr. Euler in den Nov. Act. Acad. Imp. Petrop. pro 1775 gezeigt. M.

Digitized by Google

zu erhalten, nur in eben diesen Ausdrücken $a - a_1$, $b - b_1$, $c - c_1$, statt a, b, c zu setzen hat.

Substituirt man hierauf diese Werthe in der vorigen identischen Gleichung, und vergleicht die Glieder mit einander; so erhält man die nämlichen bereits oben gefundenen Bedingungsgleichungen.

Hieraus kann man schliessen, daß diese Gleichungen allein nöthig sind, wenn die respektive Lage der verschiedenen Punkte des Systems unter einander allein durch die Größen a, b, c bestimmt seyn, und auf keine Art von den Größen ξ', η', ζ', ξ'', etc. abhängen soll.

15) Auch kann man durch dieselbe Methode andere merkwürdige Verhältnisse zwischen eben diesen Größen ξ', η', ζ', ξ'', etc. finden, die bey mehrern Gelegenheiten von Nutzen seyn können.

Addirt man die 3 Formeln (12) zu einander, nachdem man sie respektiv durch ξ', η', ζ' oder ξ'', η'', ζ'' oder ξ''', η''', ζ''' multiplicirt hat; so hat man in Ansehung der Bedingungsgleichungen (14) diese umgekehrte Formeln:

$$a = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta',$$
$$b = \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'',$$
$$c = \xi\xi''' + \eta\eta''' + \zeta\zeta'''.$$

Substituirt man daher diese Werthe von a, b, c in der identischen Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2;$$

so erhält man durch Vergleichung der Glieder folgende neue Bedingungs-Gleichungen:

$$\xi'^2 + \xi''^2 + \xi'''^2 = 1,$$
$$\eta'^2 + \eta''^2 + \eta'''^2 = 1,$$
$$\zeta'^2 + \zeta''^2 + \zeta'''^2 = 1,$$

$\xi'\eta'$

Digitized by Google

$$\xi' \eta' + \xi'' \eta'' + \xi''' \eta''' = 0,$$
$$\xi' \zeta' + \xi'' \zeta'' + \xi''' \zeta''' = 0,$$
$$\eta' \zeta' + \eta'' \zeta'' + \eta''' \zeta''' = 0,$$

welche nothwendig eine Folge von denen (14) sind, indem sie aus derselben identischen Gleichung hergeleitet werden.

16) Sucht man aber direkte die Werthe von a, b, c durch die Auflösung der Gleichungen (12); so erhält man nach den bekannten Formeln:

$$a = \frac{\xi(\eta''\zeta''' - \eta'''\zeta'') + \eta(\zeta''\xi''' - \zeta'''\xi'') + \zeta(\xi''\eta''' - \eta''\xi''')}{K},$$

$$b = \frac{\xi(\zeta'\eta''' - \zeta'''\eta') + \eta(\xi'\zeta''' - \xi'''\zeta') + \zeta(\eta'\xi''' - \eta'''\zeta')}{K},$$

$$c = \frac{\xi(\eta\zeta'' - \eta''\zeta') + \eta(\zeta'\xi'' - \zeta'\xi') + \zeta(\xi'\eta'' - \xi''\eta')}{K},$$

wenn man

$$K = \xi'\eta''\zeta''' - \eta'\xi''\zeta''' + \zeta'\xi''\eta''' - \xi'\zeta''\eta''' + \eta'\xi''\xi''' - \zeta'\eta''\xi''' \text{ annimmt.}$$

Diese Ausdrücke müssen daher mit denen (5) identisch seyn. Vergleicht man daher die Coefficienten der Größen ζ, η, ζ, mit einander; so erhält man folgende Gleichungen:

$$\eta''\zeta''' - \eta'''\zeta''' = K\xi',$$
$$\zeta''\xi''' - \zeta'''\xi' = K\eta',$$
$$\xi''\eta''' - \eta''\xi''' = K\zeta',$$
$$\zeta'\eta''' - \zeta'''\eta' = K\xi'',$$
$$\xi'\zeta''' - \xi'''\zeta' = K\eta'',$$
$$\eta'\xi''' - \eta'''\xi' = K\zeta'',$$

$\eta'\zeta'''$

Digitized by Google

$$\eta' \zeta'' - \eta'' \zeta' = K \xi''',$$
$$\zeta' \xi'' - \zeta'' \xi' = K \eta''',$$
$$\xi' \eta'' - \xi'' \eta' = K \zeta'''.$$

Addirt man die Quadrate der 3 erstern zusammen, so hat man:

$$(\eta'' \zeta''' - \eta''' \zeta'')^2 + (\zeta'' \xi''' - \zeta''' \xi'')^2 + (\xi'' \eta''' - \eta''' \xi'')^2 = K^2 . (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2);$$

worin die erste Hälfte auch so geschrieben werden kann:

$$(\zeta''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2)(\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2) - (\xi'' \xi''' + \eta'' \eta''' + \zeta'' \zeta''')^2;$$

durch die Bedingungsgleichungen (13) wird aber diese Gleichung auf $1 = K^2$ gebracht; folglich ist $K = \pm 1$.

Um zu erfahren, welches dieser beiden Zeichen man nehmen müsse, hat man nur den Werth von K in einem besondern Falle zu betrachten. Der einfachste Fall aber ist der, wo die 3 Achsen der Coordinaten a, b, c mit den 3 Achsen der Coordinaten ξ, η, ζ zusammenfallen, in welchem Fall $\xi = a$, $\eta = b$, $\xi = c$ ist, und folglich nach den Formeln (12)

$$\xi' = 1, \quad \eta'' = 1, \quad \zeta''' = 1$$

und alle andere Größen ξ'', ξ''', etc. $= 0$.

Verrichtet man diese Substitutionen in dem allgemeinen Ausdruck von K; so wird er $= 1$.

Es ist daher allezeit $K = 1$.

Uebrigens sieht man, daß die 3 letztern obigen Gleichungen mit denen (11) angenommenen einerlei sind, und daß hieraus sich die 6 andern durch die Analogie herleiten lassen.

17) Wollte man also die 9 Größen ξ', ξ'', ξ''', η', etc. auf 3 unbestimmte bringen; so brauchte man nur darauf die 6 Größen: ξ', ξ'', η', η'', ζ', ζ'' vermittelst der 3 Bedingungsgleichungen

Digitized by Google

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1,$$
$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1,$$
$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0$$

zu bringen, indem die 3 andern ξ''', η''', ζ''' schon in Funktionen von jenen bekannt sind.

Nimmt man z. B. ξ', η' und ξ'' für die unbestimmte Größen an; so giebt die erstere Gleichung sogleich

$$\zeta' = \sqrt{(1 - \xi'^2 - \eta'^2)};$$

und man hat nur noch η'', ζ'' durch die beiden andern Gleichungen

$$\eta''^2 + \zeta''^2 = 1 - \xi''^2, \text{ und}$$
$$\eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = -\xi'\xi'' \text{ zu bestimmen.}$$

Es ist aber die identische Gleichung

$$(\eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')^2 + (\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2 = (\eta'^2 + \zeta'^2)(\eta''^2 + \zeta''^2);$$

folglich $(\eta'\zeta'' + \zeta'\eta'')^2 = (\eta'^2 + \zeta'^2)(\eta''^2 + \zeta''^2) - (\eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')^2$

$$= (1 - \xi'^2)(1 - \xi''^2) - \xi'^2\xi''^2$$
$$= 1 - \xi'^2 - \xi''^2.$$

Verbindet man daher die beiden Gleichungen

$$\eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = -\xi'\xi'' \text{ und}$$
$$\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' = \sqrt{(1 - \xi'^2 - \xi''^2)}$$

mit einander; so erhält man:

$$\eta'' = -\frac{\xi'\xi''\eta' + \zeta'\sqrt{(1 - \xi'^2 - \xi''^2)}}{\eta'^2 + \zeta'^2}$$

$$\zeta'' = -\frac{\xi'\xi''\zeta' - \eta'\sqrt{(1 - \xi'^2 - \xi''^2)}}{\eta'^2 + \zeta'^2}.$$

Endlich geben die 3 letzten Formeln des vorigen Artikels

$$\xi''' = \eta'\zeta'' - \eta''\zeta',$$

η'''

Digitized by Google

$$\eta''' = \zeta' \xi'' - \zeta'' \xi',$$
$$\zeta''' = \xi' \eta'' - \xi'' \eta'.$$

18) Um alle diese Ausdrücke auf eine rationale und ganze Form zu bringen, hat man nur

$$\xi' = \text{Cof } \lambda,$$
$$\eta' = \text{sin } \lambda \text{ Cof } \mu,$$
$$\xi'' = \text{sin } \lambda \text{ Cof } \nu,$$

zu seßen, welches giebt:

$$\xi' = \text{sin } \lambda \text{ sin } \mu,$$
$$\eta'' = -\text{ Cof } \lambda \text{ Cof } \mu \text{ Cof } \nu - \text{sin } \mu \text{ sin } \nu,$$
$$\zeta'' = -\text{ Cof } \lambda \text{ sin } \mu \text{ Cof } \nu + \text{Cof } \mu \text{ sin } \nu,$$
$$\xi''' = \text{sin } \lambda \text{ sin } \nu,$$
$$\eta''' = \text{sin } \mu \text{ Cof } \nu - \text{Cof } \lambda \text{ Cof } \mu \text{ sin } \nu,$$
$$\zeta''' = -\text{ Cof } \mu \text{ Cof } \nu - \text{Cof } \lambda \text{ sin } \mu \text{ sin } \nu.$$

Und es ist nicht schwer zu begreifen, nach dem was (10) gesagt ist, daß λ der Winkel seyn wird, den die Achse der Coordinaten a mit der der ξ macht, μ aber derjenige seyn wird, den die durch diese beiden Achsen gehende Ebene mit der Ebene der Coordinaten ξ und ζ bildet, und daß endlich ν der Winkel seyn wird, den die Ebene der Coordinaten a, b mit der durch die Achsen der Coordinaten ξ, a gehenden Ebene bildet. Betrachtet man daher die Achse der Coordinaten a, die als allezeit durch dieselben Punkte des Systems gehend angesehn wird, als eine Umdrehungs-Achse des Systems; so wird λ die Neigung dieser Achse gegen die feste Achse der Coordinaten ξ seyn, μ aber der Winkel, den eben diese Umdrehungsachse beschreibt, indem sie sich um diese feste Achse dreht, und λ wird der Winkel seyn, den das System selbst beschreibt, indem es sich um seine Umdrehungsachse wälzt. Aber wir wollen weiter unten noch

Digitized by Google

eine einfachere und natürlichere Art angeben, Gebrauch von der Betrachtung dieser Winkel zu machen.

19) Bey einem festen Körper müssen die Größen a, b, c beständig bleiben, so lange bis der Körper seine Lage im Raume verändert, indem die Bedingung der Solidität darin besteht, daß alle Punkte des Körpers unveränderlich dieselben Distanzen unter einander behalten. In diesem Falle müssen die Achsen der Coordinaten a, b, c im Innern des Körpers als fest, aber in Ansehung der andern Coordinaten ξ, η, ζ, die als fest im Raume angenommen worden sind, als beweglich betrachtet werden.

Wie aber auch die Veränderung der Lage des Körpers um seinen Mittelpunkt beschaffen seyn mag; so kann man beweisen, daß allezeit eine gerade durch diesen Mittelpunkt gehende Linie vorhanden seyn wird, welche immer dieselbe Lage behält, und für welche die Coordinaten ξ, η, ζ einerley sind *).

Denn da man für irgend eine Lage des Körpers überhaupt die Formeln

$$\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi'',$$

$$\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta''',$$

$$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta'''$$

hat, und man annimmt, daß in einer andern Lage desselben die Größen ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', etc. sich verwandlen in ξ_1, η_1, ζ_1, ξ'_1, η'_1, ζ'_1 etc. so hat man für diese neue Lage:

$$\xi_1 = a\xi'_1 + b\xi''_1 + c\xi'''_1,$$

$$\eta_1 =$$

*) Der Erfinder dieses schönen Satzes der Mechanik war Hr. Leonhard Euler, der ihn in den Nova act. Acad. Imper. Petrop. vorgetragen und gehörig erwiesen hat. Für eine unendlich kleine Rotation war dieser Satz von selbst in die Augen fallend, und eben daher schon lange vorher den Geometern bekannt. Hr. Euler aber erwies ihn zuerst für jede endliche Umdrehungsbewegung, und machte ihn eben dadurch so anwendbar. M.

Digitized by Google

$$\eta_1 = a\eta'_1 + b\eta''_1 + c\eta'''_1,$$

$$\zeta_1 = a\zeta'_1 + b\zeta''_1 + c\zeta'''_1;$$

und befinden sich im Körper Punkte, die ihre Stelle nicht verändern; so hat man offenbar für jeden dieser Punkte die Bedingungsgleichungen

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \zeta = \zeta_1.$$

Alle Punkte dieser Art werden also durch diese 3 Gleichungen bestimmt seyn

$$\xi - \xi_1 = 0, \quad \eta - \eta_1 = 0,$$

$$\zeta - \zeta_1 = 0;$$ Es ist nämlich alsdenn

$$a(\xi' - \xi'_1) + b(\xi'' - \xi''_1) + c(\xi''' - \xi'''_1) = 0,$$

$$a(\eta' - \eta'_1) + b(\eta'' - \eta''_1) + c(\eta''' - \eta'''_1) = 0,$$

$$a(\zeta' - \zeta'_1) + b(\zeta'' - \zeta''_1) + c(\zeta''' - \zeta'''_1) = 0.$$

Die aus diesen Gleichungen gezogene Werthe von a, b, c geben also die Lage dieser Punkte in dem Körper. Aber es ist klar, daß wenn man 2 dieser 3 unbekannten Größen a, b, c wegschafft, eben dies auch mit der 3ten angehen wird; die Gleichung, die man erhält, muß folglich an und für sich schon statt haben, und sie findet, wie man eben gesehn hat, würklich statt.

20) Ich addire in dieser Hinsicht die 3 vorhergehenden Gleichungen zusammen, nachdem ich sie respektiv durch $\xi' + \xi'_1$, $\eta' + \eta'_1$, $\zeta' + \zeta'_1$, multiplicirt habe, und indem man auf die Bedingungsgleichungen (13) und auf die ähnlichen Gleichungen sieht, die zwischen ξ_1, η_1, etc. statt finden müssen.

Man bekommt hiedurch

$$0 = b(\xi''\xi'_1 + \eta''\eta'_1 + \zeta''\zeta'_1 - \xi'\xi''_1 - \eta'\eta''_1 - \zeta'\zeta''_1) + c(\xi'''\xi'_1 + \eta'''\eta'_1 + \zeta'''\zeta'_1 - \xi'\xi'''_1 - \eta'\eta'''_1 - \zeta'\zeta'''_1).$$

Digitized by Google

Addirt man dieselben Gleichungen zu einander, nachdem man sie respektiv durch $\xi'' + \xi''_1$, $\eta'' + \eta''_1$, $\zeta'' + \zeta''_1$ multiplicirt hat; so findet man auf eben die Art:

$$0 = a(\xi'\xi'''_1 + \eta'\eta''_1 + \zeta'\zeta'''_1 - \xi'''\xi'_1 - \eta'''\eta'_1 - \zeta'''\zeta')$$
$$+ b(\xi''\xi'''_1 + \eta''\eta'''_1 + \zeta''\zeta'''_1 - \xi'''\xi''_1 - \eta'''\eta''_1$$
$$- \zeta'''\zeta''_1).$$

Diese veränderte Gleichungen sind offenbar mit den vorgesetzten einerley; macht man daher Kürze halber:

$$2P = \xi'''\xi''_1 + \eta'''\eta''_1 + \zeta'''\zeta''_1 - \xi''\xi'''_1 - \eta''\eta'''_1 - \zeta''\zeta'''_1,$$
$$2Q = \xi'\xi'''_1 + \eta'\eta'''_1 + \zeta'\zeta'''_1 - \xi'''\xi'_1 - \eta'''\eta'_1 - \zeta'''\zeta'_1,$$
$$2R = \xi''\xi'_1 + \eta''\eta'_1 + \zeta''\zeta'_1 - \xi'\xi''_1 - \eta'\eta''_1 - \zeta'\zeta''_1;$$

so hat man diese 3 Gleichungen aufzulösen:

$$bR - cQ = 0,$$
$$cP - aR = 0,$$
$$aQ - bP = 0,$$

wovon die 3te, wie man sieht, eine Folge der beiden erstern ist. Diese geben:

$$\frac{b}{c} = \frac{Q}{R},$$
$$\frac{a}{c} = \frac{P}{R};$$

woraus man zieht $a = hP$, $b = hQ$, $c = hR$, wenn man für h eine willkührliche Größe annimmt.

21) Dies sind also die Werthe der Coordinaten a, b, c für alle Punkte des Körpers, die sich nach der Umdrehung des Körpers um sein Centrum, das unbeweglich angenommen worden ist, in derselben Lage befin-

Digitized by Google

befinden, und es ist klar, daß diese Coordinaten zu einer Linie gehören werden, die durch diesen Mittelpunkt geht, und mit ihren Achsen Winkel bildet, deren Cosinus sind

$$\frac{P}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}}, \quad \frac{Q}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}}, \quad \frac{R}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

So zusammengesetzt daher auch die Rotation des Körpers seyn mag; so wird sie doch zuletzt einer einfachen Rotation um die eben genannte Linie, die als fest angenommen worden ist, gleich seyn, und man kann folglich diese Linie Umdrehungsachse des Körpers nennen.

22) Die Lage dieser Achse in Beziehung auf die Achsen der Coordinaten a, b, c kann man also vermittelst der 3 Größen, wie man gesehn hat, bestimmen. Wollte man aber diese Lage auf die Achsen der Coordinaten ξ, η, ζ beziehen; so hätte man nur in den Ausdrücken dieser Coordinaten (12) anstatt a, b, c ihre Werthe hP, hQ, hR, zu substituiren; welches geben würde $\xi = hL$, $\eta = hM$, $\zeta = hN$, wenn man Kürze halber setzt:

$$L = \xi' P + \xi'' Q + \xi''' R,$$

$$M = \eta' P + \eta'' Q + \eta''' R,$$

$$N = \zeta' P + \zeta'' Q + \zeta''' R.$$

Diese Werthe von ξ, η, ζ entsprechen folglich allen Punkten der Umdrehungsachse, diese macht daher mit denen der Coordinaten ξ, η, ζ Winkel, deren Cosinus respektiv durch

$$\frac{L}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}, \quad \frac{M}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}, \quad \frac{N}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}$$

ausgedrückt werden.

Die Größen L, M, N sind daher völlig mit den Größen P, Q, R analog, jedoch mit dem Unterschiede, daß da diese sich auf die bewegliche Achsen,

Digitized by Google

Achsen der Coordinaten a, b, c beziehen, jene zu den beweglichen Achsen der gegebenen Coordinaten ξ, η, ζ gehören. Ausserdem ist

$$L^2 + M^2 + N^2 = P^2 + Q^2 + R^2,$$

welches daraus folgt, daß man allgemein hat:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Substituirt man übrigens in den Ausdrücken der Größen L, M, N die Werthe von P, Q, R, (20) und bedient sich dabey der Reduktionen (16); so hat man:

$$2L = \eta' \zeta'_1 + \eta'' \zeta''_1 + \eta''' \zeta'''_1 - \zeta' \eta'_1 - \zeta'' \eta''_1 - \zeta''' \zeta'''_1,$$

$$2M = \zeta' \xi'_1 + \zeta'' \xi''_1 + \zeta''' \xi'''_1 - \xi' \zeta'_1 - \xi'' \zeta''_1 - \xi''' \zeta'''_1,$$

$$2N = \xi' \eta'_1 + \xi'' \eta''_1 + \xi''' \eta'''_1 - \eta' \xi'_1 - \eta'' \xi''_1 - \eta''' \xi'''_1.$$

23) Betrachtet man nur die Bewegung des Körpers in einem Augenblick; so wird während desselben die eben genannten Umdrehungsachse fest seyn, und der Körper sich würklich und nach Willkühr um diese Achse drehen, welche folglich die willkührliche Rotationsachse des Körpers, wie man sie gewöhnlich nennt, (l'axe spontanée de rotation) seyn wird.

Um nun diese Achse zu bestimmen; so nimmt man die Größen ξ'_1, η'_1, ζ'_1, ξ''_1, etc. als unendlich wenig von ξ', η', ζ', ξ'', etc. verschieden an, so daß man hat:

$$\xi'_1 = \xi' + d\xi',$$

$$\eta'_1 = \eta' + d\eta',$$

$$\zeta'_1 = \zeta' + d\zeta',$$

$$\xi''_1 = \xi'' + d\xi'',$$

etc.

welches giebt (20)

$$2P = \xi''' d\xi'' + \eta''' d\eta'' + \zeta''' d\zeta'' - \xi'' d\xi''' - \eta'' d\eta''' - \zeta'' d\zeta''',$$

2Q

Digitized by Google

$$2\,Q = \xi' d\xi''' + \eta' d\eta''' + \zeta' d\zeta''' - \xi''' d\xi' - \eta''' d\eta' - \zeta''' d\zeta',$$

$$2\,R = \xi'' d\xi' + \eta'' d\eta' + \zeta'' d\zeta' - \xi' d\xi'' - \eta' d\eta'' - \zeta' d\zeta''.$$

Aber durch die Differentiation der 3 letztern Bedingungsgleichungen erhält man

$$\xi' d\xi'' + \eta' d\eta'' + \zeta' d\zeta'' = - \xi'' d\xi' - \eta'' d\eta' - \zeta'' d\zeta',$$

$$\xi''' d\xi' + \eta''' d\eta' + \zeta''' d\zeta' = - \xi' d\xi''' - \eta' d\eta''' - \zeta' d\zeta''',$$

$$\xi'' d\xi''' + \eta'' d\eta''' + \zeta'' d\zeta''' = - \xi''' d\xi'' - \eta''' d\eta'' - \zeta''' d\zeta'';$$

und substituirt man diese Werthe und verwandelt, um alles homogen zu machen, P, Q, R in dP, dQ, dR; so erhält man:

$$dP = \xi''' d\xi'' + \eta''' d\eta'' + \zeta''' d\zeta'',$$

$$dQ = \xi' d\xi''' + \eta' d\eta''' + \zeta' d\zeta''',$$

$$dR = \xi'' d\xi' + \eta'' d\eta' + \zeta'' d\zeta'.$$

Folglich sind

$$\frac{dP}{\sqrt{(dP^2 + dQ^2 + dR^2)}}, \quad \frac{dQ}{\sqrt{(dP^2 + dQ^2 + dR^2)}}, \quad \frac{dR}{\sqrt{(dP^2 + dQ^2 + dR^2)}}$$

die Cosinus der Winkel, die die willkührliche Umdrehungsachse mit den Achsen der Coordinaten a, b, c (21) macht.

24) Verrichtet man dieselben Substitutionen in den Ausdrücken von L, M, N (22), und sieht auf die 3 letzten differentiirten Bedingungsgleichungen (15); so erhält man, wenn man L, M, N in dL, dM, dN umändert, folgende Formeln:

$$dL = \eta' d\zeta' + \eta'' d\zeta'' + \eta''' d\zeta''',$$

$$dM = \zeta' d\xi' + \zeta'' d\xi'' + \zeta''' d\xi''',$$

$$dN = \xi' d\eta' + \xi'' d\eta'' + \xi''' d\eta''',$$

Digitized by Google

wodurch man die Lage der willkührlichen Umdrehungsachse in Ansehung der Coordinaten ξ, η, ζ bestimmen kann, denn die erstere dieser Achsen macht mit den 3 andern Winkel, deren Cosinus seyn werden:

$$\frac{dL}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}}, \quad \frac{dM}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}},$$

$$\frac{dN}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}};$$

Und will man haben, daß die Werthe von dL, dM, dN von denen von dP, dQ, dR abhängen sollen, so erhält man wie (22) die Formeln

$$dL = \xi' dP + \xi'' dQ + \xi''' dR,$$

$$dM = \eta' dP + \eta'' dQ + \eta''' dR,$$

$$dN = \zeta' dP + \zeta'' dQ + \zeta''' dR;$$

welche wegen der Bedingungsgleichungen (13) sogleich geben:

$$dL^2 + dM^2 + dN^2 = dP^2 + dQ^2 + dR^2.$$

25) Die Größen dL, dM, dN haben noch einen andern Nutzen in der Bestimmung der Bewegung des Körpers, sie dienen dazu auf eine einfache Art die Differentialien der Coordinaten ξ, η, ζ zu bestimmen. Denn wenn man die Formeln (12) differentiirt, indem man immer dabey a, b, c als beständig der Natur der festen Körper gemäs ansieht; so hat man sogleich

$$d\xi = a\,d\xi' + b\,d\xi'' + c\,d\xi''',$$

$$d\eta' = a\,d\eta' + b\,d\eta'' + c\,d\eta''',$$

$$d\zeta = a\,d\zeta' + b\,d\zeta'' + c\,d\zeta''';$$

und substituirt man in diesen Formeln die (15) gefundenen Ausdrücke von a, b, c und hat zugleich auf die differentiirten Bedingungsgleichungen (15) Acht; so hat man sogleich (24)

$d\xi$

Digitized by Google

$$d\xi = \zeta dM - \eta dN,$$
$$d\eta = \xi dN - \zeta dL,$$
$$d\zeta = \eta dL - \xi dM,$$

welche Gleichungen vollkommen denen (3) ähnlich sind, und folglich zeigen, daß die Größen dL, dM, dN auf beiden Seiten einerley sind.

26) Diese Formeln sind auch von derselben Form als die (1. Theil 3 Abschn. 7.) durch die Betrachtung der besondern Umdrehungen um 3 Achsen der Coordinaten; woraus man sogleich den Schluß ziehen kann, 1) daß die Größen dL, dM, dN die durch den Körper um die Achsen der Coordinaten ξ, η, ζ beschriebenen Elementarwinkel sind; und da die Größen dP, dQ, dR, in Ansehung der Achsen der Coordinaten a, b, c das sind, was dL, dM, dN in Ansehung der Achsen der ξ, η, ζ sind; so folgt auch, daß dP, dQ, dR die um die Achsen der a, b, c beschriebenen Elementarwinkel sind. 2) Daß diese besonderen Rotationen sich auf eine einzige um eine Achse bringen lassen, die mit denen der Coordinaten ξ, η, ζ oder a, b, c Winkel bildet, deren Cosinus sind

$$\frac{dL}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}}, \quad \frac{dM}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}},$$
$$\frac{dN}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}},$$

oder $\frac{dP}{\sqrt{(dP^2 + dQ^2 + dR^2)}}, \quad \frac{dQ}{\sqrt{(dP^2 + dQ^2 + dR^2)}},$
$$\frac{dR}{\sqrt{(dP^2 + dQ^2 + dR^2)}},$$

wie wir schon oben gesehen haben. 3) Daß der um diese Achse beschriebene Elementarwinkel durch

$$\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)} \text{ oder } \sqrt{(dP^2 + dQ^2 + dR^2)}$$

Digitized by Google

ausgedrückt ist, indem diese beiden Größen nach (24) einander gleich sind.

27) Wir haben eben die Differentialien $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ auf eine sehr einfache Art durch die Größen dL, dM, dN ausgedrückt, man kann sie aber auch auf gleiche Art durch die analogen Größen dP, dQ, dR ausdrücken, und man hat zu diesem Zwecke nur anstatt dieser Größen ihre durch die letztern Formeln (24) gegebenen Werthe zu substituiren.

Man bekommt hiedurch folgende veränderte Ausdrücke:

$$d\xi = (\zeta\eta' - \eta\zeta')\,dP + (\zeta\eta'' - \eta\zeta'')\,dQ + (\zeta\eta''' - \eta\zeta''')\,dR,$$

$$d\eta = (\xi\zeta' - \zeta\xi')\,dP + (\xi\zeta'' - \zeta\xi'')\,dQ + (\xi\zeta''' - \zeta\xi''')\,dR,$$

$$d\zeta = (\eta\xi' - \xi\eta')\,dP + (\eta\xi'' - \xi\eta'')\,dQ + (\eta\xi''' - \xi\eta''')\,dR.$$

Setzt man nun statt ξ, η, ζ ihre (12) gefundenen Werthe, und sieht auf die Reduktionen (16); so verwandlen sich diese Ausdrücke in folgende:

$$d\xi = (b\xi''' - c\xi'')\,dP + (c\xi' - a\xi''')\,dQ + (a\xi'' - b\xi')\,dR,$$

$$d\eta = (b\eta''' - c\eta'')\,dP + (c\eta' - a\eta''')\,dQ + (a\eta'' - b\eta')\,dR,$$

$$d\zeta = (b\zeta''' - c\zeta'')\,dP + (c\zeta' - a\zeta''')\,dQ + (a\zeta'' - b\zeta')\,dR.$$

Und da diese Ausdrückungen mit denen, die man, wenn man eben diese Formeln (12) sogleich differentiirte, erhalten würde, einerley seyn müssen, so erhält man durch die Vergleichung der Glieder, worin a, b, c vorkommen

$$d\xi' = \xi''\,dR - \xi'''\,dQ,$$

$$d\xi'' = \xi'''\,dP - \xi'\,dR,$$

$$d\xi''' = \xi'\,dQ - \xi''\,dP,$$

$$d\eta' = \eta''\,dR - \eta'''\,dQ,$$

$d\eta''$

Digitized by Google

$$d\eta' = \eta''' dP - \eta' dR,$$
$$d\eta''' = \eta' dQ - \eta'' dP,$$
$$d\zeta' = \zeta'' dR - \zeta''' dQ,$$
$$d\zeta'' = \zeta''' dP - \zeta' dR,$$
$$d\zeta''' = \zeta' dQ - \zeta'' dP.$$

28) Die vorhergehenden Ausdrückungen von $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ wurden gefunden, indem man a, b, c als beständig annahm. Wollte man darin auch diese Größen als veränderlich annehmen; so hätte man nur zu diesen Ausdrückungen, die zu den Differenzen von a, b, c gehören, zu addiren; und die Formeln (12) würden zeigen, daß diese Glieder seyen

$$\xi' da + \xi'' db + \xi''' dc,$$
$$\eta' da + \eta'' db + \eta''' dc,$$
$$\zeta' da + \zeta'' db + \zeta''' dc.$$

Man bekäme alsdenn für die vollkommenen Werthe von $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$

$$d\xi = \xi' (cdQ - bdR + da) + \xi'' (adR - cdP + db) + \xi''' (bdP - adQ + dc),$$
$$d\eta = \eta' (cdQ - bdR + da) + \eta'' (adR - cdP + db) + \eta''' (bdP - adQ + dc),$$
$$d\zeta = \zeta' (cdQ - bdR + da) + \zeta'' (adR - cdP + db) + \zeta''' (bdP - adQ + dc),$$

Digitized by Google

Diese Formeln sind wegen ihrer Einfachheit und Gleichförmigkeit sehr merkwürdig, und haben ausserdem noch das eigene, daß die Größen ξ', η', etc. völlig in der Größe

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

verschwinden; denn wegen der Bedingungsgleichungen (13) hat man auf eine sehr einfache Art

$$\begin{aligned} d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = {} & (c\,dQ - b\,dR + da)^2 + \\ & (a\,dR - c\,dP + db)^2 + \\ & (b\,dP - a\,dQ + dc)^2, \end{aligned}$$

welcher Ausdruck uns in der Folge von großem Nutzen seyn wird.

29) Wir haben schon (18) gezeigt, wie man alle Größen ξ', η', ζ', ξ'', etc. durch Sinus und Cosinus dreier unbestimmter Winkel rational ausdrücken kann; es ist aber noch ein geraderer und natürlicherer Weg vorhanden, zu eben diesen Reduktionen zu gelangen, und dieser besteht darin, daß man die bekannten Umänderungen der rechtwinklichten Coordinaten anwendet.

Denn weil ξ, η, ζ die rechtwinklichten Coordinaten eines gewissen Punkts des Körpers in Ansehung dreier durch desselben Mittelpunkt den festen Achsen der Coordinaten x, y, z parallel gezogenen Achsen sind, und a, b, c die rechtwinklichten Coordinaten eben dieses Punkts in Ansehung dreier andern durch eben diesen Mittelpunkt gehenden, aber inwendig im Körper festen Achsen sind, und folglich veränderliche Lagen in Ansehung der Achsen der ξ, η, ζ haben; so hat man, um die Ausdrückungen von ξ, η, ζ in a, b, c zu erhalten, nur auf die allgemeinste Art diese letztern Coordinaten in die andern zu verwandeln.

Wir wollen in dieser Absicht ω den Winkel nennen, den die Ebene der a, b mit der ξ, η macht, und ψ den Winkel, den der Durchschnitt dieser beiden Ebenen mit der Achse der ξ macht; endlich wollen wir durch φ den Winkel bestimmen, den die Achse der a mit eben dieser Durchschnitts-

Digitized by Google

schnittslinie macht; diese 3 Größen ω, ψ, φ werden alsdenn, wie man sieht, dazu dienen, die Lage der Achsen der Coordinaten a, b, c in Ansehung der Achsen der Coordinaten ξ, η, ζ zu bestimmen; und durch ihre Hülfe kann man diese letztern durch die andern bestimmen.

Stellt man sich, um die Ideen zu fixiren, vor, der vorgesetzte Körper sey die Erde, und die Ebene der a, b die des Aequators, und die Achse der a gehe durch einen gegebenen Mittagskreis, ferner die Ebene der ξ, η sey die der Ecliptik und die Achse der ξ sey nach dem ersten Punkt des Widders zugekehrt; so ist klar, daß der Winkel ω die Schiefe der Ecliptik wird, ferner daß der Winkel ψ die Länge der Herbst-Nachtgleichen oder des aufsteigenden Knotens des Aequators auf der Ecliptik, und daß φ die Distanz des gegebenen Meridians bey dieser Nachtgleiche sey.

φ ist also überhaupt der Winkel, den der Körper beschreibt, indem er sich um die Achse der Coordinaten c dreht, die man deswegen nur Achse des Körpers nennen kann; ferner ist alsdenn $90 - \omega$ der Neigungswinkel dieser Achse zur festen Ebene der Coordinaten ξ, η und $\psi - 90^{\circ}$ der Winkel, den die Projektion eben dieser Achse mit der Achse der Coordinaten ξ macht.

30) Dies vorausgesetzt, wollen wir sogleich annehmen, die beiden Coordinaten, a, b verwandelten sich in 2 andere a′, b′, die in eben dieser Ebene liegen, so daß die Achse der a′ im Durchschnitt der beiden Ebenen und die der b′ senkrecht auf diesen Durchschnitt sey; alsdenn ist

$$a' = a \operatorname{Cos} \varphi - b \operatorname{sin} \varphi,$$

$$b' = b \operatorname{Cos} \varphi + a \operatorname{sin} \varphi.$$

Wir wollen nun setzen, die beiden Coordinaten b′, c verwandelten sich in 2 andere b″, c′, wovon die eine b″ auf den Durchschnitt der Ebenen allezeit senkrecht aber in der Ebene der ξ, η, die andere c′ aber senkrecht auf dieser letztern Ebene sey; alsdenn findet man gleichermasen

b″

Digitized by Google

$$b'' = b' \operatorname{Cof} \omega - c \operatorname{fin} \omega,$$
$$c' = c \operatorname{Cof} \omega + b' \operatorname{fin} \omega.$$

Endlich wollen wir annehmen, man verwandle die Coordinaten a', b'', die ſchon in der Ebene der ξ, η, ſind, in 2 andere a'', b''', die in eben dieſer Ebene ſich befinden, aber ſo beſchaffen ſind, daß die Achſe der a'' mit der Achſe der ξ zuſammenfällt; alsdenn findet man auf eben die Art

$$a'' = a' \operatorname{Cof} \psi - b'' \operatorname{fin} \psi,$$
$$b''' = b'' \operatorname{Cof} \psi + a' \operatorname{fin} \psi.$$

Es iſt offenbar, daß die 3 Coordinaten a'', b''', c' einerley mit den Coordinaten ξ, η, ζ ſind, indem ſie auf einerley Achſen bezogen ſind.

Subſtituirt man daher nach und nach die Werthe von a', b'', b'; ſo erhält man die Ausdrückungen von ξ, η, ζ in a, b, c, die von eben der Form ſeyn werden, als die (12), wenn man ſetzt

$$\xi' = \operatorname{Cof} \varphi \operatorname{Cof} \psi - \operatorname{fin} \varphi \operatorname{fin} \psi \operatorname{Cof} \omega,$$
$$\xi'' = - \operatorname{fin} \varphi \operatorname{Cof} \psi - \operatorname{Cof} \varphi \operatorname{fin} \omega,$$
$$\xi''' = \operatorname{fin} \psi \operatorname{fin} \omega,$$
$$\eta' = \operatorname{fin} \varphi \operatorname{fin} \psi + \operatorname{fin} \varphi \operatorname{Cof} \psi \operatorname{Cof} \omega,$$
$$\eta'' = - \operatorname{fin} \varphi \operatorname{fin} \psi + \operatorname{Cof} \varphi \operatorname{Cof} \psi \operatorname{Cof} \omega,$$
$$\eta''' = - \operatorname{Cof} \psi \operatorname{fin} \omega,$$
$$\zeta' = \operatorname{fin} \varphi \operatorname{fin} \omega,$$
$$\zeta'' = \operatorname{Cof} \varphi \operatorname{fin} \omega,$$
$$\zeta''' = \operatorname{Cof} \omega.$$

(Denn alsdenn iſt

$$a'' = a' \operatorname{Cof} \psi - b'' \operatorname{fin} \psi,$$
$$= [a \operatorname{Cof} \varphi - b \operatorname{fin} \varphi] \operatorname{Cof} \psi - [b' \operatorname{Cof} \omega - c \operatorname{fin} \omega] \operatorname{fin} \psi$$
$$=$$

Digitized by Google

$$= [a \operatorname{Cof}\varphi - b \operatorname{fin}\varphi] \operatorname{Cof}\psi - [b \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{fin}\psi + a \operatorname{fin}\varphi \operatorname{fin}\psi] \operatorname{Cof}\omega + c \operatorname{fin}\omega \operatorname{fin}\psi,$$

$$= a \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{Cof}\psi - b \operatorname{fin}\varphi \operatorname{Cof}\psi - b \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{fin}\psi \operatorname{Cof}\omega + a \operatorname{fin}\varphi \operatorname{fin}\psi \operatorname{Cof}\omega + c \operatorname{fin}\omega \operatorname{fin}\psi,$$

$$= a [\operatorname{Cof}\varphi \operatorname{Cof}\psi - \operatorname{fin}\varphi \operatorname{fin}\psi \operatorname{Cof}\omega] - b [\operatorname{fin}\varphi \operatorname{Cof}\psi + \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{fin}\psi \operatorname{Cof}\omega] + c \operatorname{fin}\psi \operatorname{fin}\omega.$$

Ebenſo $b''' = b'' \operatorname{Cof}\psi + a' \operatorname{fin}\psi,$

$$= [b' \operatorname{Cof}\omega - c \operatorname{fin}\omega] \operatorname{Cof}\psi + [a \operatorname{Cof}\varphi - b \operatorname{fin}\varphi] \operatorname{fin}\psi$$

$$= b \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{Cof}\omega \operatorname{Cof}\psi + a \operatorname{fin}\varphi \operatorname{Cof}\omega \operatorname{Cof}\psi - c \operatorname{fin}\omega \operatorname{fin}\psi + a \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{fin}\psi - b \operatorname{fin}\varphi \operatorname{fin}\psi$$

$$= a [\operatorname{Cof}\varphi \operatorname{fin}\psi + \operatorname{fin}\varphi \operatorname{Cof}\psi \operatorname{Cof}\omega] - b [\operatorname{fin}\varphi \operatorname{fin}\psi + \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{Cof}\psi \operatorname{Cof}\omega] - c \operatorname{Cof}\psi \operatorname{fin}\omega.$$

Und $c' = c \operatorname{Cof}\omega + b' \operatorname{fin}\omega,$

$$= c \operatorname{Cof}\omega + b \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{fin}\omega + a \operatorname{fin}\varphi \operatorname{fin}\omega$$

$$= a \operatorname{fin}\varphi \operatorname{fin}\omega + b \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{fin}\omega + c \operatorname{Cof}\omega.$$ M.)

Dieſe Werthe thun auch den 6 Bedingungsgleichungen (13) genug ſowie denen (15) und löſen dieſe Gleichungen in allem ihren Umfange auf, indem ſie 3 unbeſtimmte veränderliche Größen enthalten, als φ, ψ und ω.

31) Subſtituirt man nun dieſe Werthe in den Ausdrückungen der Größen dP, dQ, dR, (23); ſo hat man, wenn man die gewöhnlichen Reduktionen der Sinus und Coſinus verrichtet

$$dP = (\xi''' d\xi'' + \eta''' d\eta'' + \zeta''' d\zeta'' =$$

$\operatorname{fin}\psi$

Digitized by Google

$\sin\psi \sin\omega [\sin\varphi \sin\psi\, d\psi - \cos\psi \cos\varphi\, d\varphi + \cos\varphi \sin\psi \sin\omega\, d\omega - \cos\varphi \cos\omega \cos\psi\, d\psi + \sin\psi \cos\omega \sin\varphi\, d\varphi]$
$+ \cos\psi \sin\omega [\sin\varphi \cos\psi\, d\psi + \sin\psi \cos\varphi\, d\varphi$
$+ \cos\varphi \cos\psi \sin\omega\, d\omega + \cos\varphi \cos\omega \sin\psi\, d\psi + \cos\psi \cos\omega \sin\varphi\, d\varphi]$
$+ \cos\omega \cos\varphi \cos\omega\, d\omega - \cos\omega \sin\omega \sin\varphi\, d\varphi$
$= \mathfrak{M}.) \sin\varphi \sin\omega\, d\psi + \cos\varphi\, d\omega,$

$dQ = (\xi' d\xi''' + \eta' d\eta''' + \zeta' d\zeta''' =$
$[\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\omega] [\sin\varphi \cos\omega\, d\omega + \sin\omega \sin\psi\, d\psi] + [\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\omega] [\sin\omega \sin\psi\, d\psi - \cos\psi \cos\omega\, d\omega] - \sin\varphi \sin^2\omega\, d\omega. = \mathfrak{M}.)$
$\cos\varphi \sin\omega\, d\psi - \sin\varphi\, d\omega,$

$dR = (\xi'' d\xi' + \eta'' d\eta' + \zeta''' d\zeta' =$
$- [\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\omega] [\sin\varphi \sin\psi \sin\omega\, d\omega - \sin\varphi \cos\omega \cos\psi\, d\psi - \sin\psi \cos\omega \cos\varphi\, d\varphi - \cos\varphi \sin\psi\, d\psi - \cos\psi \sin\varphi\, d\varphi] + [\cos\varphi \cos\psi \cos\omega - \sin\varphi \sin\psi][\cos\varphi \cos\psi\, d\psi - \sin\varphi \sin\psi\, d\varphi + \cos\psi \cos\omega \cos\varphi\, d\varphi - \sin\varphi \sin\psi \cos\omega\, d\psi - \sin\varphi \cos\psi \sin\omega\, d\omega] + \cos^2\omega \sin\varphi\, d\omega + \cos\omega \sin\omega \cos\varphi\, d\varphi. = \mathfrak{M}.)$
$d\varphi + \cos\omega\, d\psi.$

Verrichtet man eben dieſe Subſtitutionen in den Ausdrückungen der Größen dL, dM, dN (24); ſo findet man

$dL = \sin\psi \sin\omega\, d\varphi + \cos\psi\, d\omega,$
$dM = - \cos\psi \sin\omega\, d\varphi + \sin\psi\, d\omega,$
$dN = \cos\omega\, d\varphi + d\psi.$

Durch

Digitized by Google

Durch diese Formeln kann man also die Elemente der augenblicklichen Umdrehung des Körpers um die willkührliche Achse bestimmen, wenn man die Umdrehung des Körpers um seine Achse, und die Lage dieser Achse im Raume kennt.

32) Man muß diese beiden Achsen und die darauf sich beziehenden Umdrehungsbewegungen wohl unterscheiden.

Wir haben eben die Bewegung des Körpers um seinen Mittelpunkt durch die 3 Winkel φ, ω, ψ, vorgestellt, wovon der erste φ den durch den Körper beschriebenen Winkel ausdrückt, indem er sich um eine gerade Linie oder Achse dreht, die durch diesen Mittelpunkt geht, und eine beständige Lage in Ansehung der verschiedenen Punkte des Körpers hat, die aber übrigens mit ihm beweglich sey; der 2te Winkel ω dient dazu, die Neigung dieser Achse zur Ebene der Coordinaten ξ, η zu bestimmen, deren Richtung als gegeben und im Raume fest angenommen ist, und diese Neigung ist durch den Winkel $90° - \omega$ ausgedrückt; endlich drückt der dritte Winkel ψ die Lage der Projektion der nämlichen Achse auf dieser Ebene aus, indem sie mit der Achse der Abscissen ξ einen Winkel $= \psi - 90°$ macht.

Da aber diese Umdrehungsachse mit dem Körper beweglich ist; so ist sie nicht die wahre Achse, um welche der Körper sich würklich in jedem Augenblicke dreht, diese ist diejenige, die wir willkührliche Umdrehungsachse genannt haben, und deren Lage im Raume von den Größen dL, dM, dN (24) abhängt. Hat man nun oben die Werthe dieser Größen in φ, ψ und ω gefunden; so ist leicht auch die Lage eben dieser Achse und den Umdrehungswinkel um sie durch die den Winkeln φ, ψ, ω analoge Winkel, die wir deswegen durch φ', ψ', ω' bezeichnen wollen, zu bestimmen. Denn da die Ausdrückungen von dL, dM, dN in φ, ψ, ω für jede Lage der Achse des Körpers allgemein sind; so werden sie auch für die willkührliche Achsenumdrehung gelten, wenn man nur φ, ψ, ω in φ', ψ', ω' verwandelt; allein da die Eigenschaft dieser letztern Achse ist, daß sie während eines Augenblicks unbeweglich ist; so müssen die Differentialien $d\psi'$, $d\omega'$,

Digitized by Google

die sich auf die Veränderung der Lage dieser Achse beziehen = o seyn, so daß man in Ansehung dieser Achse hat

$$dL = \sin\psi' \sin\omega' \, d\varphi',$$

$$dM = -\cos\psi' \sin\omega' \, d\varphi',$$

$$dN = \cos\omega' \, d\varphi',$$

Vergleicht man daher diese neuen Ausdrückungen von dL, dM, dN mit dem erstern; so erhält man folgende 3 Gleichungen

$$\sin\psi' \sin\omega' \, d\varphi' = \sin\psi \sin\omega \, d\varphi + \cos\psi \, d\omega,$$

$$\cos\psi' \sin\omega' \, d\varphi' = \cos\psi \sin\omega \, d\varphi - \sin\psi \, d\omega,$$

$$\cos\omega' \, d\varphi' = \cos\omega \, d\varphi + d\psi,$$

welche dazu dienen werden, die auf die willkührliche Umdrehungsachse sich beziehenden Elemente durch diejenigen zu bestimmen, die zur Achse des Körpers selbst gehören, oder gegentheils diese durch jene; welches bey verschiedenen Gelegenheiten von großem Nutzen seyn wird.

§. II.

Gleichungen für die Umdrehungsbewegung eines festen Körpers von irgend einer Figur, der durch gewisse Kräfte getrieben wird.

33) Wir haben so eben im vorhergehenden § gesehn, daß, wie auch die Bewegung beschaffen seyn mag, die ein fester Körper hat, sie doch nur von 6 veränderlichen Größen abhängt, wovon 3 sich auf die Bewegung eines einzigen Punkts des Körpers beziehen, den wir den Mittelpunkt des Körpers genannt haben, und wovon die 3 andern zur Bestimmung der Umdrehungsbewegung um diesen Mittelpunkt dienen. Hieraus folgt, daß die zu findenden Gleichungen nur 6 an der Zahl höchstens seyn können, und es ist klar, daß man diese Gleichungen folglich von denen ableiten kann, die wir (Abschn. 3. Art. 2, 6, 8.) bereits gegeben haben, welche für das ganze System von Körpern allgemein gelten. Man unter-

Digitized by Google

unterscheide hier aber 2 Fälle, erstlich, wenn der Körper ganz frey ist, zum andern, wenn er sich um einen festen Punkt bewegen muß.

34) Wir wollen zuerst einen festen völlig freyen Körper betrachten, und seinen Mittelpunkt im Schwerpunkte desselben selbst annehmen. Es seyen x', y', z' die 3 rechtwinklichten Coordinaten dieses Mittelpunkts, m die ganze Masse des Körpers, dm jedes ihrer Elemente, und X, Y, Z die beschleunigenden Kräfte, die auf jeden Punkt dieses Elements nach den Richtungen eben dieser Coordinaten würken; alsdenn haben wir zuerst folgende Gleichungen (Abschn. 3. Art. 3.)

$$\frac{d^2x'}{dt^2}\,m + SXdm = 0,$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2}\,m + SYdm = 0,$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2}\,m + SZdm = 0,$$

wo die Carakterisik S die ganzen Integrale in Beziehung auf die ganze Masse des Körpers andeutet. Diese Gleichungen nun dienen, wie man sieht, dazu, die Bewegung des Mittelpunkts der Schwere zu bestimmen.

Bezeichnet man zweitens durch ξ, η, ζ die rechtwinklichten vom Mittelpunkt der Schwere angenommenen, und eben den Coordinaten x', y', z' dieses Mittelpunkts parallelen Coordinaten jedes Elements dm; so erhält man folgende 3 andere Gleichungen (Abschn. 3. Art. 8.)

$$S\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi Y - \eta X\right)dm = 0,$$

$$S\left(\xi\frac{d^2\xi}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi Z - \zeta X\right)dm = 0,$$

$$S\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta Z - \zeta Y\right)dm = 0.$$

Digitized by Google

Wir haben aber im vorigen § erwiesen, daß die Werthe der Grössen ξ, η, ζ allezeit von dieser Form sind:

$$\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi''',$$

$$\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta''',$$

$$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta'''';$$

und wir haben da ebenfals gesehn, daß für die festen Körper die Größen a, b, c nothwendig beständig in Ansehung der Zeit, und allein veränderlich in Ansehung der verschiedenen Elemente dm sind, indem diese Größen die rechtwinklichten Coordinaten jedes dieser Elemente ausdrücken, in Beziehung auf die 3 Achsen, die im Mittelpunkte des Körpers sich durchkreuzen, und inwendig in demselben fest sind. Gegentheils aber haben wir auch gesehn, daß die Größen ξ', ξ'', etc. in Ansehung der Zeit veränderlich und für alle Elemente des Körpers beständig sind, indem diese Größen insgesammt Funktionen der 3 Winkel φ, ψ, ω sind, welche die verschiedenen Umdrehungsbewegungen bestimmen, die der Körper um seinen Mittelpunkt hat. Verrichtet man daher in den vorhergehenden Gleichungen diese verschiedenen Substitutionen, und trägt Sorge dafür, daß die veränderlichen Größen φ, ψ, ω und ihre Differentialien ausserhalb der Zeichen S gebracht werden; so erhält man 3 Differentialgleichungen vom zweiten Grade zwischen eben diesen veränderlichen Größen und der Zeit t, wodurch alle drei in Funktionen von t bestimmt werden.

Diese Gleichungen sind denen ähnlich, die Herr D'Alembert zuerst für die Umdrehungsbewegung eines Körpers von irgend einer Figur fand, und wovon er eine so nützliche Anwendung in seinen Untersuchungen über die Vorrückung der Nachtgleichen machte.

Aus dieser Ursache, und weil ausserdem die Form dieser Gleichungen nicht die Einfachheit hat, deren sie fähig sind, halten wir uns mit der Auseinandersetzung derselben hier nicht weiter auf; sondern wir wollen vielmehr das Problem direkte durch die im 4ten Abschnitte gegebene allgemeine

Digitized by Google

meine Methode auflösen, die sogleich die einfachsten und bequemsten Gleichungen für den Calkul giebt.

35) Um aber diese Methode auf die allgemeinste und einfachste Art anzuwenden; so wollen wir annehmen, wie es in der Natur auch würklich statt hat, daß jedes Theilchen Dm des Körpers durch die Kräfte $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$, etc. angezogen werde, die gewissen Funktionen der Distanzen $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$, etc. eben dieses Theilchens von den Mittelpunkten dieser Kräfte proportional sind, und man erhält dadurch die algebraische Größe

$$\Pi = \int (\overline{P}\, d\overline{p} + \overline{Q}\, d\overline{q} + \overline{R}\, d\overline{r} + \text{etc.}).$$

Man betrachte hierauf die beiden Größen

$$T = S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\right) Dm,$$

$$V = S\,\Pi\, Dm,$$

wo die Caracteristik S allein sich auf die Elemente Dm des Körpers, und auf die von der Lage dieser Elemente im Körper abhängenden Größen bezieht.

Man bringe diese beiden Größen auf Funktionen gewisser veränderlichen auf die verschiedenen Bewegungen des Körpers sich beziehenden Größen ξ, ψ, φ, etc. und bilde daraus folgende allgemeine Formel (4 Abschn. 9 Art.)

$$0 = \left(d.\frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi}\right)\partial\xi,$$

$$+ \left(d.\frac{\partial T}{\partial d\psi} - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\right)\partial\psi,$$

Digitized by Google

$$+ \left(\mathrm{d}.\frac{\partial T}{\partial \mathrm{d}\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \delta\varphi,$$

$$+ \text{ etc.}$$

Sind die veränderlichen Größen ξ, ψ, φ, etc. der Natur der Aufgabe nach von einander unabhängig, (wozu man sie allezeit bringen kann), so setze man die durch jede der unbestimmten Variationen $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$, etc. multiplicirte Größen $= 0$, und man erhält dadurch soviele Gleichungen zwischen den veränderlichen Größen ξ, ψ, φ, etc., als veränderliche Größen vorhanden sind.

Sind diese veränderlichen Größen nicht ganz unabhängig von einander, sondern finden unter ihnen eine oder mehrere Bedingungsgleichungen statt; so erhält man durch die Differentiation dieser Gleichungen eben soviele Bedingungsgleichungen zwischen den Variationen $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$, durch die man dieselben auf eine kleinere Zahl bringen kann.

Nachdem man nun diese Reduktion in der allgemeinen Formel gemacht hat; so setze man darin auf gleiche Art jedes der übrigen Variationen $= 0$; und die daraus entspringenden Gleichungen verbunden mit den gegebenen Bedingungsgleichungen werden zur Auflösung der Aufgabe hinreichend seyn. Im gegenwärtigen Falle hat man nur die im vorhergehenden § gelehrten Transformationen vorzunehmen. Man substituire daher sogleich

$$x' + \xi,\ y' + \eta,\ z' + \zeta,$$

anstatt x, y, z und

$$a\xi' + b\xi'' + c\xi''',\ a\eta' + b\eta'' + c\eta''',\ a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''',$$

anstatt ξ, η, ζ, (Art. 11).

Hierauf setze man für ξ', η', etc. ihre Werthe in φ, ψ, ω (Art. 30), und man erhält dadurch die Größen T, V in Funktionen der 6 veränderlichen unabhängigen Größen x', y', z', φ, ψ, ω ausgedrückt, anstatt deren man noch, wenn man es für gut findet, andere gleichbedeutende Werthe einführen

Digitized by Google

xen kann; und jede derselben giebt zur Bestimmung der Bewegung des Körpers eine Gleichung von dieser Form:

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\alpha} - \frac{\delta T}{\delta \alpha} + \frac{\delta V}{\delta \alpha} = 0,$$

wenn α eine dieser veränderlichen Größen ist.

36) Wir wollen daher damit anfangen, in dem Ausdruck für T anstatt x, y, z diese neuen veränderlichen Größen

$$x' + \xi,\quad y' + \eta,\quad z' + \zeta \text{ zu setzen,}$$

und nachdem wir die x', y', z' ausserhalb des Zeichens S gebracht haben, die für alle Punkte des Körpers einerley sind, weil es die Coordinaten des Mittelpunkts des Körpers sind; so wird die Funktion T

$$\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{2dt^2} m + S\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2}\right) dm$$

$$+ \frac{dx' S d\xi dm + dy' S d\eta dm + dz' S d\zeta dm}{dt^2},$$

Dieser Ausdruck besteht, wie man sieht, aus 3 Theilen, wovon der erste nur die veränderlichen Größen x', y', z' enthält, und den Werth von T für den Fall ausdrückt, wo der Körper als ein Punkt betrachtet wird. Sind diese veränderlichen Größen daher von den andern ξ, η, ζ unabhängig, welches statt findet, wenn der Körper die Freiheit hat sich nach allen Richtungen um sein Centrum zu bewegen; so muß die vorige Formel besonders behandelt werden, und für die Bewegung dieses Mittelpunkts dieselben Gleichungen geben, als wenn der Körper darin concentrirt wäre. Dieser Theil der Aufgabe wird also dadurch auf den Fall gebracht, den wir im vorigen Abschnitte aufgelöst haben, und worauf wir also hier verweisen.

Der 3te Theil der vorhergehenden Ausdrückung, der die Differentialien dx', dy', dz' multiplicirt durch die Differentialien $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ enthält,

Digitized by Google

verschwindet in 2 Fällen von selbst. Wenn nämlich der Mittelpunkt des Körpers fest ist; so ist es an und für sich klar, indem alsdenn die Differentialien dx', dy', dz' der Coordinaten dieses Mittelpunkts $= o$ sind, und wenn man diesen Mittelpunkt im Schwerpunkte des Körpers selbst annimmt; so werden die Integralien

$$Sd\xi dm, \quad Sd\eta dm, \quad Sd\zeta dm$$

von selbst $= o$. Denn wenn man darin für $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ ihre Werthe

$$ad\xi' + bd\xi'' + cd\xi''',$$

$$ad\eta' + bd\eta'' + cd\eta''',$$

$$ad\zeta' + bd\zeta'' + cd\zeta''' \text{ (35 Art.)}$$

substituirt, und die Größen $d\xi'$, $d\xi''$, etc., die unabhängig von der Lage der Theilchen dm im Körper sind, vor das Zeichen S bringt; so wird jedes Glied dieser Integrale durch eine der 3 Größen $Sadm$, $Sbdm$, $Scdm$ multiplicirt seyn; diese Größen aber sind nichts anders als die Summen der Produkte jedes Elements dm multiplicirt durch dessen Entfernung von den 3 Ebenen, die durch den Mittelpunkt des Körpers gehen, und senkrecht auf den Achsen der Coordinaten a, b, c sind. Sie sie daher $= o$, wenn dieser Mittelpunkt mit dem der Schwere des ganzen Körpers zusammenfällt, nach den bekannten Eigenschaften dieses letztern Mittelpunkts. In diesem Falle sind also auch die 3 Integrale

$$Sd\xi dm, \quad Sd\eta dm, \quad Sd\zeta dm = o,$$

In beiden Fällen ist folglich nur noch im Ausdruck T die Formel

$$S\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2}\right) dm$$

zu betrachten übrig, die sich allein auf die Umdrehungsbewegung bezieht, die der Körper um seinen Mittelpunkt haben kann, und die daher dazu dient, die Gesetze dieser Bewegung, unabhängig von der, die der Mittelpunkt selbst im Raume haben kann, zu bestimmen.

Um

Digitized by Google

Um nun die Auflösung so viel als möglich einfach zu machen; so kann man von den Ausdrücken $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ (28) Gebrauch machen, welche, wenn man setzt

$$da = 0, \quad db = 0, \quad dc = 0$$

geben

$$\begin{aligned} d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 &= (c\,dQ - b\,dR)^2 \\ &\quad + (a\,dR - c\,dP)^2 \\ &\quad + (b\,dP - a\,dQ)^2 \\ &= (b^2 + c^2)\,dP^2 + (a^2 + c^2)\,dQ^2 + (a^2 + b^2)\,dR^2 \\ &\quad - 2\,bc\,dQ\,dR - 2\,ac\,dP\,dR - 2\,ab\,dP\,dQ. \end{aligned}$$

Da nun hier die Größen a, b, c die einzigen veränderlichen Größen sind in Ansehung der Lage der Theilchen Dm im Körper; so folgt daraus, daß um den Werth von

$$S(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)\,Dm$$

zu erhalten, man nur jedes Glied der vorhergehenden Größe durch Dm zu multipliciren, und in Beziehung auf die Caracteristik S zu integriren hat, indem man die Größen dP, dQ, dR, die davon abhängen, ausserhalb dieses Zeichens bringt. Auf diese Art wird aus der Größe

$$S\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2}\right) Dm$$

folgende:

$$\frac{A\,dP^2 + B\,dQ^2 + C\,dR^2}{2\,dt^2} - \frac{F\,dQ\,dR + G\,dP\,dR + H\,dP\,dQ}{dt^2},$$

wenn man Kürze halber setzt:

$$A = S(b^2 + c^2)\,Dm,$$

$$B = S(a^2 + c^2)\,Dm,$$

Digitized by Google

$$C = S(a^2 + b^2)\,Dm,$$
$$F = Sbc\,Dm,$$
$$G = Sac\,Dm,$$
$$H = Sab\,Dm.$$

Diese Integralien beziehen sich auf die ganze Masse des Körpers, so daß A, B, C, F, G, H jede besonders betrachtet, und wie durch die Figur des Körpers gegebene beständige Größen behandelt werden müssen.

37) Setzt man um mehrerer Einfachheit willen

$$\frac{dP}{dt} = p,$$
$$\frac{dQ}{dt} = q,$$
$$\frac{dR}{dt} = r,$$

so erhält man, wenn man in der Funktion T nur die auf die Umdrehungsbewegung sich beziehenden Glieder betrachtet

$$T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - Fqr - Gpr - Hpq;$$

da also T nur eine Funktion von p, q, r ist; so erhält man, wenn man nach δ differentiirt

$$\delta T = \frac{dT}{dp}\delta p + \frac{dT}{dq}\delta q + \frac{dT}{dr}\delta r.$$

Nach den Formeln (31) aber hat man

$$p = \frac{\sin\varphi \sin\omega\, d\psi + \cos\varphi\, d\omega}{dt},$$

q =

Digitized by Google

$$q = \frac{\text{Cof}\,\varphi\,\text{fin}\,\omega\,d\psi - \text{fin}\,\varphi\,d\omega}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi + \text{Cof}\,\omega\,d\psi}{dt};$$

folglich (da dt allezeit $=$ conſt.)

$$\delta T = \left(\frac{dT}{dp}q - \frac{dT}{dq}p\right)\delta\varphi + \frac{dT}{dr}\cdot\frac{\delta d\varphi}{dt}$$

$$+ \left(\frac{dT}{dp}\,\text{fin}\,\varphi\,\text{fin}\,\omega + \frac{dT}{dq}\,\text{Cof}\,\varphi\,\text{fin}\,\omega + \frac{dT}{dr}\,\text{Cof}\,\varphi\right)\cdot\frac{\delta d\psi}{dt}$$

$$+ \left(\frac{dT}{dp}\,\text{fin}\,\varphi\,\text{Cof}\,\omega + \frac{dT}{dq}\,\text{Cof}\,\varphi\,\text{Cof}\,\omega - \frac{dT}{dr}\,\text{fin}\,\omega\right)\cdot\frac{d\psi\,d\omega}{dt}$$

$$+ \left(\frac{dT}{dp}\,\text{Cof}\,\varphi - \frac{dT}{dq}\,\text{fin}\,\varphi\right)\frac{\delta d\omega}{dt};$$

woraus man ſogleich für die Umdrehungsbewegung des Körpers folgende 3 Gleichungen vom 2ten Grade erhält:

$$d.\frac{\frac{dT}{dr}}{dt} - \frac{dT}{dp}q + \frac{dT}{dq}p + \frac{\delta V}{\delta\varphi} = 0,$$

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\,\text{fin}\,\varphi\,\text{fin}\,\omega + \frac{dT}{dq}\,\text{Cof}\,\varphi\,\text{fin}\,\omega + \frac{dT}{dr}\,\text{Cof}\,\omega\right)}{dt}$$

$$+ \frac{\delta V}{d\psi} = 0,$$

Digitized by Google

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\cos\varphi - \frac{dT}{dq}\sin\varphi\right) - \left(\frac{dT}{dp}\sin\varphi.\cos\omega + \frac{dT}{dq}\cos\varphi\cos\omega - \frac{dT}{dr}\sin\omega\right)\frac{d\psi}{dt}}{dt} + \frac{\partial V}{\partial\omega} = 0.$$

Was die Größe V anlangt, die von Kräften abhängt, die den Körper treiben; so ist sie = o, wenn der Körper durch keine Kraft angetrieben wird; in diesem Falle sind also auch die 3 Größen

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial V}{\partial\psi}, \quad \frac{\partial V}{\partial\omega} = 0,$$

und die 2te der 3 vorhergehenden Gleichungen wird an und für sich integrabel seyn. Allein die allgemeine Integration aller dieser Gleichungen wird dennoch sehr schwer bleiben.

Da überhaupt $V = S\Pi Dm$

und Π eine algebraische Funktion der Entfernungen $\bar{p}$, $\bar{q}$, etc. (35) ist, davon jede durch

$$\sqrt{[(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2]}$$

ausgedrückt ist, wenn f, g, h die Coordinaten des festen Mittelpunkts der Kräfte bezeichnen; so hat man nur in der Funktion Π dieselben Substitutionen als oben zu verrichten, und nachdem man mit Hinsicht auf die ganze Masse des Körpers integrirt hat; so hat man den Werth von V in φ, ψ, ω, woraus man durch die gewöhnliche Differentiation die Werthe von

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial V}{\partial\psi}, \quad \frac{\partial V}{\partial\omega}$$

zieht, welche mit

dV

$$\frac{dV}{d\varphi}, \quad \frac{dV}{d\psi}, \quad \frac{dV}{\delta\omega}$$

einerlei sind

Da dies weiter keine Schwierigkeit hat; so halten wir uns weiter nicht dabei auf; wir bemerken nur, daß die vorhergehenden Gleichungen auf die hinauskommen, die ich anderswo in meinen ersten Untersuchungen über die Libration des Mondes gegeben habe.

38) Ohnerachtet die Anwendung der Winkel φ, ψ, ω die einfachste Art zu seyn scheint, vermittelst unserer Methode die Gleichungen für die Umdrehung des Körpers zu finden; so kann man doch noch direkter zum Zweck gelangen, und viel schönere und für den Calkul in mehreren Fällen bequemere Formeln erhalten, indem man zuerst die Variationen der Grössen ξ', ξ'', ξ''', η', etc. betrachtet, und diese verschiedenen Variationen durch denen (27) analoge Formeln auf 3 unbestimmte bringt.

Denn weil $p = \frac{dP}{dt} =$ (23)

$$\frac{\xi''' d\xi'' + \eta''' d\eta'' + \zeta''' d\zeta''}{dt}$$

so erhält man (da $dt =$ Const.) durch die Differentiation nach δ

$$\delta p = \frac{\xi''' \delta d\xi'' + \eta''' \delta d\eta'' + \zeta''' \delta d\zeta''}{dt}$$

$$+ \frac{d\xi'' d\xi''' + d\eta'' \delta\eta''' + d\zeta'' \delta\zeta'''}{dt};$$

folglich $\frac{dT}{dp} \delta p$ (im Werthe von δT (37)

Digitized by Google

$$= \left(\frac{dT}{dp} \cdot \left[\frac{\xi''' \delta d\xi'' + \eta''' \delta \eta'' \quad \zeta''}{dt}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{dT}{dp} \cdot \left[\frac{d\xi'' d\xi''' + d\eta'' \delta \eta''' + d\zeta'' \delta \zeta'''}{dt}\right] = \mathfrak{M}.\right)$$

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\xi'''\right)}{dt} \delta\xi'' + \frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\eta'''\right)}{dt} \delta\eta'' +$$

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\zeta'''\right)}{dt} \delta\zeta''$$

$$- \frac{dT}{dp} \cdot \left[\frac{d\xi'' \delta\xi''' + d\eta'' \delta\eta''' + d\zeta'' \delta\zeta'''}{dt}\right]$$

$$= - \frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\right)}{dt} (\xi''' \delta\xi'' + \eta''' \delta\eta'' + \zeta''' \delta\zeta'')$$

$$+ \frac{dT}{dp} \cdot \left[\frac{d\xi''' \delta\xi'' + d\eta''' \delta\eta'' + d\zeta''' \delta\zeta'' - d\xi'' \delta\xi''' - d\eta'' \delta\eta''' - d\zeta'' \delta\zeta'''}{dt}\right].$$

Eben so giebt das Glied $\frac{dT}{dq} \delta q$ in derselben Formel die Glieder

$$- \frac{d.\left(\frac{dT}{dq}\right)}{dt} (\xi' \delta\xi''' + \eta' \delta\eta''' + \zeta' \delta\zeta''') +$$

$\frac{dT}{dp}$

Digitized by Google

$$\frac{dT}{dq}\cdot\left[\frac{d\xi'\delta\xi''' + d\eta'\delta\eta''' + d\zeta'\delta\zeta' - d\xi'''\delta\xi' - d\eta'''\delta\eta' - d\zeta'''\delta\zeta'}{dt}\right]$$

und endlich das Glied $\frac{dT}{dr}\delta r$

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dr}\right)}{dt}(\xi''\delta\xi' + \eta''\delta\eta' + \zeta''\delta\zeta') +$$

$$\frac{dT}{dr}\cdot\left[\frac{d\xi''\delta\xi' + d\eta''\delta\eta' + d\zeta''\delta\zeta' - d\xi'\delta\xi'' - d\eta'\delta\eta'' - d\zeta'\delta\zeta''}{dt}\right].$$

Wir haben aber allgemein gefunden

$$d\xi' = \xi''dR - \xi'''dQ,$$

$$d\xi'' = \xi'''dP - \xi'dR,$$

$$d\xi''' = \xi'dQ - \xi''dP,$$

$$d\eta' = \eta''dR - \eta'''dQ,$$

etc.

(27), wo dP, dQ, dR unbestimmte Größen sind. Ausserdem ist klar, daß man auch den Variationen $\delta\xi'$, $\delta\xi''$, $\delta\xi'''$, $\delta\eta'$, etc. dieselbe Form geben kann, wenn man d in δ verwandelt. Man hat also auch

$$\delta\xi' = \xi''\delta R - \xi'''\delta Q,$$

$$\delta\xi'' = \xi'''\delta P - \xi'\delta R,$$

$$\delta\xi''' = \xi'\delta Q - \xi''\delta P,$$

$$\delta\eta' = \eta''\delta R - \eta'''\delta Q,$$

etc.

Digitized by Google

wo die 3 Größen δP, δQ, δR ebenfals unbestimmt, und von einander unabhängig sind.

Verrichtet man diese Substitutionen, und sieht zugleich auf die Bedingungsgleichungen (13); so findet man

$$\xi''' \delta \xi'' + \eta''' \delta \eta'' + \zeta''' \delta \zeta'' = \delta P,$$

$$\xi' \delta \xi''' + \eta' \delta \eta''' + \zeta' \delta \zeta''' = \delta Q,$$

$$\xi'' \delta \xi' + \eta'' \delta \eta' + \zeta'' \delta \zeta' = \delta R,$$

welche Ausdrückungen denen von dP, dQ, dR (23) analog sind.

Ferner ist alsdenn

$$d\xi'' \delta \xi' + d\eta'' \delta \eta' + d\zeta'' \delta \zeta' = - dP \delta Q,$$

$$d\xi''' \delta \xi' + d\eta''' \delta \eta' + d\zeta''' \delta \zeta' = - dP \delta R,$$

$$d\xi' \delta \xi'' + d\eta' \delta \eta'' + d\zeta' \delta \zeta'' = - dQ \delta P,$$

$$d\xi''' \delta \xi'' + d\eta''' \delta \eta'' + d\zeta''' \delta \zeta'' = - dQ \delta R,$$

$$d\xi' \delta \xi''' + d\eta' \delta \eta''' + d\zeta' \delta \zeta''' = - dR \delta P,$$

$$d\xi'' \delta \xi''' + d\eta'' \delta \eta''' + d\zeta'' \delta \zeta''' = - dR \delta Q.$$

Setzt man also p, q, r für

$$\frac{dP}{dt}, \quad \frac{dQ}{dt}, \quad \frac{dR}{dt},$$

so wird aus den oben aus den Gliedern

$$\frac{dT}{dp} \delta p, \quad \frac{dT}{dq} \delta q, \quad \frac{dT}{dr} \delta r$$

in dem Werthe von δT gefundenen Größen

d.

Digitized by Google

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\right)}{dt}\,\delta P + \frac{dT}{dp}(r\delta Q - q\delta R),$$

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dq}\right)}{dt}\,\delta Q + \frac{dT}{dq}(p\delta R - r\delta P),$$

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dr}\right)}{dt}\,\delta R + \frac{dT}{dr}(q\delta P - p\delta Q),$$

die Summe dieſer Glieder iſt folglich der Werth der Variation von T in der allgemeinen obigen Gleichung.

Da nun V eine algebraiſche Funktion von ξ', ξ'', ξ''', η', etc. wird, nachdem man ſtatt x, y, z

$$x' + a\xi' + b\xi'' + c\xi''',$$

$$y' + a\eta' + b\eta'' + c\eta''',$$

$$z' + a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''',$$

ſubſtituirt hat, und das Zeichen S ſich nur auf die Größen a, b, c bezieht; ſo hat man nur nach δ zu differentiiren, und ſtatt $\delta\xi'$, $\delta\xi''$, etc. ihre Werthe in δP, δQ, δR zu ſetzen; alsdenn erhält man, weil

$$\frac{\delta V}{\delta \xi'} = \frac{dV}{d\xi'},$$

$$\frac{\delta V}{\delta \xi''} = \frac{dV}{d\xi''},$$

etc.

Digitized by Google

in der nämlichen Gleichung folgende Glieder:

$$\frac{dV}{d\xi''}(\xi''' \partial R - \xi''' \partial Q) +$$

$$\frac{dV}{d\xi'''}(\xi''' \partial P - \xi' \partial R) +$$

$$\frac{dV}{d\xi'''}(\xi' \partial Q - \xi'' \partial P) +$$

$$\frac{dV}{d\eta''}(\eta' \partial R - \eta''' \partial Q) +$$

etc.

Durch die Zusammensetzung aller Glieder multiplicirt durch jede der 3 Größen

$$\partial P, \quad \partial Q, \quad \partial R,$$

erhält man also eine allgemeine Gleichung von dieser Form:

$$0 = (P)\,\partial P + (Q)\,\partial Q + (R)\,\partial R,$$

worin

$$(P) = \frac{d.\frac{dT}{dp}}{dt} + q\frac{dT}{dr} - r\frac{dT}{dq}$$
$$+ \xi'''\frac{dV}{d\xi''} + \eta'''\frac{dV}{d\eta''} + \zeta'''\frac{dV}{d\zeta''}$$
$$- \xi''\frac{dV}{d\xi'''} - \eta''\frac{dV}{d\eta'''} - \xi''\frac{dV}{d\zeta'''},$$

(Q)

Digitized by Google

$$(Q) = \frac{d.\frac{dT}{dq}}{dt} + r\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dr}$$
$$+ \xi'\frac{dV}{d\xi'''} + \eta'\frac{dV}{d\eta'''} + \zeta'\frac{dV}{d\zeta'''},$$
$$- \xi'''\frac{dV}{d\xi'} - \eta'''\frac{dV}{d\eta'} - \zeta'''\frac{dV}{d\zeta'};$$

$$(R) = \frac{d.\frac{dT}{dr}}{dt} + p\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dr}$$
$$+ \xi''\frac{dV}{d\xi'} + \eta''\frac{dV}{d\eta'} + \zeta''\frac{dV}{d\zeta'}$$
$$- \xi'\frac{dV}{d\xi''} - \eta'\frac{dV}{d\eta''} - \zeta'\frac{dV}{d\zeta''};$$

Und da die 3 Größen δP, δQ, δR von einander unabhängig und zugleich auch willkührlich sind; so erhält man diese 3 besondern Gleichungen:

$$(P) = 0, \quad (Q) = 0, \quad (R) = 0,$$

welche verbunden mit den 6 Bedingungsgleichungen zwischen den 9 veränderlichen Größen ξ', ξ'', etc. (13) dazu dienen, jede dieser veränderlichen Größen zu bestimmen.

Diese von der Größe V abhängende Glieder dieser Gleichungen kann man auch, wenn man will, auf eine einfachere Form bringen. Denn da

$$V = S\Pi\Delta m$$

(und S sich nicht auf die veränderlichen Größen ξ', ξ'', etc. bezieht)

Digitized by Google

so ist

$$\xi'' \frac{dV}{d\xi'} = S\xi'' \frac{d\Pi}{d\xi'} Dm,$$

$$\eta'' \frac{dV}{d\eta'} = S\eta'' \frac{d\Pi}{d\eta'} Dm,$$

etc.

und da Π eine algebraische Funktion von

$$a\xi' + b\xi'' + c\xi''',$$

$$a\eta' + b\eta'' + c\eta''',$$

$$a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''',$$

ist, so sieht man leicht, daß, wenn man einzeln a, b, c variiren läßt, man erhält

$$\xi''' \frac{d\Pi}{d\xi''} + \eta''' \frac{d\Pi}{d\eta''} + \zeta''' \frac{d\Pi}{d\zeta''} = \frac{bd\Pi}{dc},$$

$$\xi'' \frac{d\Pi}{d\xi'''} + \eta'' \frac{d\Pi}{d\eta'''} + \zeta'' \frac{d\Pi}{d\zeta'''} = \frac{cd\Pi}{db},$$

etc.

Auf diese Art erhält man

$$\xi''' \frac{dV}{d\xi''} + \eta''' \frac{dV}{d\eta''} + \zeta''' \frac{dV}{d\zeta''} -$$

$$\xi'' \frac{dV}{d\xi'''} - \eta'' \frac{dV}{d\eta'''} - \zeta'' \frac{dV}{d\zeta'''} =$$

Digitized by Google

$$S\left(b\frac{d\Pi}{dc} - c\frac{d\Pi}{db}\right)Dm,$$

$$\xi'\frac{dV}{d\xi'''} + \eta'\frac{dV}{d\eta'''} + \zeta''\frac{dV}{d\zeta'''} -$$

$$\xi'''\frac{dV}{d\xi'} - \eta'''\frac{dV}{d\eta'} + \zeta'''\frac{dV}{d\zeta'} =$$

$$S\left(c\frac{d\Pi}{da} - a\frac{d\Pi}{dc}\right)Dm,$$

$$\xi''\frac{dV}{d\xi'} + \eta''\frac{dV}{d\eta'} + \zeta''\frac{dV}{d\zeta'} -$$

$$\xi'\frac{dV}{d\xi''} + \eta'\frac{dV}{d\eta''} + \zeta'\frac{dV}{d\zeta''} =$$

$$S\left(a\frac{d\Pi}{db} - b\frac{d\Pi}{da}\right)Dm.$$

Wenn diese Transformation aber gleich die Formeln vereinfacht; so vereinfacht sie doch den Calkul nicht, denn statt der einzigen in V enthaltenen Integration hat man alsdenn 3 zu verrichten.

39) Sind die Entfernungen der Mittelpunkte der Kräfte vom Mittelpunkte des Körpers in Ansehung der Dimensionen dieses Körpers sehr groß; so kann man alsdenn die Größe Π auf eine sehr convergierende Reihe bringen, deren Glieder den Kräften und Produkten von a, b, c proportional sind, so daß die Integration SΠDm keine Schwierigkeit hat, Dies ist der Fall mit den Planeten, insofern sie sich gegenseitig anziehen. Ist die Attraktionskraft $\overline{P}$ nur der Distanz $\overline{p}$ proportional, so daß $\overline{P} = K\overline{p}$, wo K ein beständiger Coefficient ist; so wird das Glied $\int\overline{P}\,d\overline{p}$ der

der Funktion Π (35) $= \frac{K\overline{p}^2}{2}$; und da p allgemein durch

$$\sqrt{[(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2]}$$

ausgedrückt wird, wenn man durch f, g, h die Coordinaten des Mittelpunkts der Kräfte bezeichnet; so giebt dieses Glied

$$\frac{K}{2}[(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2].$$

Substituirt man daher statt x, y, z ihre Werthe $x' + \xi$, $y' + \eta$, $z' + \zeta$, multiplicirt durch Dm und integrirt nach S; so erhält man in dem Werthe von $V = S\Pi Dm$ folgende Glieder

$$\frac{K}{2}[(x'-f)^2 + (y'-g)^2 + (z'-h)^2]\,SDm$$

$$+ K(x'-f)\,S\xi Dm +$$

$$K(y'-g)\,S\eta Dm +$$

$$K(z'-h)\,S\zeta Dm +$$

$$\frac{K}{2}S(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\,Dm.$$

Aber $\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi'''$,

$\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta'''$,

$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta'''$,

folglich

$S\xi Dm = \xi' SaDm + \xi'' SbDm + \xi''' ScDm$,

u. s. f. und (13)

$S(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \cdot Dm = S(a^2 + b^2 + c^2)\,Dm = Const.$ (welche beständige Größe wir E nennen wollen).

Nimmt

Digitized by Google

Nimmt man aber für den willkührlichen Mittelpunkt des Körpers seinen Schwerpunkt selbst an; so hat man alsdenn

$$SaDm = o, \quad SbDm = o, \quad ScDm = o,$$

wie wir schon oben (36) gesehn haben. In diesem Falle enthält daher die Größe V in Beziehung auf die gesuchte Kraft nur die Glieder

$$\frac{K}{2}[(x' - f)^2 + (y' - g)^2 + (z' - h)^2] + \frac{K}{2}E$$

so daß alle partielle Differentialien

$$\frac{dV}{d\xi'}, \quad \frac{dV}{d\xi''}, \quad \text{etc.} = o \text{ sind.}$$

Hieraus folgt, daß die Würkung dieser Kraft in Ansehung der Umdrehungsbewegung um den Schwerpunkt $= o$ ist. Und da der vorhergehende Ausdruck für V bis auf das beständige Glied $\frac{KE}{2}$ einerley mit dem ist, wenn der ganze Körper in seinem Mittelpunkte concentrirt wäre, in welchem Falle

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z';$$

so hat man für die progressive Bewegung dieses Mittelpunkts die nämlichen Gleichungen, als wenn der Körper auf einen Punkt gebracht wäre; denn die partiellen Differentialien von V in Bezug auf die veränderlichen Größen x', y', z' sind mit denen in dieser Hypothese einerlei.

Betrachtet man den Körper als schwer, und setzt die beschleunigende Kraft der Schwere $= 1$ und die Achse der Coordinaten, die vertikal von oben bis unten geht, z; so hat man:

$$\overline{P} = 1, \quad \overline{p} = h - z;$$

folglich $\int P dp = h - z = h - z' - a\zeta' - b\zeta'' - c\zeta'''$;

und die Größe V enthält wegen der Schwere des Körpers, die Glieder

Digitized by Google

$$(h - z')SDm - \zeta' SaDm - \zeta'' SbDm - \zeta''' ScDm.$$

Der Mittelpunkt des Körpers fällt also auf diese Art mit seinem Schwerpunkte zusammen, die Glieder, worin die veränderlichen Größen ζ', ζ'', etc. vorkommen, verschwinden, und folglich ist die Würkung der Schwere auf die Umdrehung = o, wie im vorhergehenden Fall. Der Werth von V, insofern er von der Schwere abhängt, wird also auf $(h - z')SDm$ gebracht d. h. darauf, was er seyn würde, wenn der Körper in einem Punkt zusammenfiele, und seine Masse SDm beibehielte. Daher wird auch die Fortrückungsbewegung des Körpers einerlei mit der in diesem Falle seyn.

§. III.

Bestimmung der Bewegung eines schweren Körpers von einer belliebigen Figur.

40) So einfach diese Aufgabe ist; so ist sie doch dessen ungeachtet eine der schwersten, die in der Mechanik vorkommt, wenn man alles dabei im natürlichen Zustande und ohne Abstraktion betrachtet; denn da alle Körper ihrer Natur nach schwer und ausgedehnt sind; so kann man keine dieser ihrer Eigenschaften weglassen, ohne ihre Natur zu verändern, und die Fragen, worin man nur auf eine dieser beiden Eigenschaften sähe, würden auf bloße Curiosität abzwecken.

Wir wollen den Anfang damit machen, die Bewegung freier Körper zu untersuchen, wie die geworfenen, hernach aber wollen wir auch die, der an einen festen Punkt befestigten, betrachten, wie dies bey den Pendeln statt findet.

Im erstern Falle nimmt man den Mittelpunkt des Körpers in seinem Schwerpunkte an, und da alsdenn die Würkung der Schwere auf die Umdrehung = o ist, wie man eben gesehn hat; so hat man die Gesetze dieser Umdrehung durch folgende 3 Gleichungen zu bestimmen (38),

d.

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \frac{d.\frac{dT}{dp}}{dt} + q\frac{dT}{dr} - r\frac{dT}{dq} &= 0 \\ \frac{d.\frac{dT}{dq}}{dt} + r\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dr} &= 0 \\ \frac{d.\frac{dT}{dr}}{dt} + p\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dp} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A)$$

wenn man (37)

$$p = \frac{dP}{dt},$$

$$q = \frac{dQ}{dt},$$

$$r = \frac{dR}{dt},$$

etc.

und

$$T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - Fqr - Gpr - Hqr$$

setzt.

Was aber den Mittelpunkt des Körpers betrifft; so folgt er den bekannten Gesetzen der Bewegung der geworfenen als Punkte betrachteten Körper. Die Bestimmung seiner Bewegung hat folglich keine Schwierigkeit, und wir halten uns daher nicht länger dabei auf.

Digitized by Google

Im zweiten Falle nimmt man den festen Aufhängungspunkt für den Mittelpunkt des Körpers an, und man erhält, wenn man die Ordinaten z vertikal und von unten bis in die Höhe annimmt (39)

$$V = (h - z') SDm - \zeta' Sa\,Dm - \zeta'' Sb\,Dm - \zeta''' Sc\,Dm;$$

woraus man zieht

$$\frac{dV}{d\zeta'} = - Sa\,Dm;$$

$$\frac{dV}{d\zeta''} = - Sb\,Dm;$$

$$\frac{dV}{d\zeta'''} = - Sc\,Dm;$$

und alle andere partielle Differentialien von V werden $= o$ seyn, so daß die Gleichungen für die Umdrehungsbewegung seyn werden (38)

$$(B) \ldots \begin{cases} d.\dfrac{\frac{dT}{dp}}{dt} + q\dfrac{dT}{dr} - r\dfrac{dT}{dq} - \zeta''' Sb\,Dm + \zeta'' Sc\,Dm = o, \\ d.\dfrac{\frac{dT}{dp}}{dt} + r\dfrac{dT}{dp} - p\dfrac{dT}{dr} - \zeta' Sc\,Dm + \zeta''' Sa\,Dm = o, \\ d.\dfrac{\frac{dT}{dr}}{dt} + p\dfrac{dT}{dq} - p\dfrac{dT}{dr} - \zeta'' Sa\,Dm + \zeta'' Sb\,Dm = o, \end{cases}$$

wo die Größen Sa Dm, Sb Dm, Sc Dm als beständig und durch die Figur des Körpers und dem Orte des Aufhängungspunkts gegeben angesehen werden müssen.

Digitized by Google

41) Die Auflösung des erstern Falls, wo der Körper als völlig frey angenommen worden ist, und wo man nur die Umdrehung um den Schwerpunkt betrachtet, hängt allein von der Integration der 3 Gleichungen (A) ab.

Es ist aber sehr leicht 2 Integralen dieser Gleichungen zu finden; denn 1) wenn man sie respektiv mit

$$\frac{dT}{dp}, \quad \frac{dT}{dq}, \quad \frac{dT}{dr},$$

multiplicirt und hernach addirt; so hat man offenbar eine integrabele Gleichung, deren Integrale ist:

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 = f^2,$$

wo f^2 eine gewisse beliebige beständige Größe ist.

2) Multiplicirt man dieselben Gleichungen durch p, q, r und addirt sie zusammen; so erhält man diese:

$$p\,d.\frac{dT}{dp} + q\,d.\frac{dT}{dp} + r\,d.\frac{dT}{dp} = 0,$$

T aber ist nur eine Funktion von p, q, r und folglich ist auch

$$dT = \frac{dT}{dp}\,dp + \frac{dT}{dq}\,dq + \frac{dT}{dr}\,dr$$

integrabel und ihr Integrale ist

$$p\,\frac{dT}{dp} + q\,\frac{dT}{dq} + r\,\frac{dT}{dr} - T = h^2,$$

wo h^2 eine neue beliebige beständige Größe ist.

Digitized by Google

Setzt man in diesen Gleichungen anstatt T,

$$\frac{dT}{dp}, \quad \frac{dT}{dq}, \quad \frac{dT}{dr}$$

ihre Werthe; so erhält man 2 Gleichungen vom 2ten Grade zwischen p, q, r durch die man die Werthe zweier dieser veränderlichen Größen in Funktionen der 3ten ausdrücken kann, und substituirt man hierauf diese Werthe in einer der 3 Gleichungen (A); so erhält man eine Gleichung von der ersten Ordnung zwischen t und der veränderlichen Größe. Auf diese Art erhält man die Werthe von p, q, r in t, und dies wollen wir jetzt weiter zu entwickeln suchen. Ich bemerke zuerst, daß man die 2te dieser beiden gefundenen Integralien auf eine einfachere Form bringen kann, wenn man bemerkt, daß, weil T eine homogene Funktion zweier Dimensionen von p, q, r ist, man durch die bekannte Eigenschaft dieser Arten von Funktionen

$$p\frac{dT}{dp} + q\frac{dT}{dq} + r\frac{dT}{dr} = 2T$$

hat, wodurch die gesuchte Integralgleichung auf $T = h^2$ gebracht wird, welche die Erhaltung der lebendigen Kräfte der Umdrehungsbewegung ausdrückt.

Hierauf bemerke man, daß, da die Größe

$$\left(r\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dr}\right)^2 +$$

$$\left(p\frac{dT}{dq} - r\frac{dT}{dp}\right)^2 +$$

$$\left(q\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dq}\right)^2$$

mit der: $(p^2 + q^2 + r^2)$.

[(dT

$$\left[\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2\right] -$$

$$\left(p\frac{dT}{dp} + q\frac{dT}{dq} + r\frac{dT}{dr}\right)^2$$

einerley ist, welche wegen der 2 vorhergehenden Integralien $f^2 C(p^2 + q^2 + r^2) - 4h^4$ wird, man eine einfachere Differentialgleichung erhält, wenn man die Quadrate der Werthe von

$$d.\frac{dT}{dp},\quad d.\frac{dT}{dq},\quad d.\frac{dT}{dr}$$

in den 3 Differentialgleichungen (A) zusammen addirt, welche Gleichung man denn statt einer von diesen gebrauchen kann.

Die Bestimmung der Größen p, q, r in t hängt also auf diese Art von den 3 Gleichungen

$$T = h^2,$$

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 = f^2,$$

$$\left(d.\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(d.\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(d.\frac{dT}{dr}\right)^2 =$$

$$(f^2[p^2 + q^2 + r^2] - 4h^4)\,dt^2;$$

ab, wo

$$T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) Fqr - Gpr - Hpq.$$

42) Diese Bestimmung ist sehr leicht, wenn die 3 beständigen Größen F, G, H = o sind.

Denn alsdenn hat man

$$T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2);$$

folglich

Digitized by Google

folglich $\frac{dT}{dp} = Ap$,

$\frac{dT}{dq} = Bq$,

$\frac{dT}{dr} = Cr$;

so daß die 3 aufzulösenden Gleichungen von folgender Form sind:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h^2,$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = f^2,$$

$$\frac{A^2dp^2 + B^2dq^2 + C^2dr^2}{dt^2} = f^2(p^2 + q^2 + r^2) - 4h^4.$$

Setzt man daher

$$p^2 + q^2 + r^2 = u,$$

und zieht die Werthe von p, q, r aus den 3 Gleichungen

$$p^2 + q^2 + r^2 = u,$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h^2,$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = f^2,$$

so hat man

$$p^2 = \frac{BCu - 2h^2(B + C) + f^2}{(A - B)(A - C)},$$

$$q^2 = \frac{ACu - 2h^2(A + C) + f^2}{(B - A)(B - C)},$$

$$r^2 = \frac{ABu - 2h^2(A + B) + f^2}{(C - A)(C - B)};$$

und

Digitized by Google

und wenn man diese Werthe in der obigen Differentialgleichung substituirt; so wird das erste Glied dieser Gleichung nach den Reduktionen

$$\frac{A^2 B^2 C^2 (4h^2 - f^2 u^2) du^2}{4 (BCu - 2h^2 (B + C) + f^2) (ACu - 2h^2 (A + C) + f^2) (ABu - 2h^2 (A + B) + f^2) dt^2};$$

und das 2te

$$f^2 u - 4h^4;$$

so daß man, wenn man die ganze Gleichung durch

$$f^2 u - 4h^4$$

dividirt, und die Quadratwurzel auszieht, endlich hat:

$$dt = \frac{ABC du}{2\sqrt{-(BCu - 2h^2 (B + C) + f^2) (ACu - 2h^2 (A + C) + f^2) (ABu - 2h^2 (A + B) + f^2)}}$$

woraus man durch die Integration t in u und umgekehrt, zieht.

43) Wir wollen jetzt annehmen, die beständigen Größen F, G, H seyen nicht = o und sehn, wie man diesen Fall auf den vorhergehenden vermittelst einiger Substitutionen bringen kann.

In dieser Absicht substituire ich statt der veränderlichen Größen p, q, r Funktionen von andern veränderlichen Größen x, y, z, die man nicht mit denen verwechseln muß, die wir bisher angewandt haben, um die Coordinaten der verschiedenen Punkte des Körpers zu bestimmen, und ich nehme diese Funktionen sogleich von der Beschaffenheit an, daß

$$p^2 + q^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist. Es ist offenbar, daß um diese Bedingung zu erfüllen, sie nur linear seyn können, und folglich von dieser Form:

Digitized by Google

$$p = p'x + p''y + p'''z,$$
$$q = q'x + q''y + q'''z,$$
$$r = r'x + r''y + r'''z.$$

Die Größen p', p'', p''', q', etc. sind willkührliche beständige Größen, zwischen denen wegen der Gleichung

$$p^2 + q^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

folgende 6 Gleichungen statt finden:

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1,$$
$$p''^2 + q''^2 + r''^2 = 1,$$
$$p'''^2 + q'''^2 + r'''^2 = 1,$$
$$p'p'' + q'q'' + r'r'' = 0,$$
$$p'p''' + q'q''' + r'r''' = 0,$$
$$p''p''' + q''q''' + r''r''' = 0,$$

so daß, da der genannten Größen an der Zahl 9 sind, nachdem man diesen 6 Gleichungen genug gethan hat, nur 3 willkührliche übrig bleiben.

Ich substituire jetzt diese Ausdrückungen von p, q, r in dem Werthe von T und dies vermittelst der eben genannten willkührlichen Gleichungen dergestalt, daß die 3 Glieder, die die Produkte xy, xz, yz enthalten, aus dem Werthe von T verschwinden, so daß diese Größe auf diese Form gebracht wird:

$$\frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{2}.$$

Um aber den Calkul einfacher zu machen; so substituire ich sogleich in dieser Formel die Werthe von x, y, z in p, q, r, und ich bestimme durch die Vergleichung des Resultat's mit dem Werthe von T nicht nur die genannten willkührlichen Größen, sondern auch die unbekannten α, β, γ.

Mul-

Digitized by Google

Multiplicirt man aber die obigen Werthe von p, q, r respektiv durch p', q', r', durch p'', q'', r'' und p''', q''', r''' und addirt hernach alle zusammen; so erhält man sogleich wegen der Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten p', p'', etc.

$$x = p'p + q'q + r'r,$$

$$y = p''p + q''q + r''r,$$

$$z = p'''p + q'''q + r'''r;$$

die Substitution nun dieser Werthe in der Größe

$$\frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{2}$$

und die Vergleichung mit dem Werthe von T (41) giebt auf diese Art die 6 folgenden Gleichungen:

$$\alpha p'^2 + \beta p''^2 + \gamma p'''^2 = A,$$

$$\alpha q'^2 + \beta q''^2 + \gamma q'''^2 = B,$$

$$\alpha r'^2 + \beta r''^2 + \gamma r'''^2 = C,$$

$$\alpha p'q' + \beta p''q'' + \gamma p'''q''' = -2F,$$

$$\alpha p'r' + \beta p''r'' + \gamma p'''r''' = -2G,$$

$$\alpha q'r' + \beta q''r'' + \gamma q'''r''' = -2H.$$

Die zur Bestimmung der 6 gesuchten unbestimmten Größen dienen werden.

Selbst diese Bestimmung aber hat keine Schwierigkeit; denn addirt man die erstere Gleichung, multiplicirt durch p', die 4te multiplicirt durch q' und die 5te multiplicirt durch r'; so erhält man wegen der schon angeführten Bedingungsgleichungen:

$$\alpha p' = Ap' - 2Fq' - 2Gr';$$

Digitized by Google

und addirt man die 2te, 4te und 6te respektiv multiplicirt durch q', p', r'; so erhält man auf gleiche Art:

$$\alpha q' = Bq' - 2Fp' - 2Hr'.$$

Addirt man endlich die 3te, 5te und 6te respektiv multiplicirt durch r', p', q'; so erhält man:

$$\alpha r' = Cr' - 2Gp' - 2Hq';$$

und verbindet man diese 3 Gleichungen mit der Bedingungsgleichung:

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1$$

so werden dadurch die 4 unbekannten Größen α, p', q', r' bestimmt.

Die beiden ersten Gleichungen geben:

$$q' = \frac{FG + H(A - \alpha)}{2FH + G(B - \alpha)} p',$$

$$r' = \frac{(A - \alpha)(B - \alpha) - 4F^2}{4FH + 2G(B - \alpha)} p';$$

und substituirt man diese Werthe in der 3ten; so erhält man nach der Division durch p' folgende Gleichung in α:

$$(\alpha - A)(\alpha - B)(\alpha - C) - 4H^2(\alpha - A) - 4G^2(\alpha - B) - 4F^2(\alpha - C) + 16FGH = 0,$$

welche, da sie vom 3ten Grade ist, nothwendig eine würkliche Wurzel haben muß.

Substituirt man eben diese Werthe in der 4ten Gleichung; so zieht man daraus die von p', q', r' in α, welche, wenn man Kürze halber setzt:

(a)

Digitized by Google

$$(\alpha) = \sqrt{\left[\overline{(A-\alpha)(B-\alpha) - 4F^2}^2 + \overline{4FG + 2H(A-\alpha)}^2 + \overline{4FH + 2G(B-\alpha)}^2\right]},$$

also ausgedrückt werden können

$$p' = \frac{4FH + 2G(B-\alpha)}{(\alpha)},$$

$$q' = \frac{4FG + 2H(A-\alpha)}{(\alpha)},$$

$$r' = \frac{(A-\alpha)(B-\alpha) - 4F^2}{(\alpha)}.$$

Macht man von neuen die nämlichen Combinationen der obigen Gleichungen, und nimmt die Größen p'', q'', r'' anstatt p', q', r' als Multiplikatoren an; so zieht man daraus folgende Gleichungen

$$\beta p'' = Ap'' - 2Fq'' - 2Gr'',$$

$$\beta q'' = Bq'' - 2Fp'' - 2Hr'',$$

$$\beta r'' = Cr'' - 2Gp'' - 2Hq'',$$

die verbunden mit der Bedingungsgleichung

$$p''^2 + q''^2 + r''^2 = 1,$$

dazu dienen die 4 unbekannten Größen

$$\beta,\ p'',\ q'',\ r''$$

zu bestimmen.

Digitized by Google

Und da diese Gleichungen nur dadurch von den vorhergehenden sich unterscheiden, daß diese unbekannte Größen anstatt der erstern

$$\alpha, p', q', r',$$

stehen; so schließt man mit Recht, daß die Gleichung in β sowie die Ausdrückungen von p'', q'', r'' in β mit denen einerley sind, die wir in α gefunden haben.

Wiederholt man dieselben Verfahrungsarten, und nimmt p''', q''', r''' zu Multiplikatoren an; so findet man auf gleiche Art folgende 3 Gleichungen:

$$\gamma p''' = Ap''' - 2Fq''' - 2Gr''',$$

$$\gamma q''' = Bq''' - 2Fp''' - 2Hr''',$$

$$\gamma r''' = Cr''' - 2Gp''' - 2Hq''',$$

womit man die Gleichung

$$p'''^2 + q'''^2 + r'''^2 = 1$$

verbindet; und da diese Gleichungen in allem dem vorhergehenden ähnlich sind; so zieht man daraus analoge Schlüsse.

Man zieht daher überhaupt hieraus den Schluß, daß die oben gefundene Gleichung in α die Werthe der 3 Größen α, β, γ zu Wurzeln hat, und daß, wenn man diese 3 Wurzeln successiv in den Ausdrückungen von p', q', r' in α substituirt; man sowohl die Werthe von p', q', r' als von p'', q'', r'' und p''', q''', r''' erhält, so daß alles vermittelst der Auflösung der genannten Gleichung bekannt seyn wird.

Da übrigens diese Gleichung vom 3ten Grade ist, so hat sie immer eine würkliche Wurzel, welche, wenn man sie für α annimmt, auch die 3 Größen p', q', r' würklich machen wird.

Was aber die 2 andern Wurzeln β und γ betrifft, wenn sie imaginair sind; so sind sie bekanntlich von der Form:

$$b +$$

Digitized by Google

$$b + c\sqrt{-1} \text{ und } b - c\sqrt{-1};$$

so daß die Größen p'', q'', r'', die rationale Funktionen von β sind, auch von dieſen Formen ſeyn würden

$$m + n\sqrt{-1},$$
$$m' + n'\sqrt{-1},$$
$$m'' + n''\sqrt{-1}.$$

Aus der Bedingungsgleichung

$$p''p''' + q''q''' + r''r''' = 0$$

würde alſo

$$m^2 + n^2 + m'^2 + n'^2 + m''^2 + n''^2 = 0,$$

und folglich ſo lange unmöglich als m, n, m', n', m'', n'' würklich ſind; woraus folgt, daß β und γ nicht imaginair ſeyn können. Um ſich direkte von dieſer Wahrheit zu überzeugen, und zwar durch die genannte Gleichung ſelbſt; ſo gebe ich dieſer Gleichung folgende Form:

$$\alpha - C = \frac{4H^2(\alpha - A) + 4G^2(\alpha - B) - 16FGH}{(\alpha - A)(\alpha - B) - 4F^2};$$

und ich ſubſtituire darin ſucceſſive anſtatt α die beiden andern Wurzeln β und γ und ziehe die daraus entſpringende 2 Gleichungen von einander ab; hierdurch erhalte ich nach geſchehenen Reduktionen und der Diviſion mit $\beta - \gamma$ dieſe veränderte Gleichung:

$$\begin{aligned}&((\beta - A)(\beta - B) - 4F^2)(\gamma - A)(\gamma - B) - 4F^2)\\ &+ 4(G^2 + H^2)\beta\gamma -\\ &\quad 4(4FGH + H^2A + G^2B)(\beta + \gamma)\\ &+ 16F^2(G^2 + H^2) +\\ &\quad 16(A + B)FGH +\\ &\quad 4(AH^2 + BG^2) = 0\end{aligned}$$

die

die, wie man sieht, mit der Gleichung

$$p'' p' + q'' q''' + r'' r''' = 0$$

einerley ist, und woraus man folglich dieselben Schlüsse zieht.

Die 3 Wurzeln α, β, γ sind also nothwendig alle reel, und eben so auch die 9 Coefficienten

$$p', \quad q', \quad r', \quad p'', \quad \text{etc.}$$

die rationale Funktionen dieser Wurzeln sind.

44) Wir haben eben die Werthe dieser Coefficienten bestimmt, so daß man hat

$$p^2 + q^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{und } T = \frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{2}.$$

Läßt man daher nach und nach p, q, r variiren; so erhält man, da x, y, z Funktionen dieser veränderlichen Größen sind:

$$\frac{dT}{dp} = \alpha x \frac{dx}{dp} + \beta y \frac{dy}{dp} + \gamma z \frac{dz}{dp},$$

$$\frac{dT}{dq} = \alpha x \frac{dx}{dq} + \beta y \frac{dy}{dq} + \gamma z \frac{dz}{dq},$$

$$\frac{dT}{dr} = \alpha x \frac{dx}{dr} + \beta y \frac{dy}{dr} + \gamma z \frac{dz}{dr},$$

$$\text{aber } x = p'p + q'q + r'r,$$

$$y = p''p + q''q + r''r,$$

$$z = p'''p + q'''q + r'''r,$$

wie wir schon oben gesehn haben.

Folg.

Digitized by Google

Folglich ist

$$\frac{dx}{dp} = p',$$

$$\frac{dx}{dq} = q',$$

$$\frac{dx}{dr} = r',$$

$$\frac{dy}{dp} = p'',$$

$$\frac{dy}{dq} = q'',$$

etc.

Substituirt man nun diese Werthe; so erhält man

$$\frac{dT}{dp} = p'\alpha x + p''\beta y + p'''\gamma z,$$

$$\frac{dT}{dq} = q'\alpha x + q''\beta y + q'''\gamma z,$$

$$\frac{dT}{dr} = r'\alpha x + r''\beta y + r'''\gamma z,$$

so daß wegen der Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten p', q', r', p'', etc. man hat

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2$$

Digitized by Google

und

$$\left(d.\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(d.\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(d.\frac{dT}{dr}\right)^2 =$$
$$\alpha^2\,dx^2 + \beta^2\,dy^2 + \gamma^2\,dz^2.$$

Folglich werden die 3 endlichen Gleichungen (41) auf diese gebracht:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 2h^2,$$

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = f^2,$$

$$\frac{\alpha^2\,dx^2 + \beta^2\,dy^2 + \gamma^2\,dz^2}{dt^2} = f^2(x^2 + y^2 + z^2) - 4h^4,$$

die, wie man sieht, denen (42) ganz ähnlich sind, indem die Größen x, y, z, α, β, γ den Größen p, q, r, A, B, C entsprechen.

Hieraus folgt, daß wenn man wie (42) macht

$$u = p^2 + q^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

man dieselben Formeln zwischen den veränderlichen Größen x, y, z, u, t hat, welche man zwischen p, q, r, u, t gefunden hat, wenn man nur A, B, C in α, β, γ verwandelt.

Hat man auf diese Art die Werthe von x, y, z in u oder t gefunden; so hat man die vollkommenen Werthe von p, q, r durch die Formeln (43).

45) Die Größen p, q, r reichen nicht dazu hin, alle Umstände der Umdrehungsbewegung des Körpers zu bestimmen, sie dienen nur dazu seine augenblickliche Umdrehung zu bestimmen. Denn da

$$p = \frac{dP}{dt},$$

$$q = \frac{dQ}{dt},$$

$$r = \frac{dR}{dt},$$

ist;

Digitized by Google

ist; so folgt daraus, was wir schon (26) gesehn haben, daß die willkührliche Umdrehungsachse, um die der Körper sich jeden Augenblick dreht, mit den Achsen der Coordinaten a, b, c Winkel machen wird, deren Cosinus respektiv sind

$$\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}, \quad \frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}, \quad \frac{r}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$$

und daß die Winkelgeschwindigkeit um diese Achse durch $\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}$ ausgedrückt wird.

Zur vollkommenen Erkenntniß der Umdrehung des Körpers muß man noch die Werthe der 9 Größen ξ', η', ζ', ξ'', etc. bestimmen, wovon die der Coordinaten ξ, η, ζ abhängen, welche die absolute Lage jedes Punkts des Körpers im Raume in Ansehung des als beweglich angesehenen Schwerpunkts (34) geben; welches noch 3 neue Integrationen erfordert.

In dieser Absicht nehme ich die Differentialformeln (27) wieder vor, und erhalte, indem ich pdt, qdt, rdt statt dP, dQ, dR setze, diese Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} d\xi' + (q\xi''' - r\xi'')\,dt &= 0 \\ d\xi'' + (r\xi' - p\xi''')\,dt &= 0 \\ d\xi''' + (p\xi'' - q\xi')\,dt &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (C)$$

und eben so viele ähnliche Gleichungen in η', η'', η''' und ζ', ζ'', ζ''', indem man nur ξ in η und in ζ verwandelt.

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Differentialgleichungen (A) (40) zwischen den Größen

$$\frac{dT}{dp}, \quad \frac{dT}{dq}, \quad \frac{dT}{dr};$$

Digitized by Google

so sieht man, daß sie einander völlig ähnlich sind, so daß diese Größen den Größen ξ', ξ'', ξ''' sowie auch den Größen η', η'', η''' und ζ', ζ'', ζ''' entsprechen.

Hieraus schliesse ich, daß diese letztern veränderlichen Größen als besondere Werthe der veränderlichen Größen

$$\frac{dT}{dp}, \quad \frac{dT}{dq}, \quad \frac{dT}{dr},$$

angesehn werden können, und daß daher, da die zwischen diesen veränderlichen Größen statt findende Gleichungen nur linear sind, man folgende 3 vollkommene Integral-Gleichungen durch die Annahme gewisser dreier beständiger Größen l, m, n hat:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT}{dp} &= l\xi' + m\eta' + n\zeta', \\ \frac{dT}{dq} &= l\xi'' + m\eta'' + n\zeta'', \\ \frac{dT}{dr} &= l\xi''' + m\eta''' + n\zeta''', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(D)}$$

Verbindet man nun diese 3 Gleichungen mit den 6 Bedingungsgleichungen zwischen den nämlichen veränderlichen Größen ξ', η', etc.; so scheint es, daß man diese veränderlichen Größen, die überhaupt 9 an der Zahl sind, bestimmen kann. Betrachtet man aber näher die vorhergehenden Gleichungen; so ist leicht sich davon zu überzeugen, daß sie nur bey zweien Gleichungen statt finden können; denn addirt man ihre Quadrate zusammen; so geschieht es, daß alle unbekannte Größen ξ', η', ξ'', etc. auf einmal wegen derselben Bedingungsgleichungen (15) verschwinden; so daß man nur die Gleichung hat:

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 = l^2 + m^2 + n^2,$$

welche,

Digitized by Google

welche, wie man sieht, mit der erstern der beiden weiter oben gefundenen (41) Integralien übereinkommt, und die Vergleichung dieser Gleichungen giebt

$$s^2 = l^2 + m^2 + n^2$$

so daß unter den 4 beständigen Größen nur 3 willkührliche sind.

Hieraus muß man schließen, daß die vollkommene Auflösung noch eine neue Integration erfordere, wobei man eine der obigen Differentialgleichungen oder irgend eine Combination dieser Gleichungen anwenden muß.

46) Man kann aber den Calkul noch weit allgemeiner und einfacher machen, wenn man direkte die Werthe der Coordinaten ξ, η, ζ sucht, die sogleich die absolute Lage irgend eines Punkts des Körpers bestimmen, für den die auf die Achsen des Körpers sich beziehenden Coordinaten a, b, c sind.

In dieser Absicht addire ich die 3 oben gefundenen Integral-Gleichungen (D), nachdem ich die erste durch a, die 2te durch b, die 3te durch c multiplicirt habe; welches folgende Gleichung giebt (12)

$$l\xi + m\eta + n\zeta = a\frac{dT}{dp} + b\frac{dT}{dq} + c\frac{dT}{dr}.$$

Nun aber ist nach der Natur der Größen ξ, η, ζ (13)

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Endlich hat man auch (28), wenn man pdt, qdt, rdt anstatt dP, dQ, dR setzt, und a, b, c als beständig annimmt

$$\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2} = (cq - br)^2 + (ar - cp)^2 + (bp - aq)^2$$

Man hat also 3 Gleichungen, woraus man die Werthe von ξ, η, ζ vermittelst einer einzigen Integration ziehen kann.

Digitized by Google

Wollte man übrigens die Werthe von ξ', η', ζ', ξ'', etc., jeden besonders kennen; so hätte man nur in den allgemeinen Ausdrückungen von ξ, η, ζ die beständigen Größen

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

oder

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 0,$$

oder

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 1$$

zu seßen.

Wir wollen Kürze halber annehmen

$$L = a\frac{dT}{dp} + b\frac{dT}{dq} + c\frac{dT}{dr},$$

$$M = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$N = (cq - br)^2 + (ar - cp)^2 + (bp - aq)^2;$$

alsdenn hat man folgende 3 Gleichungen aufzulösen:

$$l\xi + m\eta + n\zeta = L,$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = M,$$

$$\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2} = N,$$

wo M eine gegebene beständige Größe ist, L und N aber als bekannt in Funktionen von t angenommen sind, und l, m, n willkührliche beständige Größen sind.

Ich bemerke hier zuerst, daß, wenn l und m zugleich = 0 wären, die erstere Gleichung geben würde

$$\zeta = \frac{L}{n};$$

und

Digitized by Google

und durch die Substitution dieses Werthes in den beiden andern erhält man:

$$\xi^2 + \eta^2 = M - \frac{L}{n^2},$$

$$\frac{d\xi^2 + d\eta^2}{dt^2} = N - \frac{dL^2}{n^2 dt^2};$$

welche Gleichungen leicht zu integriren sind, wenn man

$$\xi = \rho \operatorname{Cos} \vartheta,$$

$$\eta = \rho \sin \vartheta$$

setzt, welches sie in folgende beiden verwandelt:

$$\rho^2 = M - \frac{L}{n^2},$$

$$\frac{\rho d\vartheta^2 + d\rho^2}{dt^2} = N - \frac{dL^2}{n^2 dt^2},$$

wovon die erstere den Werth von ρ, die 2te aber den Winkel ϑ durch die Integration dieser Formel

$$d\vartheta = \frac{dt}{\rho} \sqrt{N - \frac{dL^2}{n^2 dt^2} - \frac{d\rho^2}{dt^2}}$$

giebt.

Gesetzt nun l und m seyen nicht = o, und wir wollen sehen, wie man diesen Fall auf den vorhergehenden bringen kann. Es ist klar, daß, wenn man macht,

$$l\xi + m\eta = x\sqrt{l^2 + m^2},$$

$$m\xi - l\eta = y\sqrt{l^2 + m^2}$$

man

Digitized by Google

man sogleich hat

$$\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2,$$

$$d\xi^2 + d\eta^2 = dx^2 + dy^2;$$

die vorgesetzten Gleichungen lassen sich also leicht auf diese Form bringen:

$$x\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = L,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = M,$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = N.$$

Setzt man ausserdem noch

$$x\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = z\sqrt{l^2 + m^2 + n^2},$$

$$nx - \zeta\sqrt{l^2 + m^2} = u\sqrt{l^2 + m^2 + n^2},$$

so ist noch

$$x^2 + \zeta^2 = z^2 + u^2,$$

$$dx^2 + d\zeta^2 = dz^2 + du^2;$$

wodurch die vorhergehenden Gleichungen auf folgende Formen gebracht werden:

$$z\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = L,$$

$$u^2 + y^2 + z^2 = M,$$

$$\frac{du^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = N,$$

die, wie man sieht, völlig denen ähnlich sind, die wir eben oben aufgelöst haben. Man hat also auf diese Art für u, y, z die nämlichen Ausdrükkungen, die wir für ξ, η, ζ gefunden haben, wenn man nur n in

$\sqrt{}$

Digitized by Google

$\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}$ verwandelt. Sind diese Werthe bekannt; so hat man die allgemeinen Werthe von ξ, η, ζ durch die Formeln:

$$\xi = \frac{lx + my}{\sqrt{(l^2 + m^2)}},$$

$$\eta = \frac{mx - ly}{\sqrt{(l^2 + m^2)}},$$

$$\zeta = \frac{nu + z\sqrt{l^2 + m^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

47) Dies ist, wenn ich nicht irre, die allgemeinste und zugleich einfachste Auflösung, die man von dem berühmten Problem der Umdrehungsbewegung freyer Körper geben kann; sie ist derjenigen analog, die ich in den Memoiren der Berliner Akademie für d. J. 1773. gegeben habe, aber sie ist zugleich in einigem Betracht direkter und einfacher. In jener bin ich von 3 Integral-Gleichungen ausgegangen, die den Gleichungen (D) (45) entsprechen, und die ich direkte durch das bekannte Princip der Flächen und Momente erhalten hatte, und womit ich die Gleichung für die lebendige Kräfte $T = h^2$ (41) verbunden hatte. Hier habe ich die ganze Auflösung von den 3 primitiven Differentialgleichungen abgeleitet, und ich glaube bey dieser Auflösung alle Klarheit, und (wenn ich mich so ausdrücken darf) alle Eleganz angewandt zu haben, deren sie fähig ist. Es wird deswegen jedem lieb seyn, daß ich wieder von neuem diese Aufgabe behandelt habe, wiewohl ich es nur aus bloser Curiosität gethan habe, besonders da es, woran nicht zu zweifeln ist, einigen Nutzen zur weitern Vervollkommung der Analyse bringen kann.

Was mir bey der vorhergehenden Auflösung am merkwürdigsten scheint, ist der Gebrauch, den man von den Grösen ξ', η', ζ', ξ'', etc. hier macht ohne ihre Werthe zu kennen, und wo nur die Bedingungsgleichungen bekannt sind, denen sie unterworfen sind, und welche zuletzt ganz aus dem Calkul verschwinden. Ich zweifele nicht daran, daß diese Art von

Digitized by Google

Analyse nicht auch bey andern Gelegenheiten von eben so großem Nutzen seyn könne.

Ist diese Auflösung übrigens etwas lang; so hat man es ganz allein der großen Allgemeinheit zuzuschreiben, die man dabei beobachten wollte. Um sie zu vereinfachen hat man 2 Mittel bemerken können, 1) wenn man die beständigen Größen F, G, H = 0 setzt (42) und 2) wenn man die beständigen Größen l und m = 0 setzt 46. Die erstere dieser beiden Voraussetzungen hat man so lange immer für nothwendig gehalten, um zu einer vollkommenen Auflösung der Aufgabe zu gelangen, bis ich in meiner Abhandlung 1773. eine Methode angab, wodurch man auch diese Voraussetzung nicht mehr nöthig hat. Diese Voraussetzung besteht nämlich darin, für die Achsen der Coordinaten a, b, c gerade Linien anzunehmen, von der Beschaffenheit, daß die Summen

$$Sab\,Dm,\quad Sac\,Dm,\quad Sbc\,Dm = 0$$

seyen (36) und Hr. Euler hat zuerst gewiesen, daß dies allezeit möglich sey, die Figur des Körpers mag auch beschaffen seyn, wie sie will, und daß die auf diese Art bestimmten Achsen natürliche Umdrehungsachsen sind, d. h., daß sie so beschaffen sind, daß der Körper sich frey um jede von ihnen drehen kann. Ohnerachtet man aber allezeit Achsen finden kann, die die genannte Eigenschaften besitzen, und da die Lage der Achsen des Körpers ausserdem willkührlich sey; so ist es doch etwas ganz anders, eine völlig direkte und von diesen besondern Betrachtungen unabhängige Auflösung zu erhalten. Die 2te der beiden erwähnten Voraussetzungen hängt von der Lage der Achsen der Coordinaten ξ, η, ζ im Raume ab, welche, da sie ebenfals willkührlich sind, allezeit so angenommen werden kann, daß die beständigen Größen l und m = 0 werden, wie man sich direkte nach den allgemeinen Ausdrückungen ξ, η, ζ, die wir gefunden haben, davon überzeugen kann.

48) Setzen wir F, G, H = 0; so haben wir, wie wir (42) gesehn haben

dT

$$\frac{dT}{dp} = Ap,$$

$$\frac{dT}{dq} = Bq,$$

$$\frac{dT}{dr} = Cr,$$

und substituirt man diese Werthe in den 3 Differentialgleichungen (A); so entstehen diese:

$$dp + \frac{C - B}{A} qrdt = o,$$

$$dq + \frac{A - C}{B} prdt = o,$$

$$dr + \frac{B - A}{C} pqdt = o,$$

die mit denen übereinkommen, die Hr. Euler in der Auflösung angewandt hat, welche er zuerst von dieser Aufgabe gegeben hat. (Man sehe die Memoiren der Akademie zu Berlin für 1758). Um sich davon zu überzeugen, hat man nur zu bedenken, daß die beständigen Größen A, B, C (36) nichts anders als das sind, was Hr. Euler Momente der Trägheit des Körpers um die Achsen der Coordinaten a, b, c nennt, und daß die veränderlichen Größen p, q, r von der augenblicklichen und willkührlichen Umdrehungsbewegung abhängen, so daß, wenn man α, β, γ die Winkel nennt, die die Achse, um die der Körper jeden Augenblick sich willkührlich bewegt, mit den Achsen der a, b, c macht, und ρ die Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung um diese Achse ist, man hat (45)

$$p = \rho \operatorname{Cof} \alpha,$$

$$q = \rho \operatorname{Cof} \beta,$$

$$r = \rho \operatorname{Cof} \gamma.$$

Digitized by Google

Was die andern Gleichungen des Hrn. Euler betrifft, welche die Lage der Achsen des Körpers im Raume zu bestimmen dienen; so kann man sie mit unsern Gleichungen (C) (45) vergleichen. Denn da die 9 Größen ξ', η', ζ', ξ'', etc. nichts anders als die rechtwinklichte Coordinaten der 3 Punkte des Körpers sind, die man in seinen 3 Achsen in der Distanz, vom Mittelpunkt angenommen hat, (welches offenbar daraus folgt, daß diese Größen aus den dreien ξ, η, ζ entstehn, wenn man successiv

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0$$

hierauf

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 0,$$

und endlich

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 1$$

setzt) so ist klar, daß wenn man mit Hrn. Euler durch l, m, n Complemente der Neigungswinkel dieser Achsen zur festen Ebene der ξ, und η und durch λ, μ, ν die Winkel bezeichnet, die die Projektionen eben dieser Achsen mit der festen Achse der ξ macht, man folgende Ausdrückungen hat:

$$\zeta' = \text{Cos } l,$$
$$\eta' = \text{sin } l \text{ sin } \lambda,$$
$$\xi' = \text{sin } l \text{ Cos } \lambda,$$
$$\zeta'' = \text{Cos } m,$$
$$\eta'' = \text{sin } m \text{ sin } \mu,$$
$$\xi'' = \text{sin } m \text{ Cos } \mu,$$
$$\zeta''' = \text{Cos } n,$$
$$\eta''' = \text{sin } n \text{ sin } \nu,$$
$$\xi''' = \text{sin } n \text{ Cos } \nu;$$

und

Digitized by Google

und durch diese Substitutionen findet man leicht die Gleichungen, auf die Hr. Euler durch geometrische und trigonometrische Betrachtungen gekommen ist.

49) Setzt man übrigens zugleich F, G, H und l, m = o; so hat man die einfachste Auflösung durch die 3 Gleichungen (D) (45), wenn man die Werthe von ζ', ζ'', ζ''' und von p, q, r in φ, ψ, ω (30, 37) darin substituirt. Denn dadurch erhält man folgende 3 Gleichungen von der ersten Ordnung:

$$A\ \frac{\sin\varphi\ \sin\omega\ d\psi + \cos\varphi\ d\omega}{dt} = n\ \sin\varphi\ \sin\omega,$$

$$B\ \frac{\cos\varphi\ \sin\omega\ d\psi - \sin\varphi\ d\omega}{dt} = n\ \cos\varphi\ \sin\omega,$$

$$C\ \frac{d\varphi + \cos\omega\ d\psi}{dt} = n\ \cos\omega;$$

(oder $A(\sin\varphi\ \sin\omega\ d\psi + \cos\varphi\ d\omega) = n\ \sin\varphi\ \sin\omega\ dt$,

$B(\cos\varphi\ \sin\omega\ d\psi - \sin\varphi\ d\omega) = n\ \cos\varphi\ \sin\omega\ dt$,

$C(d\varphi + \cos\omega\ d\psi) = n\ \cos\omega\ dt$ M.)

welche sich offenbar auch so ausdrücken lassen:

$$ndt - Ad\psi = \frac{A\,d\omega}{\tang\varphi\ \sin\omega},$$

$$ndt - Bd\psi = -\frac{B\tang\varphi\ d\omega}{\sin\omega},$$

$$ndt - Cd\psi = \frac{Cd\varphi}{\cos\omega}.$$

Wirft man nun dt und $d\psi$ weg, indem man diese 3 Gleichungen zusammen addirt, nachdem man sie respektiv durch

Digitized by Google

$$C - B,\ A - C,\ B - A$$

multiplicirt hat; so erhält man die Gleichung

$$A(C-B)\frac{d\omega}{\tang\varphi\ \sin\omega} - B(A-C)\frac{\tang\varphi\ d\omega}{\sin\omega} +$$

$$C(B-A)\frac{d\varphi}{\cos\omega} = 0$$

die auch auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\frac{\cos\omega\ d\omega}{\sin\omega} = \frac{C(B-A)\,d\varphi}{B(A-C)\tang\varphi - \frac{A(C-B)}{\tang\varphi}},$$

wo die veränderlichen Größen getrennt sind.

Das 2te Glied dieser Gleichung verwandelt sich

$$\text{in } \left(\frac{C(B-A)\,d\varphi\ \tang\varphi}{B(A-C)\ \tang^2\varphi - A(C-B)}\right) =$$

$$\frac{C(B-A)\,d\varphi\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{B(A-C)\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} - A(C-B)}$$

oder Zähler und Nenner mit $\cos^2\varphi$ multiplicirt in M.)

$$\frac{C(B-A)\,d\varphi\ \sin\varphi\ \cos\varphi}{B(A-C)\sin^2\varphi - A(C-B)\cos^2\varphi},$$

(und da $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{2}$,

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos^2\alpha}{2},$$

und

und $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \operatorname{Cof} \alpha$,

so ist dies $= \mathfrak{M}.)$

$$\frac{C(B - A) \sin 2\varphi \, d\varphi}{2AB - C(A + B) + C(B - A) \operatorname{Cof} 2\varphi};$$

folglich wenn man durch die Logarithmen integrirt, und diese alsdenn in Zahlen verwandelt

$$2AB - C(A + B) + C(B - A) \operatorname{Cof} 2\varphi = \frac{K}{\sin^2 \omega},$$

wo K eine beständige willkührliche Größe ist.

(woraus man bekommt

$$\operatorname{Cof} 2\varphi = \frac{\frac{K}{\sin^2 \omega} - 2AB + C(A + B)}{C(B - A)}$$

$$= \frac{K - 2AB \sin^2 \omega + C(A + B \sin^2 \omega}{C(B - A) \sin^2 \omega \quad \mathfrak{M}.)}$$

diesen Werth nun (von $\operatorname{Cof} 2\varphi$) in dem Ausdrucke

$$\operatorname{tang} \varphi = V\left[\frac{1 - \operatorname{Cof} 2\varphi}{1 + \operatorname{Cof} 2\varphi}\right]$$

substituirt giebt

$$\operatorname{tan} \varphi = V\left(\frac{2A(B - C) \sin^2 \omega - K}{2B(C - A) \sin^2 \omega + K}\right)$$

und setzt man diesen Werth von $\operatorname{tang} \varphi$ in den beiden erstern Differentialgleichungen; so hat man:

ndt

Digitized by Google

$$ndt - Ad\psi = \frac{Ad\omega}{\sin\omega} \sqrt{\left(\frac{2B(C-A)\sin^2\omega + K}{2A(B-C)\sin^2\omega - K}\right)},$$

$$ndt - Bd\psi = -\frac{Bd\omega}{\sin\omega} \sqrt{\left(\frac{2A(B-C)\sin^2\omega - K}{2B(C-A)\sin^2\omega + K}\right)},$$

in welchen Gleichungen die unbestimmten Größen getrennt sind, und die integrirt t und ψ in Funktionen von ω geben.

Diese Auflösung kommt mit derjenigen überein, die Hr. D'Alembert im 4ten Theile seiner kleinen Schriften gegeben hat.

50) Wir kommen nun zum zweiten Falle, wo der schwere Körper an einem festen Punkt aufgehängt ist, um den er sich frei nach allen Richtungen bewegen kann. Nimmt man diesen Punkt für den Mittelpunkt des Körpers d. h. für den gemeinschaftlichen Anfang der Coordinaten ξ, η, ζ und a, b, c an, und setzt, die Ordinaten ζ seyen vertikal und von oben nach unten gerichtet; so hat man für die Umdrehungsbewegung des Körpers die Gleichungen (B) (40). Diese Gleichungen sind mehr zusammengesetzt als die im vorhergehenden Falle, indem die Glieder durch die Grössen $Sadm$, $SbDm$, $ScDm$ multiplicirt sind, welche nicht mehr $= o$ sind, wenn der Mittelpunkt des Körpers, dessen Lage hier gegeben ist, ausserhalb seines Schwerpunkts fällt; dennoch aber kann man 2 dieser Größen wegschaffen, wenn man durch den Schwerpunkt eine der Achsen der Coordinaten a, b, c gehen läßt, deren Lage im Körper willkührlich ist, welches ein wenig die gesuchten Gleichungen vereinfachen wird.

Wir wollen daher annehmen, die Achse der Coordinaten c gehe würklich durch den Schwerpunkt des Körpers; alsdenn hat man nach den Eigenschaften dieses Mittelpunkts

$$SaDm = o, \quad SbDm = o,$$

und nennt man K die Distanz zwischen dem Mittelpunkte des Körpers, der der Aufhängungspunkt ist, und seinem Schwerpunkte; so hat man offenbar auch

$$S(K-c)Dm = o$$

folg-

Digitized by Google

folglich $Sc\,Dm = SK\,Dm = KDm = Km$, wenn man m die Masse des Körpers nennt. Verrichtet man diese Substitutionen und setzt K für Km; so erhält man folgende 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} d.\frac{dT}{dp} + q\frac{dT}{dr} - r\frac{dT}{dq} + K\zeta'' &= 0, \\ d.\frac{dT}{dp} + r\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dr} - K\zeta' &= 0, \\ d.\frac{dT}{dr} + p\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dp} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \cdots \text{(E)}$$

worin

$$T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - Fqr - Gpr - Hpq.$$

51) Man kann sogleich 2 Integralien dieser Gleichungen finden, indem man sie zusammen addirt, nachdem man sie respektiv durch p, q, r oder durch ζ', ζ'', ζ''' multiplicirt hat; denn weil

$$d\zeta' = (\zeta''r - \zeta'''q)\,dt,$$
$$d\zeta'' = (\zeta'''p - \zeta'r)\,dt,$$
$$d\zeta''' = (\zeta'q - \zeta''p)\,dt \text{ (27)};$$

so hat man die beiden Gleichungen

$$pd.\frac{dT}{dp} + qd.\frac{dT}{dq} + rd.\frac{dT}{dr} - Kd\zeta''' = 0.$$

Digitized by Google

$$\zeta' d.\frac{dT}{dp} + \zeta'' d.\frac{dT}{dq} + \zeta''' d.\frac{dT}{dr} + \frac{dT}{dp} d\zeta' + \frac{dT}{dq} d\zeta''$$

$$+ \frac{dT}{dr} d\zeta''' = 0,$$

davon die Integralien sind

$$p\frac{dT}{dp} + q\frac{dT}{dq} + r\frac{dT}{dr} - T - K\zeta''' = f,$$

$$\zeta'\frac{dT}{dp} + \zeta''\frac{dT}{dq} + \zeta''\frac{dT}{dr} = h,$$

wo f und h 2 willkührliche beständige Größen sind.

Es scheint schwer, andere Integralien zu finden, und folglich die Aufgabe allgemein aufzulösen. Allein man kann dazu gelangen, indem man annimmt, daß die Figur des Körpers besondern Bedingungen unterworfen sey.

Setzt man also

$$F = 0,\quad G = 0,\quad H = 0 \text{ und } A = B;$$

so hat man

$$\frac{dT}{dp} = Ap;$$

$$\frac{dT}{dq} = Aq;$$

und die 3te der Gleichungen (E) wird

$$d.\frac{dT}{dr} = 0,$$

davon

Digitized by Google

davon das Integrale ist

$$\frac{dT}{dr} = \text{Conſt.}$$

Dieſer Fall ist der, wo die Achſe der Ordinaten c d. h. die gerade Linie, die durch den Aufhängepunkt und den Schwerpunkt geht, eine natürliche Umdrehungsachſe ist, und wo die Momente der Trägheit um 2 andere Achſen gleich ſind (48); welches überhaupt bey allen Umdrehungen feſter Körper ſtatt hat, wenn der feſte Punkt in der Umdrehungsachſe angenommen worden iſt. Die Auflöſung dieſes Falles iſt leicht nach den eben gefundenen 3 Integralien.

Denn da

$$T = \frac{A(p^2 + q^2)}{2} + \frac{Cr^2}{2},$$

ſo iſt offenbar, daß dieſe 3 Integralien ſich auf dieſe Form bringen laſſen:

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2 - 2K\zeta''' = 2f,$$

$$A(\zeta' p + \zeta'' q) + C\zeta''' r = h,$$

$$r = n,$$

wo f, h, n willkührliche beſtändige Größen ſind.

Subſtituirt man daher für ζ', ζ'', ζ''' und für p, q, r ihre Werthe in Funktionen von φ, ψ, ω (30, 37); ſo erhält man folgende 3 Gleichungen:

$$A\frac{\sin^2\omega\, d\psi^2 + d\omega^2}{dt^2} + Cn^2 - 2K\cos\omega = 2f,$$

$$A\frac{\sin\omega\, d\psi}{dt} + Cn\cos\omega = h,$$

Digitized by Google

$$\frac{d\varphi + \mathrm{Cof}\,\omega\, d\psi}{dt} = n,$$

welche, wie man sieht, den Vorzug haben, daß die endlichen Winkel ψ und φ sich nicht mehr darin finden.

Die 2te giebt sogleich

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{h - Cn\,\mathrm{Cof}\,\omega}{A\,\mathrm{sin}^2\,\omega},$$

und wenn man diesen Werth in der erstern substituirt; so erhält man:

$$dt = \frac{A\,\mathrm{sin}\,\omega\, d\omega}{\sqrt{(A\,\mathrm{sin}^2\,\omega\,(2f - Cn^2 + 2K\,\mathrm{Cof}\,\omega) - (h - Cn\,\mathrm{Cof}\,\omega)^2}},$$

endlich giebt die 2te und 3te

$$d\psi = \frac{h - Cn\,\mathrm{Cof}\,\omega\, d\omega}{\mathrm{sin}\,\omega\sqrt{(A\,\mathrm{sin}^2\,\omega\,(2f - Cn^2 + 2K\,\mathrm{Cof}\,\omega) - (h - Cn\,\mathrm{Cof}\,\omega)^2)}},$$

$$d\varphi = \frac{(An - h\,\mathrm{Cof}\,\omega + (C - An\,\mathrm{Cof}^2\,\omega)\, d\omega}{\mathrm{sin}\,\omega\sqrt{(A\,\mathrm{sin}^2\,\omega\,(2f - Cn^2 + 2K\,\mathrm{Cof}\,\omega) - (h - (n\,\mathrm{Cof}\,\omega)^2)}};$$

in welchen Gleichungen die unbekannten Größen getrennt sind, worin aber die Integration überhaupt von der Rektification der Kegelschnitte abhängt.

52) Wir wollen nun wieder die Gleichungen (E) vornehmen, und darin die Werthe von

$$\frac{dT}{dp}, \quad \frac{dT}{dq}, \quad \frac{dT}{dr}$$

in p, q, r substituiren; alsdenn wird aus diesen:

Adp

Digitized by Google

$$\frac{A\,dp - Gdt - Hdq}{dt} + (C - B)\,qr + F(r^2 - q^2) - Gpq + Hpr + K\zeta'' = 0,$$

$$\frac{B\,dq - Fdr - Hdp}{dt} + (A - C)\,pr + G(p^2 - r^2) - Hqr + Fpq - K\zeta' = 0,$$

$$\frac{C\,dr - Fdq - Gdp}{dt} + (B - A)\,pq + H(q^2 - p^2) - Fpr + Gqr = 0.$$

Im Zustande der Ruhe des Körpers sind die 3 Größen p, q, r = 0, weil $\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$ die augenblickliche Umdrehungsgeschwindigkeit ist (45); man hat also alsdenn

$$\zeta' = 0, \quad \zeta'' = 0,$$

so daß, weil

$$\zeta'^2 + \zeta''^2 + \zeta'''^2 = 1 \text{ und folglich}$$
$$\zeta''' = 1,$$

die Achse der Coordinaten ζ mit der der Ordinaten c zusammenfallen wird; d. h. diese letztere Achse, die durch den Schwerpunkt des Körpers geht, und die wir vorhin die Achse des Körpers genannt haben, wird vertikal seyn, und dies ist der Gleichgewichtszustand des Körpers, und es erhellet dies noch mehr aus den Formeln (30), welche geben

$$\sin\varphi \sin\omega = 0, \quad \cos\varphi \sin\omega = 0$$

und folglich $\omega = 0$, wo ω der Winkel der beiden Achsen der Coordinaten c und ζ ist.

Setzt man nun, der Körper sey in Bewegung; so nimmt man zugleich an, seine Achse entferne sich sehr wenig von der Vertikallinie, so daß der Abweichungswinkel ω allezeit sehr klein bleibt; alsdenn werden die Größen ζ', ζ'' sehr klein seyn, und man erhält den Fall, wo der

Digitized by Google

Körper nur sehr geringe Oscillationen um die Vertikallinie macht, indem er zugleich eine Umdrehungsbewegung um seine Achse hat.

Dieser Fall, der noch nicht aufgelößt worden ist, kann es leicht und vollkommen durch unsre Formeln werden, und wenn man die sehr kleinen Größen von der 2ten und folgenden Ordnung wegläßt; so findet man aus den Bedingungsgleichungen (15)

$$\zeta^{III} = 1,$$
$$\xi^{III} = -\xi^{I}\zeta^{I} - \xi^{II}\zeta^{II},$$
$$\eta^{III} = -\eta^{I}\zeta^{I} - \eta^{II}\zeta^{II},$$
$$\xi^{I2} + \xi^{II2} = 1,$$
$$\eta^{I2} + \eta^{II2} = 1,$$
$$\xi^{I}\eta^{I} + \xi^{II}\eta^{II} = 0;$$

folglich $\xi^{I} = \sin \pi,$

$$\xi^{II} = \mathrm{Cos}\, \pi,$$
$$\eta^{I} = \sin \vartheta,$$
$$\eta^{II} = \mathrm{Cos}\, \vartheta,$$

und $\mathrm{Cos}(\pi - \vartheta) = 0$; folglich

$$\pi = 90^{\circ} + \vartheta \text{ und}$$
$$\xi^{I} = \mathrm{Cos}\, \vartheta, \quad \xi^{II} = -\sin \vartheta.$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdrückungen von dP, dQ, dR (23); so erhält man

$$dP = \xi^{I}\, d\vartheta + d\zeta^{II},$$
$$dQ = \zeta^{II}\, d\vartheta - d\xi^{I},$$
$$dR = d\vartheta,$$

indem man immer die Größen von der 2ten Ordnung vernachlässigt.

Man

Digitized by Google

Man hat also auf diese Art

$$p = \frac{dP}{dt} = \frac{\zeta' d\vartheta + d\zeta''}{dt},$$

$$q = \frac{dQ}{dt} = \frac{\zeta'' d\vartheta - d\zeta'}{dt},$$

$$r = \frac{dR}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt},$$

welche Werthe in den obigen Differentialgleichungen substituirt Linearglei-chungen zur Bestimmung dieser veränderlichen Größen geben, wenn man die Potenzen und Produkte von ζ' und ζ'' wegläßt.

Ehe man aber diese Substitutionen verrichtet; bemerke man, daß wenn man

$$\zeta' \text{ und } \zeta'' = 0$$

ist, die erwähnten Gleichungen geben werden

$$-G\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + F\frac{d\vartheta^2}{dt^2} = 0,$$

$$-F\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - G\frac{d\vartheta^2}{dt^2} = 0;$$

$$C\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 0.$$

Weil aber C nicht = 0 werden kann, wenn der Körper nicht in eine physische Linie übergeht, indem

$$C = S(a^2 + b^2)\,Dm$$

ist; so folgt daraus, daß man diesen Gleichungen nur alsdenn genug thun kann, wenn man macht

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 0,$$

und

Digitized by Google

und hernach entweder

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0,$$

oder

$$F = 0, \text{ und } G = 0.$$

Hieraus kann man leicht schließen, daß da ζ' und ζ'' nicht = 0 sondern nur sehr klein sind, die Werthe von $\frac{d\vartheta}{dt}$ oder von F und G ebenfals sehr klein seyn müssen; welches 2 Fälle giebt, wovon jeder besonders betrachtet werden muß.

53) Wir wollen vorerst annehmen, $\frac{d\vartheta}{dt}$ sey eine sehr kleine Größe von eben der Ordnung als ζ' und ζ'', alsdenn hat man bis auf die Größen von der 2ten Ordnung

$$p = \frac{d\zeta''}{dt}.$$

$$q = -\frac{d\zeta'}{dt}.$$

Durch diese Substitutionen werden die Differentialgleichungen (52), wenn man immer die Größen von der 2ten Ordnung wegläßt, und um mehrerer Einfachheit die Buchstaben ζ', ζ'' in s, u verwandelt

$$\frac{A d^2 u - G d^2 \vartheta + H d^2 s}{dt^2} + Ku = 0,$$

$$\frac{-B d^2 s - F d^2 \vartheta - H d^2 u}{dt^2} - Ks = 0,$$

$$\frac{C d^2 \vartheta - F d^2 s - G d^2 u}{dt^2} = 0.$$

Die

Digitized by Google

Die letztere giebt

$$\frac{d^2\mathfrak{H}}{dt^2} = \frac{Fd^2s + Gd^2u}{Cdt^2};$$

und substituirt man diesen Werth in den beiden erstern; so hat man

$$\left(\frac{Ad^2u}{dt^2} - \frac{GFd^2s + G^2d^2u}{Cdt^2} + \frac{Hd^2s}{dt^2} + Ku = o,\right.$$

$$\left. - \frac{Bd^2s}{dt^2} - \frac{F^2d^2s + FGd^2u}{Cdt^2} - \frac{Hd^2u}{dt^2} - Ks = o, \text{ M.}\right)$$

oder

$$\frac{(AC - G^2)\,d^2u + (CH - GF)\,d^2s}{dt^2} + CKu = o,$$

$$\frac{(BC + F^2)\,d^2s + (CH + GF)\,d^2u}{dt^2} + CKs = o,$$

deren Integration durch die bekannten Methoden leicht bewerkstelligt werden kann.

Denn man setze in dieser Absicht

$$s = \alpha \sin(\rho t + \beta),$$

$$u = \gamma \sin(\rho t + \beta),$$

wo α, β, γ, ρ unbestimmte beständige Größen sind; alsdenn hat man durch diese Substitutionen folgende 2 Bedingungsgleichungen:

$$(AC - G^2)\,\rho^2 + (CH - GF)\,\alpha\rho^2 - CK\gamma = o,$$

$$(BC - F^2)\,\alpha\rho^2 + (CH + GF)\,\gamma\rho^2 - AR\alpha = o,$$

Digitized by Google

welche geben

$$\frac{r}{s} = \frac{(CH - GF)\rho^2}{CK - (AC - G^2)\rho^2} = \frac{CK - (BC + F^2)\rho^2}{(CH + GF)\rho^2};$$

woraus folgende Gleichung in ρ folgt

$$\frac{C^2K^2}{\rho^4} - ((A + B)C + F^2 - G^2)\frac{CK}{\rho^2} +$$
$$(AB - H^2)C^2 + (AF^2 - BG^2)C = 0$$

welche, wie man sieht, 4 Wurzeln hat, wovon 2 einander gleich nur mit dem entgegengesetzten Zeichen sind.

Bezeichnet man also allgemein durch ρ und ρ' die ungleichen Wurzeln dieser Gleichung, und abstrahirt von ihren Zeichen, und nimmt 4 willkührliche beständige Größen α, α', β, β' an; so hat man allgemein

$$s = \alpha \sin(\rho t + \beta) + \alpha' \sin(\rho' t + \beta')$$

und folglich

$$u = \frac{(CH - GF)\rho^2 \alpha \sin(\rho t + \beta)}{CK - (AC - G^2)\rho^2} +$$
$$\frac{(CH - GF)\rho'^2 \alpha' \sin(\rho' t + \beta')}{CK - (AC - G^2)\rho'^2}.$$

Endlich erhält man, wenn man den Werth von

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\left(= \frac{F d^2 s + G d^2 u}{C dt^2}\right) \text{integrirt}$$

$$\vartheta = f + ht + \frac{Fs + Gu}{C}.$$

Auf diese Art wird man alle veränderliche Größen in Funktionen von t erhalten, und die Aufgabe wird aufgelößt seyn.

Da

Digitized by Google

Da übrigens diese Auflösung auf der Hypothese beruhet, daß s, u und $\frac{d\vartheta}{dt}$ sehr kleine Größen sind; so müssen, wenn sie statt finden soll, ebenfals die beständigen Größen α, α' und h sehr klein seyn. 2) Die Wurzeln ρ, ρ' würklich und ungleich seyn, damit der Winkel t allezeit unter dem Zeichen der Sinus sey. Diese 2te Bedingung aber erfodert folgende beide

$$(A + B)\,C + F^2 - G^2 < 0,$$

$$4((AB - H^2)\,C^2 + (AF^2 - BG^2)\,C) < ((A + B)\,C + F^2 - G^2)^2;$$

welche allein von der Figur des Körpers und von der Lage des Aufhängepunkts abhängen.

54) Wir wollen nun 2tens annehmen F und G seyen eben so klein und von derselben Ordnung als ζ' und ζ''; läßt man alsdenn die Größen von der 2ten Ordnung weg, und setzt s, u an die Stelle von ζ', ζ'' so werden die Differentialgleichungen (52)

$$\frac{A(d.sd\vartheta + d^2u)}{dt^2} - \frac{Gd^2\vartheta}{dt^2} - \frac{H(d.ud\vartheta - d^2s)}{dt^2}$$

$$+ \frac{(C - B)(ud\vartheta - ds)\,d\vartheta}{dt^2} + \frac{Fd\vartheta^2}{dt^2}$$

$$+ \frac{H(sd\vartheta + du)\,d\vartheta}{dt^2} + Ku = 0,$$

$$\frac{B(d.ud\vartheta - d^2s)}{dt^2} - \frac{Fd^2\vartheta}{dt^2} - \frac{H(d.sd\vartheta + d^2u)}{dt^2}$$

$$+ \frac{(A - C)(sd\vartheta + du)\,d\vartheta}{dt^2} - \frac{Gd\vartheta^2}{dt^2}$$

Digitized by Google

$$- \frac{H(ud\vartheta - ds)\,d\vartheta}{dt^2} - Ks = o$$

$$\frac{Cd^2\vartheta}{dt^2} = o.$$

Die letztere giebt

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = o$$

und wenn man integrirt

$$\frac{d\vartheta}{dt} = n,$$

wo n eine beständige willkührliche Größe ist. Substituirt man diesen Werth von $\frac{d\vartheta}{dt}$ in den beiden Gleichungen; so erhält man folgende:

$$A.\ \frac{d^2u}{dt^2} + H\frac{d^2s}{dt^2} + (A + B - C)\,n\frac{ds}{dt} + (C - B)\,n^2u + Fn^2 + Hn^2s + Ku = o,$$

$$B\ \frac{d^2s}{dt^2} + H\frac{d^2u}{dt^2} - (A + B - C)\,n\frac{du}{dt} + (C - A)\,n^2s + Gn^2 + Hn^2u + Ks = o$$

davon die Integration keine Schwierigkeit hat.

Man dividire diese Gleichungen durch n^2 und setze um mehrerer Einfachheit willen $d\vartheta$ an die Stelle von $n\,dt$ und denke daran, daß $d\vartheta$ von jetzt an beständig ist; alsdenn hat man, wenn man die Glieder ordnet und

L =

Digitized by Google

$$L = \frac{K}{n^2} = \frac{Km}{n^2} \quad (50)$$

setzt

$$(C - A + L)\, s + B\frac{d^2 s}{d\vartheta^2} + (C - A - B)\frac{du}{d\vartheta}$$

$$+ H\left(u + \frac{d^2 u}{d\vartheta^2}\right) + G = 0,$$

$$(C - B + L)\, u + A\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} - B\frac{ds}{d\vartheta}$$

$$+ H\left(s + \frac{d^2 s}{d\vartheta^2}\right) + F = 0.$$

Um nun diese Gleichungen zu integriren; so fange ich damit an, daß ich alle beständige Glieder zum Verschwinden bringe, indem ich setze

$$s = x + f,$$

$$u = y + h;$$

und hierauf die beständigen Größen f, h dergestalt bestimme, daß die Glieder F und G verschwinden, welches folgende beide Bedingungsgleichungen giebt:

$$(C - A + L)\, f + f + Hh + G = 0,$$

$$(C - B + L)\, h + Hf + F = 0,$$

woraus man zieht

$$f = \frac{FH - G(C - B + L)}{(C - B + L)(C - A + L) - H^2};$$

$$h = \frac{CH - F(C - A + L)}{(C - B + L)(C - A + L) - H^2}$$

Digitized by Google

und man erhält in x, y, ϑ die nämlichen Gleichungen als in s, u, ϑ mit dem einzigen Unterschiede, daß die beständigen Glieder G, F sich nicht mehr darin finden.

Ich setze jetzt $x = \alpha e^{i\vartheta}$,

$y = \beta e^{i\vartheta}$,

wo α, β und i unbestimmte beständige Größen sind, und e die Zahl bedeutet, deren hyperbolischer Logarithme = 1 ist.

Da nun alle Glieder der zu integrirenden Gleichungen x und y in der ersten Dimension enthalten; so folgt daraus, daß sie nach den Substitutionen alle durch $e^{i\vartheta}$ theilbar sind, alsdenn bleiben folgende beide Bedingungsgleichungen übrig

$$(C - A + L + Bi^2)\alpha +$$
$$((C - A - B)\, i + H(1 + i^2))\,\beta = 0$$
$$(C - B + L + Ai^2)\,\beta -$$
$$((C - A - B)\, i + H(1 + i^2))\,\alpha = 0,$$

welche geben

$$\alpha = -\frac{C - A + L + Bi^2}{(C - A - B)\, i + H(1 + i^2)}$$
$$= \frac{(C - A - B)\, i - H(1 + i^2)}{C - B + L + Ai^2}$$

so daß man, wenn man durch's Kreuz multiplicirt, folgende Gleichung in i erhält

$$(C - B + L + Ai^2)(C - A + L + Bi^2) + (C - A - B)^2 i^2 - H^2(1 + i^2)^2 = 0$$

welche,

Digitized by Google

welche, wenn man

$$1 + j^2 = \rho$$

setzt, auf diese Form gebracht wird

$$(A - B - H^2)\,\rho^2 + ((A + B)(L - C) + C^2)\,\rho + L^2 - 2L(A + B - C) = 0.$$

Hat man ρ durch diese Gleichung bestimmt; so erhält man

$$x = \alpha e^{\vartheta \sqrt{(\rho - 1)}}$$

$$y = \alpha \frac{(A + B - C)\sqrt{(\rho - 1)} + H\rho}{A + B - C - L - C\rho} e^{\vartheta \sqrt{(\rho - 1)}}$$

und die beständige Größe α wird unbestimmt bleiben. Da nun die Gleichung in ρ 2 Wurzeln hat, und die Radikal-Größe $\sqrt{(\rho - 1)}$ größer oder kleiner angenommen werden kann; so erhält man auf diese Art 4 verschiedene Werthe von x, y, welche mit einander verbunden, den vorgesetzten Gleichungen genug thun, weil die veränderlichen Größen x, y darin nur eine lineare Form haben. Nimmt man daher 4 verschiedene beständige Größen für α an; so erhält man auf diese Art die vollkommenen Werthe von x und y, indem diese Werthe nur von den beiden Differentialgleichungen der 2ten Ordnung abhängen, und daher nur 4 willkührliche beständige Größen in sich schließen können.

55) Damit die Ausdrückungen von x und y keine Zirkelbogen enthalten, muß $\sqrt{(\rho - 1)}$ imaginair seyn, und ρ ist also auf diese Art eine würkliche Größe die < 1 ist.

Wir wollen durch ρ und σ die beiden Wurzeln der Gleichung in ρ ausdrücken, die als würklich und < 1 angenommen worden sind, und den 4 willkührlichen beständigen Größen diese imaginaire Form geben

$$\frac{\alpha e^{\beta \sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

Digitized by Google

$$-\frac{\alpha e^{-\beta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\frac{\gamma e^{\varepsilon\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$-\frac{\gamma e^{-\varepsilon\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

alsdann erhält man, wenn man diese Substitutionen verrichtet, und von den Exponentialgrößen zu den Sinus und Cosinus übergeht, folgende vollkommene und würkliche Werthe von x und y:

$$x = \alpha \sin(\vartheta\sqrt{(1-\rho)} + \beta) + \gamma \sin(\vartheta\sqrt{(1-\sigma)} + \varepsilon),$$

$$y = \frac{\alpha(A+B-C)\sqrt{(1-\rho)}}{B-C+A(1-\rho)-\alpha}\cos(\vartheta\sqrt{(1-\rho)}+\beta) + \frac{\alpha H\rho}{B-C+A(1-\rho)-L}\sin(\vartheta\sqrt{(1-\rho)}+\beta) + \frac{\gamma(A+B-C)\sqrt{(1-\sigma)}}{B-C+A(1-\varepsilon)-\alpha}\sin(\vartheta\sqrt{(1-\sigma)}+\varepsilon) + \frac{\gamma H\sigma}{B-C-A(1-\sigma)-L}\sin(\vartheta\sqrt{(1-\sigma)}+\varepsilon),$$

wo α, γ, β, ε willkährliche beständige Größen sind, die vom anfängkichen Zustande des Körpers abhängen.

Hat

Digitized by Google

Hat man auf diese Art x und y; so erhält man

$$s = x + \frac{FH + G(B - C - L)}{(A - C - L)(B - C - L) - H^2},$$

$$u = y + \frac{GH + F(A - C - L)}{(A - C - L)(B - C - L) - H^2}.$$

Nimmt man daher für ϑ irgend einen der Zeit proportionalen Winkel an; so erhält man diese Werthe der 9 veränderlichen Größen ξ', η', ζ', ξ'', etc.

$$\xi' = \text{Cos}\,\vartheta,$$
$$\xi'' = -\sin\vartheta,$$
$$\xi''' = -c\,\text{Cos}\,\vartheta + u\sin\vartheta,$$
$$\eta' = \sin\vartheta,$$
$$\eta'' = \text{Cos}\,\vartheta,$$
$$\eta''' = s\sin\vartheta - u\,\text{Cos}\,\vartheta,$$
$$\zeta' = s,$$
$$\zeta'' = u,$$
$$\zeta''' = 1;$$

so daß man die Coordinaten ξ, η, ζ jedes Punkts des Körpers für irgend einen Augenblick kennt (12).

Vergleicht man die vorhergehenden Ausdrückungen von ξ', η', etc. mit denen (30); so zieht man daraus leicht die Werthe der Umdrehungswinkel φ, ψ, ω; und man findet

$$\varphi + \psi = \vartheta,$$
$$\sin\varphi\sin\omega = s,$$
$$\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\omega = u;$$

Digitized by Google

woraus man zieht

$$\text{tang}\,\omega = V(s^2 + u^2),$$

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{s}{u},$$

$$\psi = \vartheta - \varphi.$$

Es ist leicht nach den Definitionen (29) zu sehen, daß ω die als sehr klein angenommene Neigung der Achse des Körpers mit der Vertikallinie ist, daß ferner ψ der Winkel ist, den diese Achse beschreibt, indem sie sich um die Vertikallinie dreht, und daß φ der Winkel ist, den der Körper selbst beschreibt, indem er sich um eben diese Achse dreht, indem diese beiden letztern Winkel von einer beliebigen Größe seyn können.

56) Damit aber diese Auflösung genau sey, müssen die veränderlichen Größen s und u allezeit sehr klein bleiben. Auf diese Art müssen also nicht allein die beständigen Größen α und γ, die vom anfänglichen Zustande des Körpers abhängen, sehr klein seyn, sondern die Werthe der beständigen Größen F und G, die durch die Figur des Körpers gegeben sind, müssen ebenfals so beschaffen seyn, und ausserdem müssen die Wurzeln ρ und σ würklich und positiv seyn, damit der Winkel ϑ allezeit in Sinus oder Cosinus eingeschlossen sey.

Setzt man daher

$$F = o, \qquad G = o,$$

$$Sbc\,Dm = o, \quad Sac\,Dm = o,$$

so erhält man die nöthigen Bedingungen, damit die Momente der Centrifugal-Kräfte um die Achse des Körpers, die zugleich die Achse der Coordinaten c ist, sich aufheben, so daß der Körper sich gleichförmig und frey um diese Achse drehen kann. Man weiß aber, daß bey jedem Körper 3 auf einander senkrechte Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen, statt finden, welche diese Eigenschaft haben, und welche man gemeiniglich nach Hrn. Euler die Hauptachsen (axes principaux) des Körpers nennt. Da wir nun angenommen haben, daß die Achse des Körpers zugleich durch den

Digitized by Google

den Schwerpunkt und Aufhängepunkt geht; so folgt, daß die Größen F und G = o seyn werden, wenn der Körper an einem gewissen in einer seiner Hauptachsen angenommenen Punkte aufgehängt ist.

Damit nun diese Größen ohne nothwendig = o zu seyn, wenigstens sehr klein seyen; muß der Aufhängepunkt des Körpers sehr nahe an einer der Hauptachsen seyn, und dies ist die erste nothwendige Bedingung, damit die Achse des Körpers nur sehr geringe Oscillationen um die Vertikallinie mache, indem der Körper selbst übrigens eine gewisse Umdrehungsbewegung um diese Achse hat.

Die andere nothwendige Bedingung, daß die Oscillationen allezeit sehr klein seyen, hängt von der Gleichung in ρ ab, und besteht darin, daß

$$4((A + B)(L - C) + C^2) > (AB - H^2)(L^2 - 2L(A + B - C)),$$

$$\frac{2(AB - H^2) + (A + B)(L - C) + A^2}{AB - H^2} > o$$

$$\frac{(A - C + L)(B - C - L) - H^2}{AB - H^2} > o,$$

welche zugleich von der Lage des Aufhängepunkts und der Figur des Körpers abhängen.

57) Die Auflösung die wir eben gegeben haben, enthält die Theorie der kleinen Oscillationen der Pendel in aller Allgemeinheit, deren sie fähig ist. Es ist bekannt, daß Huyghens zuerst die Theorie der Oscillationen in einem Zirkel gegeben hat. Der verstorbene Herr Clairaut fügte dazu noch die Theorie der Oscillationen in Kegelschnitten, die statt finden, wenn das von seiner Ruhelinie abgetriebene Pendel einen Stoß bekommt, dessen Richtung nicht durch diese Linie geht. Bekäme aber das Pendel zugleich eine Umdrehungsbewegung um seine Achse; so kann die durch diese Bewegung erzeugte Centrifugalkraft die Oscillationen sehr stöhren, sie

Digitized by Google

mögen nun in Zirkelbogen oder in Kegelschnitten geschehn; und die Bestimmung dieser neuen Oscillationen ist eine Aufgabe, die noch nie vollkommen und für Pendel von jeder Figur aufgelöst war. Aus dieser Ursache habe ich mich hier damit abgegeben.

Siebenter Abschnitt.

Von den Grundlehren der Hydrodynamik.

Die Bestimmung der Bewegung flüssiger Körper ist der Gegenstand der Hydrodynamik; die Hydraulik hingegen, wie sie gewöhnlich ist, schränkt sich blos auf die Kunst das Wasser zu leiten, und es zur Bewegung der Maschienen zu gebrauchen, ein. Man hat diese Kunst seit jeher wegen des Nutzens, den sie gewährt, betrieben, und die Alten waren darin, nach dem, was sie uns darüber hinterlassen haben, zu urtheilen, eben so sehr Meister als wir.

Die Hydrodynamik aber ist eine ganz neue im gegenwärtigen Jahrhundert erst entstandene Wissenschaft. Newton versuchte es zuerst, die Bewegung flüssiger Körper nach den Principien der Mechanik dem Calkul zu unterwerfen; und D'Alembert brachte zuerst die wahren Gesetze ihrer Bewegung auf analytische Gleichungen. Archimedes und Galiläus (denn die Zwischenzeit, die zwischen diesen beiden großen Köpfen verfloß, verschwindet in der Geschichte der Mechanik) hatten sich nur mit dem Gleichgewichte der flüssigen Massen beschäftigt. Torricelli fing an die Bewegung des Wassers zu untersuchen, das aus einer sehr kleinen Oefnung eines Gefäßes läuft. Er fand, daß wenn man dem Ausfall eine vertikale Richtung gäbe, derselbe allezeit beinah die Horizontal-Ebene des Wassers im Gefäße erreiche, und da man vermuthen kann, daß er sie vollkommen erreichen werde, wenn die Resistenz der Luft, und die Reibungen wegfielen; so zog Torricelli daraus den Schluß, daß die Geschwin-

Digitized by Google

schwindigkeit des herausfliesenden Wassers einerley mit derjenigen ist, welche es erlangen würde, wenn es frey von der Höhe der Horizontal-Ebene herabfiele, und daß diese Geschwindigkeit folglich der Quadratwurzel eben dieser Höhe gleich ist.

Da er indessen zu einem strengen Beweise dieses Satzes nicht gelangen konnte; so begnügte er sich damit, ihn als einen Erfahrungssatz am Ende seines Traktats de motu naturaliter accelerato, den er im Jahre 1643 drucken ließ, zu geben. Newton unternahm es im 2ten Buche seiner mathematischen Principien, die 1687 erschienen, ihn zu beweisen; allein man muß gestehen, daß dies gerade die am wenigsten genugthuende Stelle in diesem großen Werke ist.

Betrachtet man eine Wassersäule, die im leeren Raume frey fällt; so ist es leicht, sich davon zu überzeugen, daß sie die Figur einer Conoide annehmen muß, die durch die Umwälzung einer Hyperbel von der 4ten Ordnung um die Vertikalachse gebildet ist, denn die Geschwindigkeit jeder horizontalen Schichte verhält sich auf der einen Seite wie die Quadratwurzel der Höhe, wovon sie herabgefallen ist, und auf der andern muß sie wegen der Stetigkeit des Wassers sich umgekehrt wie die Breite dieser Schichte, und folglich auch umgekehrt wie das Quadrat ihres Radius verhalten. Hieraus folgt, daß die Proportion der Achse oder Abscisse, die die Höhe vorstellt, sich im umgekehrten Verhältnisse der 4ten Potenz der Ordinate der dadurch erzeugten Hyperbel befindet. Stellt man sich daher ein Gefäß vor, von der Figur einer Conoide und das immer mit Wasser angefüllt sey, und man nimmt an, die Bewegung des Wassers gelange zu einem beständigen Zustande; so ist klar, daß jedes Wassertheilchen darin eben so herabfallen wird, als wäre es frey, und daß es folglich beim Herausfallen aus der Oeffnung eine der Höhe des Gefäßes, woraus es gefallen ist, angemessene Geschwindigkeit haben wird.

Newton bildet sich ein, das Wasser, das ein cylindrisches vertikales Gefäß anfüllt, und auf dem Grunde eine Oeffnung hat, woraus es läuft, theile sich seiner Natur nach in 2 Theile, wovon der eine nur in Bewegung ist, und die Figur einer Conoide hat, von der wir eben

Digitized by Google

geredet haben, und dies nennt er Cataracta; der andere aber in Ruhe ist, gleichsam als wenn er gefroren wäre.

Auf diese Art ist klar, daß das Wasser mit einer Geschwindigkeit herauslaufen muß, die derjenigen gleich ist, welche es erhalten haben würde, wenn es von der Höhe des Gefäßes herabgefallen wäre, wie es Torricelli durch die Erfahrung gefunden hatte. Aber Newton maas die Größe des in einer gegebenen Zeit herausgelaufenen Wassers, verglich sie mit der Größe der Oeffnung, und schloß in der ersten Ausgabe seiner Principien daraus, daß die Geschwindigkeit beim Herauslaufen aus dem Gefäße nur der Hälfte der Höhe des Wassers in dem Gefäße entspreche. Dieser Irrthum kam daher, daß er keine Rücksicht auf die Contraktion des Wasserstrahls genommen hatte. In der zweiten Ausgabe die im Jahr 1714 erschien, aber richtete er auch hierauf sogleich seine Aufmerksamkeit, und er erkannte, daß der kleinste Schnitt des Strahls sich zur Oeffnung des Gefäßes verhalte wie 1 : $\sqrt{2}$; so daß, wenn man diesen Schnitt für die wahre Oeffnung annehme, die Geschwindigkeit in eben der Verhältniß 1 : $\sqrt{2}$ zunehmen, und folglich der ganzen Höhe des Wassers entsprechen muß. Auf diese Art kam seine Theorie fast mit der Erfahrung überein, aber sie wurde darum nicht genauer; denn die Bildung der Catarakte oder des eingebildeten Gefäßes, worin man sich die Bewegung des Wassers vorstellt, während dem das Wasser an den Seiten in Ruhe bleibt, ist offenbar den bekannten Gesetzen des Gleichgewichts flüssiger Körper entgegen, indem das in diese Catarakte mit seiner ganzen Schwerkraft fallende Wasser, wenn es keinen Seitendruck ausübt, auch dem Drucke des stillstehenden es umgebenden Fluidums nicht zu widerstehn im Stande ist.

Vier und zwanzig Jahre vorher hatte Varignon der Akademie der Wissenschaften zu Paris eine natürlichere und wahrscheinlichere Erklärung dieser Erscheinung vorgelegt.

Denn da er sah, daß, wenn das Wasser aus einem cylindrischen Gefäße durch eine im Boden gemachte Oeffnung fließt, es eine sehr kleine und für alle Theilchen merklich gleichförmige Bewegung hat; so zog er daraus den Schluß, daß hier keine Beschleunigung statt fände, und daß der Theil der flüssigen Masse, der jeden Augenblick herausläuft, seine

ganze

Digitized by Google

ganze Bewegung von dem durch das Gewicht der Säule des Fluidums, wovon er die Basis ist, erzeugten Druck erhält. Dieses Gewicht, das sich wie die Breite der Oeffnung multiplicirt durch die Höhe des Wassers in dem Gefäße verhält, muß der Größe der Bewegung, die jedes Theilchen hat, das jeden Augenblick durch die nämliche Oeffnung geht, proportional seyn. Diese Größe der Bewegung aber ist bekanntlich der Geschwindigkeit und der Masse proportional, und die Masse verhält sich hier wie das Produkt der Breite der Oeffnung durch den kleinen Raum, den das Theilchen in einem gegebenen Augenblicke durchläuft. Die Größe der Bewegung verhält sich folglich wie die Breite der Oeffnung multiplicirt durch das Quadrat der Geschwindigkeit. Die Höhe des Wassers in dem Gefäße ist folglich dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, womit es herausfällt, und das ist der Torricellianische Lehrsatz.

Aber auch dieses Raisonnement läßt sich nicht ohne einige Bedenklichkeiten anstellen. Denn man nimmt hier stillschweigend an, die kleine Masse, die jeden Augenblick aus dem Gefäße herausläuft, erhalte sogleich ihre ganze Geschwindigkeit durch den Druck der Säule, die über der Oeffnung sich befindet. Nun weiß man, daß ein Druck keine endliche Geschwindigkeit hervorbringen kann. Setzt man aber, wie ganz natürlich, das Gewicht der Säule würke auf das Theilchen während der ganzen Zeit, daß es aus dem Gefäße herausläuft; so ist klar, daß dieses Theilchen eine beschleunigte Bewegung erhält, deren Größe nach einer gewissen Zeit dem Druck multiplicirt durch die Zeit proportional ist. Das Produkt des Gewichts der Säule durch die Zeit des Herauslaufens des Theilchens ist daher dem Produkte der Masse dieses Theilchens durch die Geschwindigkeit, die sie erlangt hat, gleich; und da die Masse das Produkt der Breite der Oeffnung durch den kleinen Raum, den das Theilchen bey seinem Herauslaufen beschreibt, ist, welcher Raum sich nach der Natur der gleichförmig beschleunigten Bewegungen sich wie das Produkt der Geschwindigkeit durch die Zeit verhält; so folgt, daß die Höhe der Säule sich von neuem wie das Quadrat der erlangten Geschwindigkeit verhält. Dieser Schluß ist daher völlig mathematisch streng, wenn man zugesteht, daß jedes Theilchen bey seinem Herauslaufen aus dem Gefäße durch das ganze Gewicht der ganzen Säule des Fluidums, die dieses Theilchen zur

Basis,

Digitized by Google

Basis hat, gedrückt wird, welches würklich statt finden würde, wenn die im Gefäße enthaltene flüssige Masse stillstehend ist, denn alsdann würde ihr Druck auf den Theil des Bodens, wo die Oeffnung ist, dem Gewichte der Säule gleich seyn, wovon sie die Basis ist; aber dieser Druck muß verschieden seyn, wenn die flüssige Masse in Bewegung ist. Indessen ist klar, daß jemehr das Fluidum sich dem Zustande der Ruhe nähert; desto mehr auch der Druck auf den Boden sich dem ganzen Gewichte der vertikalen Säule nähern wird; ausserdem zeigt die Erfahrung, daß die Bewegung des Fluidums im Gefäße um so geringer ist als die Oeffnung kleiner ist. Die vorhergehende Theorie nähert sich daher um so mehr der Wahrheit, je größer die Dimensionen des Gefäßes in Ansehung der Oeffnung sind, durch die der flüssige Körper läuft, welches auch die Erfahrung bestätigt.

Aus einer entgegengesetzten Ursache wird die nämliche Theorie auch unzulänglich zur Bestimmung der Bewegung der flüssigen Körper, die in Röhren fließen, deren Breite sehr klein ist und sich wenig verändert. Man muß alsdann auf einmal alle Bewegungen der Theilchen des flüssigen Körpers betrachten und es untersuchen, welche Veränderung sie durch die Figur des Canals erleiden. Die Erfahrung aber lehrt, daß, wenn die Röhre eine von der Vertikallinie wenig verschiedene Richtung hat, die verschiedenen horizontalen Schichten des Fluidums beinah ihren Parellismus beibehalten, so daß eine Schichte immer den Platz der vorhergehenden einnimmt; woraus wegen der Unpreßbarkeit des Fluidums folgt, daß die Geschwindigkeit jeder horizontalen Schichte nach der vertikalen Richtung geschätzt, sich umgekehrt wie die Breite dieser Schichte verhalte, welche durch die Figur des Gefäßes gegeben ist.

Man braucht daher nur die Bewegung einer einzigen Schichte zu bestimmen, und die Aufgabe ist in einiger Rücksicht derjenigen von der Bewegung eines zusammengesetzten Pendels proportional. Da nun nach der Theorie des Jakobs Bernoulli die jeden Augenblick durch die verschiedenen Gewichte, woraus das Pendel besteht, erlangten und verlornen Bewegungen beim Hebel einander das Gleichgewicht halten; so muß auch das Gleichgewicht in der Röhre zwischen den verschiedenen Schichten des

Flui-

Digitized by Google

Fluidums, wovon jede von der jeden Augenblick erlangten oder verloruen Geschwindigkeit getrieben wird, statt finden; und man hätte hieraus durch die Anwendung der schon bekannten Principien des Gleichgewichts der flüssigen Körper sogleich die Bewegung eines flüssigen Körpers in einer Röhre bestimmen können, sowie man die eines zusammengesetzten Pendels bestimmt hatte. Allein der menschliche Geist gelangt nie durch die einfachsten und geradesten Wege zu Wahrheiten, von welcher Art sie auch seyn mögen; hiervon giebt uns die gegenwärtig von uns behandelte Materie ein auffallendes Beyspiel.

Schon im ersten Abschnitte haben wir die verschiedenen Schritte erzählt, die man gethan hat, um zur Auflösung der Aufgabe vom Mittelpunkte der Schwingung zu gelangen, und wir haben dagegen gesehn, daß die wahre Theorie dieser Aufgabe nicht durch Jakob Bernoulli sey entdeckt worden, sondern daß erst lange darnach Huyghens sie durch den indirekten Grundsatz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte auflöste.

Eben so verhält es sich mit der Aufgabe von der Bewegung der flüssigen Körper in den Gefäßen, und es ist auffallend, daß man sich nicht des Lichts bey dieser bediente, das man durch jene erhalten hatte.

Das nämliche Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte gab auch noch die erste Auflösung dieser letzten Aufgabe, und diente der Hydrodynamik des Hrn. Daniel Bernoulli zur Basis, welches Werk im Jahr 1738 erschien, und darin übrigens eine eben so sehr wegen des Ganges, den er darin geht, Schmuckvolle als wegen seiner Resultate einfache Analyse herrscht. Aber die Unzulänglichkeit dieses Princips, das noch auf keine allgemeine Art war erwiesen worden, mußte auch alle daraus fliessende Sätze unzulänglich machen, und erregte den Wunsch zu einer gewissern und auf die Fundamentalgesetze der Mechanik sich gründenden Theorie. Maklaurin und Johann Bernoulli unternahmen die Erfüllung dieses Gegenstandes, der eine in seinem Traktat über die Fluxionen, der andere in seiner neuen Hydraulik, die sich am Ende seiner Werke befindet. Ihre Methoden führen, ob sie gleich sehr verschieden sind, dennoch auf die nämlichen Resultate als das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte; allein man muß gestehn, daß die Methode Maclaurins nicht

Digitized by Google

streng genug ist, und im voraus nach den Resultaten eingerichtet zu seyn scheint, die er erhalten wollte. Was aber die Methode Jakob Bernoullis betrifft; so muß man sagen, ohne völlig die Schwierigkeiten anzunehmen, die Hr. D'Alembert ihr entgegengesetzt hat, daß sie noch in Absicht der Klarheit und Genauigkeit viel hinter sich läßt. Man hat im ersten Abschnitte gesehn, wie Hr. D'Alembert, da er die Theorie des Jakob Bernoulli von den Pendeln allgemeiner machte, auf ein einfaches und allgemeines Princip der Dynamik gekommen war, welches die Gesetze der Bewegung der Körper auf die ihres Gleichgewichts bringt. Die Anwendung dieses Princips auf die Bewegung flüssiger Körper zeigte sich von selbst, und der Verfasser gab davon zuerst am Ende seiner Dynamik, die im Jahr 1743 erschien, einen Versuch; entwickelte sie aber durch ein angemessenes Detail in seinem Traktat von den flüssigen Körpern, der im folgenden Jahre erschien, und der eben so direkte als schöne Auflösungen der vornehmsten Fragen, die man in Ansehung der in Gefäßen sich bewegenden flüssigen Körper aufwerfen kann, enthält.

Allein diese Auflösungen, wie die des Daniel Bernoulli, stützten sich auf 2 Voraussetzungen, die nicht allgemein wahr sind. 1) Daß die verschiedenen Schichten des flüssigen Körpers genau ihren Parallelismus beibehalten, so daß eine Schichte allezeit die Stelle der vorhergehenden wieder einnimmt. 2) Daß die Geschwindigkeit jeder Schichte in der Direktion keine Veränderung erleidet d. h. daß alle Punkte einer und derselben Schichte, als von gleicher Geschwindigkeit und einander parallel angenommen sind.

Läuft der flüssige Körper in sehr engen Gefäßen oder Röhren; so sind diese Voraussetzungen sehr gut, und scheinen durch die Erfahrung bestätigt zu werden.

Ausser diesem Fall aber entfernen sie sich von der Wahrheit, und es giebt alsdenn kein anderes Mittel, die Bewegung der flüssigen Körper zu bestimmen, als die zu untersuchen, die jedes Theilchen haben muß.

Hr.

Digitized by Google

Hr. Clairaut hatte in seiner Theorie der Figur der Erde, die im Jahr 1743 herauskam, die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts der flüssigen Körper bestimmt, deren Theile insgesammt durch gewisse Kräfte getrieben werden. Man hat daher nur von diesen Gesetzen zu denen der Bewegung vermittelst des Grundsatzes überzugehen, auf den Hr. D'Alembert zu gleicher Zeit die ganze Dynamik zurückgeführt hatte. Eben dieser that auch einige Jahre darnach diesen wichtigen Schritt bey Gelegenheit des Preißes, den die Akademie zu Berlin im Jahr 1756 über die Theorie des Widerstands der flüssigen Körper gegeben hatte, und gab zuerst in seinem Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides im Jahr 1752. mathematisch strenge und allgemeine Gleichungen über die Bewegung sowohl unpreßbarer als preßbarer und elastischer flüssiger Körper, welche Gleichungen zu denen gehören, die man partielle Differentialgleichungen nennt, weil sie zwischen den verschiedenen Theilen der Differentialien in Beziehung auf verschiedene veränderliche Größen statt finden. Durch diese Entdeckung wurde die ganze Mechanik flüssiger Körper auf einen einzigen Punkt der Analysis gebracht, und wären die sie enthaltenden Gleichungen integrabel; so könnte man in einem jeden Falle vollkommen die Umstände der Bewegung und Würkung eines durch gewisse Kräfte bewegten flüssigen Körpers bestimmen; aber unglücklicherweise sind sie dergestalt rebellisch, daß man nur in sehr eingeschränkten Fällen bisher zu seinem Zweck hat gelangen können.

In diesen Gleichungen und in ihrer Integration besteht also die ganze Theorie der Hydrodynamik. Anfangs bediente sich Hr. D'Alembert, um sie zu finden, einer etwas verwickelten Methode; darauf aber gab er eine einfachere. Allein diese Methode gründet sich auf die den flüssigen Körpern besonders zukommenden Gesetze des Gleichgewichts, und macht daher aus der Hydrodynamik eine von der Dynamik der festen Körper getrennte Wissenschaft.

Wir haben aber im ersten Theile dieses Werks alle Gesetze des Gleichgewichts der Körper, sie mögen nun fest oder flüssig seyn, auf eine Formel gebracht, die Anwendung, die wir von dieser Formel auf die Gesetze der Bewegung zu machen haben, führt uns natürlich darauf, die

Digitized by Google

Dynamik und Hydrodynamik ebenfals nur als Branchen eines und deſſelben allgemeinen Grundſatzes und als Reſultate einer allgemeinen Formel anzuſehn.

Dies iſt der Gegenſtand, der noch auszufüllen iſt, um dies Werk über die Mechanik zu vollenden, wenn es den angenommenen Titel mit Recht führen ſoll.

Achter Abſchnitt.

Von der Bewegung unpreßbarer flüſſigen Maſſen.

1) Man könnte die Geſetze der Bewegung dieſer flüſſigen Maſſen ſogleich von denen ihres Gleichgewichts, ableiten, die wir im 1ten Theile im 7ten Abſchnitte gefunden haben. Denn nach dem allgemeinen im 2ten Abſchnitte vorgetragenen Princip hat man nur zu den vorhandenen beſchleunigenden Kräften die neuen beſchleunigenden Kräfte

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

hinzuzuaddiren, deren Richtungen die Coordinaten x, y, z ſind.

Da man nun in den Formeln (7 Abſchn. 13.) alle beſchleunigende Kräfte des Fluidums ſchon auf 3, X, Y, Z nach der Direktion der Coordinaten x, y, z gebracht ſich vorſtellt; ſo hat man nur, wenn man dieſe Formeln auf die Bewegung eben dieſer flüſſigen Körper anwenden will, darin ſtatt X, Y, Z

$$X + \frac{d^2x}{dt^2},$$

Digitized by Google

$$Y + \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Z + \frac{d^2z}{dt^2}$$

zu substituiren. Aber ich halte es dem Gegenstande des gegenwärtigen Werks für angemessener, die im 4ten Abschnitt für die Bewegung irgend eines Systems von Körpern gegebene allgemeine Gleichungen direkte auf die flüssigen Körper anzuwenden.

§. 1.

Allgemeine Gleichungen für die Bewegung unpreßbarer flüssiger Massen.

2) Eine unpreßbare flüssige Masse kann man sich als aus einer unendlichen Menge von Theilchen zusammengesetzt vorstellen, die sich frey untereinander bewegen, ohne am Volumen eine Veränderung zu erleiden. Die Frage kommt also auf den Fall (Abschn. 7. Art. 12.) hinaus.

Es sey daher Dm die Masse eines Theilchens oder irgend eines Elements des flüssigen Körpers; X, Y, Z die beschleunigenden Kräfte, die auf dies Element würken, und die man mehrerer Einfachheit wegen auf die Direktionen der rechtwinklichten Coordinaten gebracht hat; $L = o$ die von der Unpreßbarkeit oder Unveränderlichkeit des Volumens von Dm herkommende Bedingung; λ eine unbestimmte Größe und S die Charakteristik der Integration in Beziehung auf die Charakteristik D und in Beziehung auf die ganze Masse des flüssigen Körpers; alsdenn hat man für die Bewegung des flüssigen Körpers folgende allgemeine Gleichung: (4. Abschn. 15. Art.)

$$S\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)\delta y + \right.$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right) \delta z\Big) Dm +$$

$$S\lambda \delta L = 0.$$

Man muß jetzt in dieser Gleichung die Werthe von Dm und δL substituiren, und nachdem man die Differentialien der Variationen, wenn ihrer vorhanden sind, zum Verschwinden gebracht hat, die Coefficienten der unbestimmten Variationen δx, δy, $\delta z = 0$ setzen.

Es zeige ferner die Charakteristik D die Differentialien in Beziehung auf die augenblickliche Lage der neben einander befindlichen Theilchen an, während dem daß die Charakteristik d sich allein auf die Veränderung der Lage eben dieser Theilchen im Raume bezieht; alsdenn ist klar, daß man das Volumen des Theilchens Dm durch das Parallelepipedum

$$Dx\,Dy\,Dz$$

ausdrücken kann. Nennt man daher Δ die Dichtigkeit dieses Theilchens; so erhält man

$$Dm = \Delta Dx\,Dy\,Dz.$$

Ausserdem sieht man leicht, daß die Bedingung der Unpreßbarkeit in der Gleichung

$$Dx\,Dy\,Dz = Const.$$

enthalten sey, so daß man hat:

$$L = Dx\,Dy\,Dz - Const.$$

und folglich

$$\delta L = \delta.(Dx\,Dy\,Dz).$$

Um nun diese Differentialgröße zu bestimmen, muß man dieselben Betrachtungen als (1 Th. 7 Abschn. 14 Art.) wieder anstellen. Verwandelt man also nur d in D in den Formeln an diesem Orte; so erhält man

δ(D

Digitized by Google

$$\delta(Dx\,Dy\,Dz) =$$

$$Dx\,Dy\,Dz\left(\frac{D\delta x}{Dx} + \frac{D\delta y}{Dy} + \frac{D\delta z}{Dz}\right).$$

Multiplicirt man diese Größe durch λ und integrirt in Beziehung auf die ganze Masse des Fluidums; so erhält man den Werth von $S\lambda\,\delta L$, worin man die doppelten Zeichen $D\delta$ auf gleiche Art wegbringen muß, als wir schon (7 Abschn. Art. 13.) gethan haben. Auf diese Art erhält man:

$$\begin{aligned} S\lambda\,\delta L = {} & S(\lambda''\,\delta x'' - \lambda'\,\delta x')\,Dy\,Dz \\ & + S(\lambda''\,\delta y'' - \lambda'\,\delta y')\,Dx\,Dz \\ & + S(\lambda''\,\delta z'' - \lambda'\,\delta z')\,Dx\,Dy \\ & - S\left(\frac{D\lambda}{Dx}\,\delta x + \frac{D\lambda}{Dy}\,\delta y + \frac{D\lambda}{Dz}\,\delta z\right) Dx\,Dy\,Dz. \end{aligned}$$

Verrichtet man daher diese Substitutionen im ersten Gliede der allgemeinen Gleichung; so wird diese zuerst folgende ganze Integralformel enthalten

$$\begin{aligned} S\Bigg(& \left(\Delta\frac{d^2x}{dt^2} + \Delta X - \frac{D\lambda}{Dx}\right)\delta x + \\ & \left(\Delta\frac{d^2y}{dt^2} + \Delta Y - \frac{D\lambda}{Dy}\right)\delta y + \\ & \left(\Delta\frac{d^2z}{dt^2} + \Delta Z - \frac{D\lambda}{Dz}\right)\delta z\Bigg)\,Dx\,Dy\,Dz; \end{aligned}$$

worin man die Coefficienten der Variationen δx, δy, δz, jeden $= 0$ setzen muß, welches folgende 3 unbestimmte Gleichungen für alle Punkte der flüssigen Masse geben wird:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) - \frac{D\lambda}{Dx} &= 0 \\ \Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) - \frac{D\lambda}{Dy} &= 0 \\ \Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right) - \frac{D\lambda}{Dz} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A)$$

Nun hat man die partiellen Integralien

$$S\,(\lambda''\,\delta x'' - \lambda'\,\delta x')\,Dy\,Dz +$$
$$S\,(\lambda''\,\delta y'' - \lambda'\,\delta y')\,Dx\,Dz +$$
$$S\,(\lambda''\,\delta z'' - \lambda'\,\delta z')\,Dx\,Dy$$

wegzuschaffen, welche sich nur auf die äussere Oberfläche des flüssigen Körpers beziehn, und man schließt daraus, wie (7 Abschn. 16.), daß der Werth von λ für alle Punkte der Oberfläche, wo der flüssige Körper frey ist, $= 0$ seyn müsse, und man erweißt ferner, wie (7 Abschn. 20, 21.), daß in Ansehung der Oerter, wo der flüssige Körper durch feste Wände eingeschlossen ist, die Glieder der vorhergehenden Integralien sich gegenseitig aufheben werden, so daß daraus gar keine Gleichung erwächst, und allgemein erweißt man durch ein ähnliches Raisonnement als (24, 25), daß die Größe λ, die sich auf die Oberfläche des flüssigen Körpers bezieht, hier den Druck ausdrückt, den der flüssige Körper darauf ausübt, und der, wenn er nicht $= 0$ ist, durch die Resistenz oder Würkung der Wände im Gleichgewicht gehalten werden muß.

3) Die eben gefundenen Gleichungen enthalten folglich die allgemeinen Gesetze der Bewegung unpreßbarer flüssiger Massen, man hat aber noch damit die Gleichung selbst zu verbinden, die von der Bedingung der Unpreßbarkeit des Volumens $Dx\,Dy\,Dz$ während dem daß der flüssige Körper sich bewegt, herkommt; diese Gleichung ist daher durch

$$d.\,(Dx\,Dy\,Dz) = 0.$$

aus-

Digitized by Google

ausgedrückt, so daß, wenn man im oben gefundenen Ausdruck

$$\delta . (Dx\, Dy\, Dz)$$

d statt δ setzt, und ihn = o setzt, man erhält

$$\frac{Ddx}{Dx} + \frac{Ddy}{Dy} + \frac{Ddz}{Dz} = o \ldots . (B).$$

Diese Gleichung nun, mit den 3 Gleichungen (A) des vorhergehenden Artikels verbunden, dient dazu, die 4 unbekannten Größen x, y, z und λ zu bestimmen.

4) Um aber eine klare Idee von der Natur dieser Gleichungen zu haben, hat man zu bedenken, daß die veränderlichen Größen x, y, z, die die Lage eines Theilchens in einem gewissen Augenblicke bestimmen, zugleich sich auf alle Theilchen, die die flüssige Masse ausmachen, beziehen; sie müssen daher Funktionen der Zeit t und Werthe seyn, die eben diese veränderlichen Größen im Anfang der Bewegung, oder in einem gegebenen Augenblicke gehabt haben. Nennt man daher a, b, c die Werthe von x, y, z, wenn t = o; so müssen die vollkommenen Werthe von x, y, z Funktionen von a, b, c, t seyn. Auf diese Art werden die Differentialien, die das Zeichen D vor sich haben, sich allein auf die Veränderlichkeit von a, b, c und diejenigen, die das andere Zeichen d vor sich haben, sich allein auf die Veränderlichkeit von t beziehn. Da aber in den gefundenen Gleichungen Differentialien vorkommen, die sich auf die veränderlichen Größen x, y, z selbst beziehn; so muß man um der Einförmigkeit willen, diese in Differentialien in Beziehung auf a, b, c verwandlen, welches allezeit möglich ist. Denn man hat nur anzunehmen, man habe in den Funktionen vor der Differentiation die Werthe von x, y, z selbst in a, b, c substituirt.

5) Sieht man daher die veränderlichen Größen x, y, z als Funktionen von a, b, c, t an, und drückt die Differentialien wie bey den partiellen Differentialien gewöhnlich, aus; so erhält man:

Digitized by Google

$$Dx = \frac{dx}{da}da + \frac{dx}{db}db + \frac{dx}{dc}dc,$$

$$Dy = \frac{dy}{da}da + \frac{dy}{db}db + \frac{dy}{dc}dc,$$

$$Dz = \frac{dz}{da}da + \frac{dz}{db}db + \frac{dz}{dc}dc;$$

und betrachtet man die Funktion λ als eine Funktion von x, y, z und von a, b, c; so hat man

$$D\lambda = \frac{D\lambda}{Dx}Dx + \frac{D\lambda}{Dy}Dy + \frac{D\lambda}{Dz}Dz$$

$$= \frac{d\lambda}{da}da + \frac{d\lambda}{db}db + \frac{d\lambda}{dc}dc;$$

diese beiden Ausdrückungen von $D\lambda$ substituire man in der erstern der Werthe von Dx, Dy, Dz in da, db, dc; alsdenn müssen, da sie identisch seyn müssen, die Coefficienten von da, db, dc auf beiden Seiten gleich seyn, welches 3 Gleichungen giebt, die zur Bestimmung der Werthe von

$$\frac{D\lambda}{Dx}, \quad \frac{D\lambda}{Dy}, \quad \frac{D\lambda}{Dz}, \quad \text{in} \quad \frac{d\lambda}{da}, \quad \frac{d\lambda}{db}, \quad \frac{d\lambda}{dc}$$

dienen werden; eben dies wird der Fall seyn, wenn man im 2ten Ausdrucke von $D\lambda$ die Werthe von da, db, dc in Dx, Dy, Dz substituirt, die man aus den Ausdrücken dieser letztern Größen gezogen hat. Alsdenn giebt die Vergleichung der Glieder, worin Dx, Dy, Dz vorkommt, sogleich die Werthe von $\frac{D\lambda}{Dx}$ etc. Nach den gewöhnlichen Regeln der Elimination aber hat man

$$da = \frac{\alpha Dx + \alpha' Dy + \alpha'' Dz}{\Sigma},$$

db

$$db = \frac{\beta Dx + \beta' Dy + \beta'' Dz}{\vartheta},$$

$$dc = \frac{\gamma Dx + \gamma' Dy + \gamma'' Dz}{\vartheta},$$

wenn man ſetzt

$$\alpha = \frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{dc} - \frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{db},$$

$$\alpha' = \frac{dx}{dc}\cdot\frac{dz}{db} - \frac{dx}{db}\cdot\frac{dz}{dc},$$

$$\alpha'' = \frac{dx}{db}\cdot\frac{dy}{dc} - \frac{dx}{dc}\cdot\frac{dy}{db},$$

$$\beta = \frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{da} - \frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{dc},$$

$$\beta' = \frac{dx}{da}\cdot\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{dc}\cdot\frac{dz}{da},$$

$$\beta'' = \frac{dx}{dc}\cdot\frac{dy}{da} - \frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{dc},$$

$$\gamma = \frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{db} - \frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{da},$$

$$\gamma' = \frac{dx}{db}\cdot\frac{dz}{da} - \frac{dx}{da}\cdot\frac{dz}{db},$$

$$\gamma'' = \frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\cdot\frac{dy}{da},$$

Digitized by Google

$$\vartheta = \frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{dc} -$$
$$\frac{dx}{db}\cdot\frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{dc} +$$
$$\frac{dx}{db}\cdot\frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{da} -$$
$$\frac{dx}{dc}\cdot\frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{da} +$$
$$\frac{dx}{dc}\cdot\frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{db} -$$
$$\frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{db}.$$

Verrichtet man daher diese Substitutionen in dem Ausdruck

$$\frac{d\lambda}{da}da + \frac{d\lambda}{db}db + \frac{d\lambda}{dc}dc$$

und vergleicht ihn mit dem identischen Ausdruck

$$\frac{D\lambda}{Dx}Dx + \frac{D\lambda}{Dy}Dy + \frac{D\lambda}{Dz}Dz$$

so erhält man

$$\frac{D\lambda}{Dx} = \frac{\alpha}{\vartheta}\cdot\frac{d\lambda}{da} + \frac{\beta}{\vartheta}\cdot\frac{d\lambda}{db} + \frac{\gamma}{\vartheta}\cdot\frac{d\lambda}{dc},$$

$$\frac{D\lambda}{Dy} = \frac{\alpha'}{\vartheta}\cdot\frac{d\lambda}{da} + \frac{\beta'}{\vartheta}\cdot\frac{d\lambda}{db} + \frac{\gamma'}{\vartheta}\cdot\frac{d\lambda}{dc},$$

$D\lambda$

Digitized by Google

$$\frac{D\lambda}{Dz} = \frac{\alpha''}{\vartheta} \cdot \frac{d\lambda}{da} + \frac{\beta''}{\vartheta} \cdot \frac{d\lambda}{db} + \frac{\gamma''}{\vartheta} \cdot \frac{d\lambda}{dc}.$$

Substituirt man nun diese Werthe in den 3 Gleichungen (A) (2); so erhalten sie, nachdem man sie mit ϑ multiplicirt hat, folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) - \alpha\frac{d\lambda}{da} - \beta\frac{d\lambda}{db} - \gamma\frac{d\lambda}{dc} &= 0 \\ \vartheta\Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) - \alpha'\frac{d\lambda}{da} - \beta'\frac{d\lambda}{db} - \gamma'\frac{d\lambda}{dc} &= 0 \\ \vartheta\Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right) - \alpha''\frac{d\lambda}{da} - \beta''\frac{d\lambda}{db} - \gamma''\frac{d\lambda}{dc} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (C)$$

wo nur partielle Differentialien in Beziehung auf a, b, c, t vorkommen.

In diesen Gleichungen ist die Größe Δ, welche Dichtigkeit andeutet, eine gegebene Funktion von a, b, c ohne t, indem sie für jedes Theilchen unveränderlich bleiben muß; und ist das Fluidum homogen; so ist Δ eine beständige unabhängige Größe von a, b, c, t. Die Größen X, Y, Z aber, die die beschleunigenden Kräfte vorstellen, werden sehr oft in Funktionen von x, y, z, t gegeben seyn.

6) Uebrigens kann man die vorhergehenden Gleichungen auf eine einfachere Form bringen, wenn man sie zu einander addirt, nach dem man sie respektiv, und nach und nach durch

$$\frac{dx}{da}, \quad \frac{dy}{da}, \quad \frac{dz}{da},$$

$$\frac{dx}{db}, \quad \frac{dy}{db}, \quad \frac{dz}{db},$$

Digitized by Google

$$\frac{dx}{dc}, \quad \frac{dy}{dc}, \quad \frac{dz}{dc},$$

multiplicirt hat; denn nach den oben gegebenen Ausdrücken von ϑ, α, β, γ, α', β', etc. sieht man leicht; daß

$$\vartheta = \alpha \frac{dx}{da} + \alpha' \frac{dy}{da} + \alpha'' \frac{dz}{da},$$

$$= \beta \frac{dx}{db} + \beta' \frac{dy}{db} + \beta'' \frac{dz}{db},$$

$$= \gamma \frac{dx}{dc} + \gamma' \frac{dy}{dc} + \gamma'' \frac{dz}{dc},$$

und daß

$$\beta \frac{dx}{da} + \beta' \frac{dy}{da} + \beta'' \frac{dz}{da} = 0,$$

$$\gamma \frac{dx}{da} + \gamma' \frac{dy}{da} + \gamma'' \frac{dz}{da} = 0,$$

$$\alpha \frac{dx}{db} + \alpha' \frac{dy}{db} + \alpha'' \frac{dz}{db} = 0,$$

u. s. f.

Durch diese Reduktionen und durch dieses Verfahren erhält man dann

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\frac{dx}{da}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\frac{dy}{da}\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\frac{dz}{da}\right)-\frac{d\lambda}{da}=0\\
&\Delta\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\frac{dx}{db}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\frac{dy}{db}\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\frac{dz}{db}\right)-\frac{d\lambda}{db}=0\\
&\Delta\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\frac{dx}{dc}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\frac{dy}{dc}\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\frac{dz}{dc}\right)-\frac{d\lambda}{dc}=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(D).$$

7) Auf eine ähnliche Art verwandelt man die Gleichung (B) (3) und da nach dem, was ich (4) angemerkt habe, die Differentialien dx, dy, dz sich nur auf die veränderliche Größe t beziehn; so kann man sie sogleich auf die partiellen Differentialien

$$\frac{dx}{dt}dt,\quad \frac{dy}{dt}dt,\quad \frac{dz}{dt}dt$$

bringen, so daß die gesuchte Gleichung mit dt dividirt von folgender Form ist:

$$\frac{D.\frac{dx}{dt}}{Dx}+\frac{D.\frac{dy}{dt}}{Dy}+\frac{D.\frac{dz}{dt}}{Dz}=0.$$

Aus den oben gefundenen Formeln für die Werthe von $\frac{D\lambda}{Dx}$, $\frac{D\lambda}{Dy}$, etc.

aber

Digitized by Google

aber hat man auf eben die Art, wenn man $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, etc. statt λ substituirt.

$$\frac{D.\frac{dx}{dt}}{Dx} = \frac{\alpha}{\vartheta}\cdot\frac{d.\frac{dx}{dt}}{da} + \frac{\beta}{\vartheta}\cdot\frac{d.\frac{dx}{dt}}{db} + \frac{\gamma}{\vartheta}\cdot\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dc}$$

und da im 2ten Gliede dieser Gleichung die Größe x als eine Funktion von a, b, c, t angesehn wird; so erhält man

$$\frac{d.\frac{dx}{dt}}{da} = \frac{d^2x}{da\,dt},$$

und eben so ist es auch mit den andern partiellen Differentialien von x, so daß man auf eine einfache Art hat

$$\frac{D.\frac{dx}{dt}}{Dx} = \frac{\alpha}{\vartheta}\cdot\frac{d^2x}{da\,dt} + \frac{\beta}{\vartheta}\cdot\frac{d^2x}{db\,dt} + \frac{\gamma}{\vartheta}\cdot\frac{d^2x}{dc\,dt}.$$

Aehnliche Ausdrücke findet man für die Werthe von

$$\frac{d.\frac{dy}{dt}}{dy} \text{ und } \frac{d.\frac{dz}{dt}}{dz}$$

und

und man hat da nur in der vorhergehenden Formel x in y und z zu verwandlen.

Verrichtet man daher diese Substitutionen in der obigen Gleichung; so wird sie, wenn man den gemeinschaftlichen Nenner ϑ wegschaft

$$\alpha \frac{d^2x}{da\,dt} + \beta \frac{d^2x}{db\,dt} + \gamma \frac{d^2x}{dc\,dt} +$$

$$\alpha' \frac{d^2y}{da\,dt} + \beta' \frac{d^2y}{db\,dt} + \gamma' \frac{d^2y}{dc\,dt} +$$

$$\alpha'' \frac{d^2z}{da\,dt} + \beta'' \frac{d^2z}{db\,dt} + \gamma'' \frac{d^2z}{dc\,dt} = 0.$$

Das erste Glied dieser Gleichung ist nichts anders als der Werth von $\frac{d\vartheta}{dt}$, wovon man sich leicht durch die bloße Differentiation des Werths von ϑ (5) überzeugen kann.

Die Gleichung wird also auf diese Art

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0,$$

davon das Integrale ist = funct. (a, b, c). Wir wollen in dieser Gleichung $t = 0$ setzen, und es sey K alsdenn der Werth der Größe ϑ; so hat man K = funct. (a, b, c) und folglich wird die Gleichung seyn $\vartheta = K$.

Wir haben aber angenommen, daß, wenn $t = 0$, man hat $x = a$, $y = b$, $z = c$; alsdann hat man auch

$$\frac{dx}{da} = 1, \quad \frac{dx}{db} = 0, \quad \frac{dx}{dc} = 0,$$

Digitized by Google

$$\frac{dy}{da} = 0, \quad \frac{dy}{db} = 1, \quad \frac{dy}{dc} = 0,$$

$$\frac{dz}{da} = 0, \quad \frac{dz}{db} = 0, \quad \frac{dz}{dc} = 1$$

und substituirt man diese Werthe in den Ausdruck von ϑ (5); so hat man $\vartheta = 1$, folglich $K = 1$.

Setzt man daher für ϑ dessen Werth; so wird die gesuchte Gleichung von folgender Form seyn

$$\frac{dx}{da} \cdot \frac{dy}{db} \cdot \frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db} \cdot \frac{dy}{da} \cdot \frac{dz}{dc} +$$

$$\frac{dx}{db} \cdot \frac{dy}{dc} \cdot \frac{dz}{da} - \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dy}{db} \cdot \frac{dz}{da} +$$

$$\frac{dx}{dc} \cdot \frac{dy}{da} \cdot \frac{dz}{db} - \frac{dx}{da} \cdot \frac{dy}{dc} \cdot \frac{dz}{db} = 1 \ldots (E).$$

Diese Gleichung verbunden mit den 3 Gleichungen (C) oder (D) (5, 6) dienen zur Bestimmung der Werthe von λ, x, y, z in Funktionen von a, b, c, t.

8) Da diese Gleichungen in partiellen Differentialien bestehn; so werden nothwendig durch die Integration verschiedene willkührliche Funktionen darin eingeführt, und die Bestimmung dieser Funktionen kann zum Theil aus dem anfänglichen Zustande des Fluidums hergeleitet werden, welcher als gegeben angenommen werden muß, und zum Theil aus der Betrachtung der äussern Fläche des Fluidums, die ebenfals gegeben ist, wenn das Fluidum in ein Gefäß eingeschlossen ist, und die durch die Gleichung $\lambda = 0$ ausgedrückt werden muß, wenn es frei ist (2). Denn stellt im erstern Falle $\Lambda = 0$ die Gleichung für die Wände des Gefäßes vor, wo Λ eine gegebene Funktion der Coordinaten x, y, z dieser Wände ist,

Digitized by Google

ist, und man setzt darin für diese veränderlichen Größen ihre Werthe in a, b, c, t; so erhält man eine Gleichung zwischen den anfänglichen Coordinaten a, b, c und der Zeit t, welche folglich die Fläche vorstellen wird, die dieselben Theilchen im anfänglichem Zustande bildeten, welche nach der Zeit die Fläche bilden, die die gegebene Gleichung $A = o$ vorstellt. Will man also, daß die Theilchen, die sich einmal auf der Oberfläche befinden, auch allezeit darauf bleiben, welche Bedingung nothwendig statt finden zu müssen scheint, wenn sich das Fluidum nicht theilen soll, und die man daher allgemein in der Theorie der flüssigen Massen annimmt; so muß die gesuchte Gleichung die Zeit t nicht enthalten, und folglich muß die Funktion A von x, y, z so beschaffen seyn, daß t darin nach der Substitution der Werthe von x, y, z in a, b, c, t verschwindet.

Aus dem nämlichen Grunde kann die Gleichung $\lambda = o$ der freien Fläche, kein t enthalten; der Werth von λ muß daher eine einfache Funktion von a, b, c ohne t seyn.

Uebrigens giebt es Fälle bey der Bewegung eines flüssigen Körpers, der aus einem Gefäße herausfällt, wo die eben genannte Bedingung nicht statt finden kann; die Bestimmungen also, die aus dieser Bedingung herfliessen, sind nicht nothwendig.

9) Dies sind die Gleichungen, wodurch man direkte die Bewegung irgend eines unpreßbaren flüssigen Körpers bestimmen kann. Diese Gleichungen aber haben eine etwas verwickelte Form, allein man kann sie auf eine einfachere bringen, wenn man statt der Coordinaten x, y, z die Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

in der Direktion der Coordinaten als unbekannt annimmt, und diese Geschwindigkeiten als Funktionen von x, y, z, t ansieht.

Denn auf der einen Seite ist klar, daß weil x, y, z Funktionen von a, b, c, t sind, die Größen

Digitized by Google

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

ebenfals Funktionen dieser veränderlichen Größen a, b, c, t sind. Substituirt man daher in diesen Funktionen die Werthe von a, b, c in x, y, z die man aus denen von x, y, z in a, b, c gezogen hat; so hat man

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

in Funktionen von x, y, z und t ausgedrückt. Auf der andern Seite ist klar, daß, um die augenblickliche Bewegung des flüssigen Körpers zu erkennen, man nur die Bewegung irgend eines Theilchens jeden Augenblick zu kennen braucht, das einen gegebenen Ort im Raume einnimmt, ohne daß man die vorhergehenden Zustände dieses Theilchens zu wissen nöthig hat. Es ist also hinlänglich die Werthe der Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

in Funktionen von x, y, z, t zu haben.

Nennt man übrigens diese bekannten Werthe p, q, r; so erhält man die Gleichungen

$$dx = pdt, \quad dy = qdt, \quad dz = rdt$$

zwischen x, y, z, t, welche, nachdem man sie dergestalt integrirt hat, daß aus x, y, z; wenn $t = o$, a, b, c wird, die Werthe von x, y, z selbst in a, b, c, t geben werden. Schafft man übrigens dt aus diesen Differentialgleichungen weg; so erhält man diese

$$qdy = qdx, \quad pdz = rdx,$$

welche die Natur der verschiedenen krummen Linien ausdrücken, in denen das ganze Fluidum sich jeden Augenblick bewegt, welche jeden Augenblick eine Veränderung in Ansehung des Orts und der Form erleiden.

10) Wir wollen daher die Fundamentalgleichungen (A) und (B) wieder vornehmen (2) (3) und darin die veränderlichen Größen

p =

Digitized by Google

$$p = \frac{dx}{dt}, \quad p = \frac{dy}{dt}, \quad r = \frac{dz}{dt}$$

welche als Funktionen von x, y, z, t anzusehn sind, einführen.

Es ist klar, daß die Größen

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

folgende Form erhalten können

$$\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}, \quad \frac{d.\frac{dy}{dt}}{dt}, \quad \frac{d.\frac{dz}{dt}}{dt},$$

wo die Größen

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

als Funktionen von a, b, c, t anzusehn sind.

Sieht man sie also so an; so erhält man für die vollkommene Differenz von $\frac{dx}{dt}$,

$$\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}dt + \frac{d.\frac{dx}{dt}}{da}da + \frac{d.\frac{dx}{dt}}{db}db + \frac{d.\frac{dx}{dt}}{dc}dc$$

und eben so verhält es sich mit den andern; betrachtet man sie aber als Funktionen von x, y, z, t und bezeichnet sie durch p, q, r; so werden ihre vollkommenen Differentialien seyn

$$\frac{dp}{dt}dt + \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz,$$

und eben so mit den übrigen.

Digitized by Google

Sezt man daher in diesen lezteren Ausdrückungen statt dx, dy, dz ihre Werthe in a, b, c, t; so müssen sie mit den erstern identisch werden; da man aber x als eine Funktion von a, b, c, t ansieht; so hat man

$$dx = \frac{dx}{dt}dt + \frac{dx}{da}da + \frac{dx}{db}db + \frac{dx}{dc}dc;$$

wo $\frac{dx}{dt}$ offenbar = p ist, wenn man annimmt, daß man in p die Werthe von a, b, c, t sezt. Man hat also

$$dx = pdt + \frac{dx}{da}da + \text{etc.}$$

und eben so auch

$$dy = qdt + \frac{dy}{da}da + \text{etc.}$$

$$dz = rdt + \frac{dz}{da}da + \text{etc.}$$

Substituirt man diese Werthe in dem Ausdruck des vollkommnen Differentials von $\frac{dx}{dt}$; so werden die Glieder, worin dt vorkommt, seyn

$$\left(\frac{dp}{dt} + \frac{dp}{dx}p + \frac{dp}{dy}q + \frac{dp}{dz}r\right)dt$$

welche mit dem correspondirenden Gliede

$$\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}dt \text{ oder vielmehr } \frac{d^2x}{dt^2}dt$$

identisch seyn müssen. Es ist daher

d^2x

Digitized by Google

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} + p\frac{dp}{dx} + q\frac{dp}{dy} + r\frac{dp}{dz};$$

und man findet auf dieselbe Art

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dq}{dt} + p\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} + r\frac{dq}{dz},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dr}{dt} + p\frac{dr}{dx} + q\frac{dr}{dy} + r\frac{dr}{dz}.$$

Man verrichte daher diese Substitutionen in den Gleichungen (A); und da in eben diesen Gleichungen die Glieder

$$\frac{D\lambda}{Dx}, \quad \frac{D\lambda}{Dy}, \quad \frac{D\lambda}{Dz}$$

partielle Differentialien von λ in Ansehung der x, y, z, wenn t = Const., ausdrücken; so kann man darin die Charakteristik D in d verwandlen.

Dadurch erhält man folgende veränderte Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\left(\frac{dp}{dt} + p\frac{dp}{dx} + q\frac{dp}{dy} + r\frac{dp}{dz} + X\right) - \frac{d\lambda}{dx} &= 0 \\ A\left(\frac{dq}{dt} + p\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} + r\frac{dq}{dz} + Y\right) - \frac{d\lambda}{dy} &= 0 \\ A\left(\frac{dr}{dt} + p\frac{dr}{dx} + q\frac{dr}{dx} + r\frac{dr}{dz} + Z\right) - \frac{d\lambda}{dz} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (F).$$

Was nun die Gleichung (B) (3) betrifft, so hat man darin nur statt dx, dy, dz ihre Werthe pdt, qdt, rdt zu setzen, und man erhält sogleich wenn man die Charakteristik D in d verwandelt, da dt = Const. ist,

$$\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0 \ldots\ldots (G).$$

Man

Man sieht, daß diese Gleichungen weit einfacher sind als die (C) oder (D) und (E), denen sie entsprechen; man kann sie daher mit Vortheil vor den andern bey der Theorie der flüssigen Massen anwenden.

11) Bey homogenen Flüssigkeiten von immer gleicher Dichtigkeit ist die Größe Δ, die die Dichtigkeit ausdrückt, völlig beständig; das ist der gewöhnlichste Fall, und der einzige, den wir in der Folge betrachten wollen.

Bey heterogenen Flüssigkeiten aber muß diese Größe eine beständige Funktion in Ansehung der Zeit t für einerlei Theilchen seyn, aber sie muß eine veränderliche Funktion nach einem gegebenen Gesetze von einem Theilchen zum andern seyn.

Betrachtet man daher die flüssige Masse in ihrem anfänglichen Zustande, wo die Coordinaten x, y, z mit a, b, c zusammenfallen; so wird die Größe Δ eine gegebene und bekannte Funktion von a, b, c ohne t, seyn; folglich muß das Glied, worin dt vorkommt, in dem vollkommenen Differential von Δ, als eine Funktion von a, b, c, t angesehn $= 0$ seyn. Man findet aber durch ein ähnliches Raisonnement als (10), um den Werth von $\frac{d^2x}{dt^2}$ zu finden, daß, wenn man Δ als eine Funktion von x, y, z, t ansieht, das gesuchte Glied also ausgedrückt wird:

$$\left(\frac{d\Delta}{dt} + p\frac{d\Delta}{dx} + q\frac{d\Delta}{dy} + r\frac{d\Delta}{dz}\right)dt.$$

Man hat also die Gleichung

$$\frac{d\Delta}{dt} + p\frac{d\Delta}{dx} + q\frac{d\Delta}{dz} + r\frac{d\Delta}{dy} = 0 \ldots (H)$$

die dazu dienen wird, die unbekannte Größe Δ in den Gleichungen (F) zu bestimmen, indem man darin Δ als eine Funktion von x, y, z, t betrachtet.

In dieser Hinsicht sind sie mit weniger Vortheil zu gebrauchen, als die Gleichungen (C) oder (D), in denen man Δ als eine bekannte Funktion von a, b, c ansehen kann.

12)

Digitized by Google

12) Was wir eben in Ansehung der Funktion Δ gesagt haben, muß man auch auf die Funktion A anwenden, insofern A = o die Gleichung für die Wände des Gefäßes ist. Denn die Bedingung, daß dieselben Theilchen immer an der Oberfläche bleiben, erfordert, wie wir (8) gesehn haben, daß A eine Funktion von a, b, c ohne t werde, so daß, wenn man diese Größe als eine Funktion von x, y, z, t ansieht, man die Gleichung hat:

$$\frac{dA}{dt} + p\frac{dA}{dx} + q\frac{dA}{dy} + r\frac{dA}{dz} = o \ldots (I).$$

Für die Theile der Oberfläche, wo die flüssige Masse frey ist, hat man die Gleichung λ = o (2). Man muß also, um eben dieser Bedingung ein Gnüge zu thun, haben

$$\frac{d\lambda}{dt} + p\frac{d\lambda}{dx} + q\frac{d\lambda}{dy} + r\frac{d\lambda}{dz} = o \ldots (K).$$

13) Dies sind die allgemeinsten und einfachsten Formeln zur rigurensen Bestimmung der Bewegung der flüssigen Körper. Die Schwierigkeit, die nun noch übrig ist, besteht also blos in ihrer Integration, allein diese ist auch so groß, daß man bis jetzt genöthigt ist, auch bey den einfachsten Aufgaben sich besonderer mehr oder weniger auf Hypotheſen und Bedingungen gegründeten Methoden zu bedienen. Um nun diese Schwierigkeit soviel als möglich zu verringern, wollen wir jetzt untersuchen, wie und in welchen Fällen diese Formeln noch vereinfacht werden können, und eine Anwendung davon wollen wir hernach auf einige Aufgaben über die Bewegung der flüssigen Massen in Gefäßen oder Röhren machen.

14) Nichts aber ist hier leichter als der Gleichung (G) (10) genug zu thun, denn setzt man

$$p = \frac{d\alpha}{dz}, \quad q = \frac{d\beta}{dz};$$

so wird sie

$$\frac{d^2\alpha}{dx\,dz} + \frac{d^2\beta}{dy\,dz} + \frac{dr}{dz} = 0,$$

welche in Beziehung auf z integrabel ist und

$$r = -\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}$$

giebt.

Wegen den unbestimmten Größen α und β ist es nicht nöthig hier eine willkührliche Funktion hinzuzuaddiren. Der genannten Gleichung wird also durch folgende Werthe ein Genüge gethan

$$p = \frac{d\alpha}{dz},$$

$$q = \frac{d\beta}{dz},$$

$$r = -\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}.$$

Substituirt man diese nun in den 3 Gleichungen (F) (10); so hat man nur noch 3 unbekannte Größen α, β und λ und es wird sehr leicht seyn, selbst λ durch partielle Differentialien wegzuschaffen. Ist also die Dichtigkeit Δ beständig; so wird die Aufgabe auf 2 einzige Gleichungen zwischen den unbekannten Größen α und β gebracht, und ist Δ veränderlich; so müßte man damit die Gleichung H (11) verbinden. Allein die Integration dieser Gleichungen geht über die Kräfte der bekannten Analyse.

15) Wir wollen daher sehn, ob die Gleichungen (F) an und für sich betrachtet nicht einiger Vereinfachung fähig sind.

Betrachtet man in der Funktion λ nur die Veränderlichkeit von x, y, z; so hat man

$$d\lambda$$

Digitized by Google

$$d\lambda = \frac{d\lambda}{dx}dx + \frac{d\lambda}{dy}dy + \frac{d\lambda}{dz}dz.$$

Substituirt man daher statt $\frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{d\lambda}{dy}$, $\frac{d\lambda}{dz}$

ihre aus diesen Gleichungen gezogene Werthe; so erhält man

$$d\lambda = \left(\frac{dp}{dt} + p\frac{dp}{dx} + q\frac{dp}{dy} + r\frac{dp}{dz} + X\right)\Delta dx$$
$$+ \left(\frac{dq}{dt} + p\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} + r\frac{dq}{dz} + Y\right)\Delta dy$$
$$+ \left(\frac{dr}{dt} + p\frac{dr}{dx} + q\frac{dr}{dy} + r\frac{dr}{dz} + Z\right)\Delta dz.$$

Da das erste Glied dieser Gleichung ein vollkommenes Differential ist, so muß das 2te ebenfals eins in Ansehung der Größen x, y, z seyn, und der daraus gezogene Werth von λ wird allen 3 Gleichungen (F) zugleich genug thun.

Wir wollen jetzt annehmen, das Fluidum sey homogen, so daß die Dichtigkeit Δ beständig sey, und sie sey um mehrerer Einfachheit willen = 1.

Ferner seyen die beschleunigenden Kräfte X, Y, Z so beschaffen, daß die Größe

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

ein vollkommenes Differential sey. Diese Bedingung ist nothwendig, damit die flüssige Masse durch diese Kräfte im Gleichgewichte bleibe, wie wir (7 Abschn 17.) gesehn haben. Sie findet ausserdem immer statt, wenn diese Kräfte von einer oder mehrern gewissen Funktionen der Distanzen von den Mittelpunkten proportionalen Anziehungen herkommen, welches in der Natur der Fall ist. Denn nennt man P, Q, R, etc. die Anziehungen und p, q, r die Distanzen; so hat man allgemein:

Digitized by Google

$Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$
(1 Th. 5 Abſchn. 5.).

Seßt man alſo $\Delta = 1$

und

$Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} = dV$;

ſo wird aus der vorhergehenden Gleichung

$$d\lambda - dV = \left(\frac{dp}{dt} + p\frac{dp}{dx} + q\frac{dp}{dy} + r\frac{dp}{dz}\right)dx$$
$$+ \left(\frac{dq}{dt} + p\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} + r\frac{dq}{dz}\right)dy$$
$$+ \left(\frac{dr}{dt} + p\frac{dr}{dx} + q\frac{dr}{dy} + r\frac{dr}{dz}\right)dz \ldots (L);$$

wo das zweite Glied dieſer Gleichung ein vollkommenes Differential ſeyn muß, weil das erſtere eins iſt.

Dieſe Gleichung iſt alſo mit denen (F) (10) einerley.

Betrachtet man daher das Differential von

$$\frac{p^2 + q^2 + r^2}{2}$$

in Beziehung auf x, y, z; ſo iſt nicht ſchwer einzuſehn, daß man dem 2ten Gliede der geſuchten Gleichung dieſe Form geben kann:

$$\frac{d.(p^2 + q^2 + r^2)}{2} +$$
$$\frac{dp}{dt}dx + \frac{dq}{dt}dy + \frac{dr}{dt}dz +$$

(dp

Digitized by Google

$$\left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx}\right)(qdx - pdy) +$$

$$\left(\frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dx}\right)(rdx - pdz) +$$

$$\left(\frac{dq}{dz} - \frac{dr}{dy}\right)(rdy - qdz);$$

und man sieht sogleich, daß diese Größe ein vollkommenes Differential jederzeit seyn wird, wenn es

$$pdx + qdy + rdz$$

ist, denn alsdenn ist das Differential der letztern in Bezug auf t, nämlich

$$\frac{dp}{dt}dx + \frac{dq}{dt}dy + \frac{dr}{dt}dz$$

es ebenfals, und es geben die bekannten Bedingungen der Integrabilität

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} = 0,$$

$$\frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dx} = 0,$$

$$\frac{dq}{dz} - \frac{dr}{dy} = 0.$$

Hieraus folgt, daß man der Gleichung (L) durch die einfache Voraussetzung, daß

$$pdx + qdy + rdz$$

ein vollkommenes Differential sey, genug thun kann, wodurch der Kalkul der Bewegung der flüssigen Masse sehr vereinfacht wird.

Digitized by Google

Da dies aber nur eine besondere Voraussetzung ist; so muß man vor allen Dingen untersuchen, in welchen Fällen sie statt haben kann und muß.

17) Es sey Kürze halber

$$\alpha = \frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx},$$

$$\beta = \frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dx},$$

$$\gamma = \frac{dq}{dz} - \frac{dr}{dy};$$

und man hat nur die Größe

$$\frac{dp}{dt}dx + \frac{dq}{dt}dy + \frac{dr}{dt}dz +$$
$$\alpha(qdx - pdy) +$$
$$\beta(rdx - pdz) +$$
$$\gamma(rdy - qdz)$$

zu einem vollkommenen Differential zu machen. Wir wollen jetzt annehmen, die veränderliche Größe t habe einen sehr geringen Werth, alsdenn kann man den Größen p, q, r folgende Formen in Reihen geben:

$$p = p' + p''t + p'''t^2 + p''''t^3 + \text{etc.};$$
$$q = q' + q''t + q'''t^2 + q''''t^3 + \text{etc.},$$
$$r = r' + r''t + r'''t^2 + r''''t^3 + \text{etc.},$$

wo die Größen p', p'', p''' etc.; q' q'', q''', etc., r' r'', r'', r''', etc. Funktionen von x, y, z ohne t seyn werden.

Substituirt man diese Werthe in den 3 Größen α, β, γ; so werden sie

$\alpha =$

Digitized by Google

$$\alpha = \alpha' + \alpha''t + \alpha'''t^2 + \alpha''''t^3 + \text{etc.}$$
$$\beta = \beta' + \beta''t + \beta'''t^2 + \beta''''t^3 + \text{etc.}$$
$$\gamma = \gamma' + \gamma''t + \gamma'''t^2 + \gamma''''t^3 + \text{etc.}$$

wenn man

$$\alpha' = \frac{dp'}{dy} - \frac{dq'}{dx},$$

$$\alpha'' = \frac{dp''}{dy} - \frac{dq''}{dx};$$

etc.

$$\beta' = \frac{dp'}{dz} - \frac{dr'}{dx},$$

$$\beta'' = \frac{dp''}{dz} - \frac{dr''}{dx};$$

$$\beta''' = \frac{dp'''}{dz} - \frac{dr'''}{dx},$$

etc.

$$\gamma' = \frac{dq'}{dz} - \frac{dr'}{dy},$$

etc.

setzt.

Durch diese verschiedenen Substitutionen, und wenn man die Glieder nach den Potenzen von t ordnet, wird die Größe

dp

Digitized by Google

$$\frac{dp}{dt}\,dx + \frac{dq}{dt}\,dy + \frac{dr}{dt}\,dz +$$
$$\alpha\,(q\,dx - p\,dy) +$$
$$\beta\,(r\,dx - p\,dz) +$$
$$\gamma\,(r\,dy - q\,dz)$$

sich in folgende verwandeln

$$p''\,dx + q''\,dy + r''\,dz +$$
$$\alpha'\,(q'\,dx - p'\,dy) +$$
$$\beta'\,(r'\,dx - p'\,dz) +$$
$$\gamma'\,(r'\,dy - q'\,dz) +$$
$$t\,(2\,(p'''\,dx + q'''\,dy + r'''\,dz) +$$
$$\alpha'\,(q''\,dx - p''\,dy) +$$
$$\beta'\,(r''\,dx - p''\,dz) +$$
$$\gamma'\,(r''\,dy - q''\,dz) +$$
$$\alpha''\,(q'\,dx - p'\,dy) +$$
$$\beta''\,(r'\,dx - p'\,dz) +$$
$$\gamma''\,(r'\,dy - q'\,dz)) +$$
$$t^2\,(3\,(p''''\,dx + q''''\,dy + r''''\,dz) +$$
$$\alpha'\,(q'''\,dx - p'''\,dy) +$$
$$\beta'\,(r'''\,dx - p'''\,dz) +$$
$$\gamma'\,(r'''\,dy - q'''\,dz) +$$
$$\alpha''\,(q''\,dx - p''\,dy) +$$
$$\beta''\,(r''\,dx - p''\,dz) +$$

γ''

Digitized by Google

$$\gamma''(r'dy - q''dz) +$$
$$\alpha'''(q'dx - p'dy) +$$
$$\beta'''(r'dx - p'dz) +$$
$$\gamma'''(r'dy - q'dz)) +$$
etc.

und da diese Größe ein vollkommenes Differential unabhängig vom Werthe von t seyn muß; so müssen auch die Größen, womit die Potenzen von t multiplicirt sind, jede insbesondere ein vollkommenes Differential seyn.

Dies vorausgesetzt, wollen wir annehmen

$$p'dx + q'dy + r'dz$$

sey ein vollkommenes Differential. Alsdenn ist nach den bekannten Lehrsätzen.

$$\frac{dp'}{dy} = \frac{dq'}{dx},$$
$$\frac{dp'}{dz} = \frac{dr'}{dx},$$
$$\frac{dq'}{dz} = \frac{dr'}{dy};$$

folglich $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$;

und die erstere Größe, die ein vollkommenes Differential seyn muß, verwandelt sich in

$$p''dx + q''dy + r''dz$$

und man hat folglich diese Bedingungsgleichungen

$$\alpha'' = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = 0.$$

Aus der 2ten Größe, die ein vollkommenes Differential seyn muß, wird alsdenn

Digitized by Google

$$2\,(p'''\,dx + q'''\,dy + r'''\,dz);$$

und es erwachsen daraus die neuen Gleichungen

$$\alpha''' = 0,\quad \beta''' = 0,\quad \gamma''' = 0.$$

Die 3te Größe, die ein vollkommenes Differential seyn muß, wird daher seyn

$$3\,(p''''\,dx + q''''\,dy + r''''\,dz);$$

woraus man auf gleiche Art die Gleichungen

$$\alpha'''' = 0,\quad \beta'''' = 0,\quad \gamma'''' = 0$$

zieht u. s. f.

Ist also

$$p'\,dx + q'\,dy + r'\,dz$$

ein vollkommenes Differential; so müssen auch

$$p''\,dx + q''\,dy + r''\,dz,$$

$$p'''\,dx + q'''\,dy + r'''\,dz,$$

$$p''''\,dx + q''''\,dy + r''''\,dz,$$

etc.

vollkommene Differentiale seyn.

Die ganze Größe

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz$$

wird also in diesem Falle ein vollkommenes Differential seyn, wenn man die Zeit t als sehr klein annimmt.

17) Hieraus folgt, daß, wenn die Größe

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz$$

ein vollkommenes Differential ist, wenn $t = 0$, sie es auch seyn wird, wenn t irgend einen sehr kleinen Werth hat; woraus man allgemein schließen kann, daß diese Größe allezeit ein vollkommenes Differential seyn muß,

Digitized by Google

muß, wie auch der Werth von t beschaffen seyn mag. Denn weil sie es von $t = o$ bis $t = \vartheta$ seyn muß (wo ϑ irgend eine sehr kleine Größe ist); so muß sie auch ein vollkommenes Differential von $t' = o$ bis $t' = \vartheta$ seyn, wenn man statt t überall $\vartheta + t'$ substituirt, wie man auf gleiche Art beweisen kann; sie wird es folglich auch von $t = o$ bis $t = 2\vartheta$ seyn u. s. f.

Da nun der Anfang von t willkührlich ist, und man t sowohl positiv als negativ annehmen kann; so folgt, daß wenn die Größe

$$pdx + qdy + rdz$$

in irgend einem Augenblicke ein vollkommenes Differential ist; sie es auch in den andern Augenblicken seyn wird.

Ist folglich ein einziger Augenblick, worin sie kein vollkommenes Differential ist; so kann sie es auch während der ganzen Bewegung nie seyn, denn wäre sie es in irgend einem andern Augenblicke; so müßte sie es auch im ersten Augenblicke seyn.

18) Fängt die Bewegung von der Ruhe an; so hat man

$$p = o, \quad q = o, \quad r = o,$$

wenn $t = o$;

$pdx + qdy + rdz$ wird also für diesen Augenblick integrabel seyn, und folglich wird sie es allezeit während der ganzen Dauer der Bewegung seyn.

Sind aber gewisse Geschwindigkeiten der flüssigen Masse vom Anfange an eingedrückt; so hängt alles von der Natur dieser Geschwindigkeiten ab, je nachdem die Größe

$$pdx + qdy + rdz$$

integrabel ist oder nicht. Im erstern Falle ist diese Größe

$$pdx + qdy + rdz$$

allezeit integrabel, im 2ten niemals.

Digitized by Google

Werden die anfänglichen Geschwindigkeiten durch einen Stoß auf die Oberfläche des flüssigen Körpers, wie durch die Würkung eines Stempels hervorgebracht; so kann man erweisen, daß $pdx + qdy + rdz$ im ersten Augenblicke integrabel seyn muß. Denn die Geschwindigkeiten p, q, r, die jeder Punkt der flüssigen Masse durch den der Oberfläche ertheilten Stoß erhält, müssen so beschaffen seyn, daß, wenn man diese Geschwindigkeiten aufhöbe, und zugleich jedem Punkte des flüssigen Körpers gleiche Geschwindigkeiten im entgegengesetzten Sinne eindrückte, die ganze Masse des flüssigen Körpers in Ruhe oder im Gleichgewichte bliebe. Es muß also bey dieser Masse ein Gleichgewicht statt finden wegen des an der Oberfläche angebrachten Stoßes und der Geschwindigkeiten oder Kräften an jedem ihrer innern Punkte. Nach dem allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts der flüssigen Körper (1 Th. 7 Abschn. 17.) müssen also die Größen p, q, r so beschaffen seyn, daß $pdx + qdy + rdz$ ein vollkommenes Differential ist. In diesem Falle muß also dieselbe Größe allezeit bey jedem Augenblick der Bewegung ein vollkommenes Differential seyn.

19) Man könnte vielleicht daran zweifeln, ob es auch bey einem flüssigen Körper Bewegungen geben könne, für die

$$pdx + qdy + rdz$$

kein vollkommenes Differential ist.

Um diesen Zweifel durch ein sehr einfaches Beyspiel zu heben, hat man nur den Fall zu betrachten, worin

$$p = gy. \quad q = -gx, \quad r = 0,$$

wäre, wo g eine gewisse beständige Größe ist.

Man sieht sogleich, daß in diesem Falle

$$pdx + qdy + rdz$$

kein vollkommenes Differential ist, denn diese Größe wird hier

$$g(ydx - xdy)$$

welche nicht integrabel ist.

Indes-

Digitized by Google

Indessen wird die Gleichung (L) (15) an und für sich integrabel seyn; denn man erhält

$$\frac{dp}{dy} = g, \quad \frac{dq}{dx} = -g$$

und alle andere partielle Differentialien von p und q werden = 0 seyn, so daß die gesuchte Gleichung seyn wird

$$d\lambda - dV = -g^2 (x dx + y dy)$$

davon das Integral giebt

$$\lambda = V - \frac{g^2}{2}(x^2 + y^2) + \text{funct. } t$$

welcher Werth den 3 Gleichungen (F) (10) genugthun wird. Was aber die Gleichung (G) (10) anbetrifft; so wird sie auch statt finden, weil die angenommenen Werthe geben

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{dq}{dy} = 0, \quad \frac{dr}{dz} = 0.$$

Uebrigens ist offenbar, daß diese Werthe von p, q, r die Bewegung eines flüssigen Körpers vorstellen, der sich um die feste Achse der Coordinaten z mit einer beständigen und g gleichen angulairen Geschwindigkeit bewegt, und man weiß, daß eine ähnliche Bewegung bey einem Fluido jederzeit statt finden kann. Hieraus läßt sich der Schluß ziehn, daß man beym Calkul der Oscillationen des Meers wegen der Anziehung der Sonne und des Monds nur die Größe $p dx + q dy + r dz$ als integrabel annehmen kann, denn sie ist es nicht, wenn das Fluidum in Ansehung der Erde in Ruhe ist, und nur die mit derselben gemeine Umdrehungsbewegung hat.

20) Nachdem wir nun so die Fälle bestimmt haben, in denen man versichert ist, daß die Größe $p dx + q dy + r dz$ ein vollkommenes Differential seyn muß; so wollen wir jetzt sehn, wie man nach dieser Bedingung die Gleichungen der Bewegung flüssiger Körper auflösen kann.

Digitized by Google

Es sey daher $p\,dx + q\,dy + r\,dz = d\varphi$, wo φ eine gewisse Funktion von x, y, z und der veränderlichen Größe t ist, welche in dem Differential $d\varphi$ als beständig angesehn wird; man hat alsdann

$$p = \frac{d\varphi}{dx}, \quad q = \frac{d\varphi}{dy}, \quad r = \frac{d\varphi}{dz};$$

und wenn man diese Werthe in der Gleichung (L) (15) substituirt; so wird aus ihr:

$$d\lambda - dV =$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt\,dx} + \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}\right)dx$$

$$+\left(\frac{d^2\varphi}{dt\,dy} + \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\right)dy$$

$$+\left(\frac{d^2\varphi}{dt\,dz} + \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)dz$$

wovon das Integrale in Ansehung der x, y, z offenbar ist:

$$\lambda - V = \frac{d\varphi}{dt} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2.$$

Man könnte hier noch eine willkührliche Funktion von t hinzuaddiren, weil diese veränderliche Größe bey der Integration als beständig ist angesehn worden. Allein ich bemerke hier zugleich, daß diese Funktion als in dem Werth von φ enthalten angesehn werden kann. Denn vermehrt man φ um eine gewisse Funktion T von t; so bleiben die Werthe von p, q, r dieselben wie vorhin, und das zte Glied der vorhergehenden Gleichung wird um die Funktion $\frac{dT}{dt}$ vermehrt werden, welche willkührlich ist.

Man

Digitized by Google

Man hat daher nicht nöthig noch eine willkührliche Funktion von t hinzuzuaddiren, und die Gleichung wird darum doch nichts an ihrer Allgemeinheit verlieren.

Man erhält also durch diese Gleichung

$$\lambda = V + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2,$$

welcher Werth den 3 Gleichungen (F) (10) zugleich genugthun wird, und die Bestimmung von φ wird von der Gleichung (G) (10) abhängen, welche, wenn man für p, q, r ihre Werthe

$$\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dz}$$

substituirt, wird

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Die ganze Schwürigkeit besteht also nur in der Integration dieser letztern Gleichung.

21) Es giebt aber noch ein Fall von ausgedehntem Umfange, darin die Größe

$$pdx + qdy + rdz$$

ein vollkommenes Differential seyn muß, nämlich der, wo man annimmt, daß die Geschwindigkeiten p, q, r, sehr gering seyen, und die sehr kleinen Größen von der 2ten und den folgenden Ordnungen wegläßt. Denn man sieht leicht, daß bey dieser Hypothese dieselbe Gleichung (L) sich in diese verwandelt:

$$d\lambda - dV = \frac{dp}{dt}dx + \frac{dq}{dt}dy + \frac{dr}{dt}dz,$$

wo man sieht, daß, da

dp

Digitized by Google

$$\frac{dp}{dt}dx + \frac{dq}{dt}dy + \frac{dr}{dt}dz$$

in Ansehung x, y, z integrabel seyn muß, die Größe $pdx + qdy + rdz$ es ebenfals seyn muß. Man hat auf diese Art dieselben Formeln als (20), wenn man φ als eine sehr kleine Funktion annimmt, und die 2ten Dimensionen von φ und dessen Differentialien weglässt.

In diesem Falle kann man ferner die Werthe von x, y, z selbst für eine gewisse Zeit bestimmen. Denn man hat zu dieser Absicht nur die Gleichungen (9)

$$dx = pdt, \quad dy = qdt, \quad dz = rdt$$

zu integriren, in denen man, da p, q, r sehr klein sind, und folglich auch dx, dy, dz sehr klein von derselben Ordnung im Gegensatz der dt sind, x, y, z als beständige Größen in Ansehung der Größe t ansehn kann. Betrachtet man daher t allein als veränderlich in den Funktionen p, q, r und addirt die beständigen Größen a, b, c; so erhält man sogleich

$$x = a + \int pdt,$$
$$y = b + \int qdt,$$
$$z = c + \int rdt.$$

Setzt man daher Kürze halber $\Phi = \int \varphi dt$ und verwandelt in Φ die veränderlichen Größen x, y, z in a, b, c; so hat man folgende sehr einfache Ausdrückungen:

$$x = a + \frac{d\Phi}{da},$$

$$y = b + \frac{d\Phi}{db},$$

$$z = c + \frac{d\Phi}{dc},$$

wo

Digitized by Google

wo die Funktion Φ dergestalt angenommen werden muß, daß sie = o sey, wenn t = o, damit a, b, c die anfänglichen Werthe von x, y, z seyen.

Dieser Fall findet besonders bey der Theorie der Wellen statt, wie wir weiter unten sehn werden.

22) Wäre übrigens die Masse des flüssigen Körpers so beschaffen, daß die eine ihrer Dimensionen beträchtlich kleiner sey als jede der beiden andern, so daß man z. B. die Coordinaten z als sehr klein in Ansehung der x und y ansehen könnte; so würde dieser Umstand ebenfals die Auflösung der allgemeinen Gleichungen erleichtern. Denn es ist klar, daß man alsdann den unbekannten Größen p, q, r, Δ folgende Form geben könnte

$$p = p' + p''z + p'''z^2 + \text{etc.}$$

$$q = q' + q''z + q'''z^2 + \text{etc.},$$

$$r = r' + r''z + r'''z^2 + \text{etc.},$$

$$\Delta = \Delta' + \Delta''z + \Delta'''z^2 + \text{etc.}$$

worin p', p'', etc.; q', q'', etc.; r', r'', etc.; Δ', Δ'', etc. Funktionen von x, y, t ohne z sind, so daß wenn man diese Substitutionen verrichtet, man Gleichungen in Reihen erhält, welche nur aus partiellen Differentialien in Beziehung auf x, y, t bestehn.

Um hiervon eine Art von Kalkul zu geben, wollen wir das Fluidum von neuen als homogen annehmen, wo $\Delta = 1$ ist und den Anfang damit machen, die vorhergehenden Werthe in der Gleichung G (10) zu substituiren. Ordnet man alsdann die Glieder nach z; so bekommt man:

$$o = \frac{dp'}{dx} + \frac{dq'}{dy} + r''$$

$$+ z\left(\frac{dp''}{dx} + \frac{dq''}{dy} + 2r'''\right)$$

$$+ z^2 \left(\frac{dp'''}{dx} + \frac{dq'''}{dy} + 3r'''' \right)$$

$$+ \text{etc.}$$

so daß man folgende besondere Gleichungen hat, weil p', p'', etc., q', q'', etc. kein z enthalten müssen:

$$\frac{dp'}{dx} + \frac{dq'}{dy} + r'' = 0,$$

$$\frac{dp''}{dx} + \frac{dq''}{dy} + 2r''' = 0,$$

$$\frac{dp'''}{dx} + \frac{dq'''}{dy} + 3r'''' = 0,$$

etc.

durch die man sogleich die Größen r'', r''', r'''', etc., bestimmen muß, und die andern Größen r', p', p'', etc., q', q'', etc. noch unbestimmt bleiben. Die nämlichen Substitutionen verrichtet man in der Gleichung (L) (15), welche mit den 3 Gleichungen (F) (10) übereinkommt, und die sich leicht auf folgende Form bringen läßt:

$$d\lambda - dV = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz +$$
$$z(\alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz) +$$
$$z^2(\alpha'' dx + \beta'' dy + \gamma'' dz) +$$
$$\text{etc.}$$

wenn man Kürze halber setzt:

$$\alpha = \frac{dp'}{dt} + p' \frac{dp'}{dx} + q' \frac{dp'}{dy} + r'p'',$$

$$\beta =$$

Digitized by Google

$$\beta = \frac{dq'}{dt} + p'\frac{dq'}{dx} + q'\frac{dq'}{dy} + r'q'',$$

$$\gamma = \frac{dr'}{dt} + p'\frac{dr'}{dx} + q'\frac{dr'}{dy} + r'r'',$$

$$\alpha' = \frac{dp''}{dt} + p'\frac{dp''}{dx} + p''\frac{dp'}{dx} + q'\frac{dp''}{dy} + q''\frac{dp'}{dy} + 2r'p''' + r''p'',$$

$$\beta' = \frac{dq''}{dt} + p'\frac{dq''}{dx} + p''\frac{dq'}{dx} + q'\frac{dq''}{dy} + q''\frac{dq'}{dy} + 2r'q''' + r''q'',$$

$$\gamma' = \frac{dr''}{dt} + p'\frac{dp''}{dx} + p''\frac{dr'}{dx} + q'\frac{dr'}{dy} + q''\frac{dr'}{dy} + 2r'r''' + r''r''$$

u. s. f.

Damit also das 2te Glied dieser Gleichung integrabel sey, müssen die Größen

$$\alpha dx + \beta dy,$$

$$\gamma dz + z(\alpha' dx + \beta' dy),$$

$$\gamma' z dz + z^2(\alpha'' dx + \beta'' dy)$$

etc.

jede insbesondere integrabel seyn.

Digitized by Google

Bedeutet daher ω eine Funktion von x, y, t ohne z; so hat man diese Bedingungen

$$\alpha = \frac{d\omega}{dx}, \quad \alpha' = \frac{d\gamma}{dx}, \quad \alpha'' = \frac{d\gamma'}{2\,dx}, \text{ etc.}$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dy}, \quad \beta' = \frac{d\gamma}{dy}, \quad \beta'' = \frac{d\gamma''}{2\,dy}, \text{ etc.}$$

und die integrirte Gleichung ist

$$\lambda = V + \omega + \gamma z + \tfrac{1}{2}\gamma' z^2 + \text{etc.}$$

und man hat nur den vorhergehenden Bedingungsgleichungen durch die unbestimmten Funktionen ω, r', p', p'', etc., q', q'', etc. genug zu thun.

Der Calkul würde noch leichter werden, wenn die beiden veränderlichen Größen y und z zugleich sehr klein in Ansehung der x wären; denn man könnte alsdann nur setzen

$$p = p' + p''y + p'''z + p''''y^2 + p'''''yz + \text{etc.}$$

$$q = q' + q''y + q'''z + q''''y^2 + q'''''yz + \text{etc.}$$

$$r = r' + r''y + r'''z + r''''y^2 + r'''''yz + \text{etc.}$$

wo die Größen p', p'', etc., q', q'', etc., r', r'' nur Funktionen von x bedeuten. Verrichtet man diese Substitutionen in der Gleichung (G und setzt die Glieder, darin y, z und ihre Produkte vorkommen, jedes insbesondere $= 0$; so erhält man

$$\frac{dp'}{dx} + q'' + r''' = 0,$$

$$\frac{dp''}{dx} + 2q'''' + r''''' = 0,$$

etc.

Her-

Digitized by Google

Hernach erhält die Gleichung (L) diese Form:

$$d\lambda - dV = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz +$$
$$y(\alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz) +$$
$$z(\alpha'' dx + \beta'' dy + \gamma'' dz) +$$
etc.

wenn man setzt

$$\alpha = \frac{dp'}{dt} + p'\frac{dp'}{dx} + q'p'' + r'p''',$$

$$\beta = \frac{dq'}{dt} + p'\frac{dq'}{dx} + q'q'' + r'q''',$$

$$\gamma = \frac{dr'}{dt} + p'\frac{dr'}{dx} + q'r'' + r'r''',$$

$$\alpha' = \frac{dp''}{dt} + p'\frac{dp''}{dx} + p''\frac{dp'}{dx} + 2q'p'''' + q''p'' +$$
$$r'p''''' + r''p''',$$

etc.

und man hätte hier für die Integrabilität dieser Gleichung die Bedingungen

$$\alpha' = \frac{d\beta}{dx}, \quad \alpha'' = \frac{d\gamma}{dx}, \text{ etc.}$$

durch die man erhält

$$\lambda = V + \int \alpha dx + \beta y + \gamma z + \text{etc.}$$

Endlich kann man auch oft den Calkul durch Substitutionen vereinfachen, indem man statt der Coordinaten x, y, z andere veränderliche Größen

Digitized by Google

ξ, η, ζ einführt, welche gegebene Funktionen von jenen seyen, und wenn vermöge der Natur der Aufgabe, die veränderliche Größe ζ z. B. oder die beiden veränderlichen Größen η und ζ sehr klein in Ansehung der ξ sind; so kann man sich Reduktionen bedienen, die den eben vorgetragenen analog sind.

§. II.

Von der Bewegung schwerer und homogener flüssigen Massen in Gefäßen oder Röhren von einer gewissen Figur.

23) Um den Nutzen der Principien und Formeln zu zeigen, die wir eben gegeben haben, wollen wir sie auf die flüssigen Massen anwenden, die sich in Gefäßen oder Röhren von einer gegeben Figur bewegen. Wir wollen annehmen, der flüssige Körper sey homogen und schwer, und befinde sich vorher in Ruhe, oder er sey durch den Stoß eines an der Oberfläche angebrachten Stempels in Bewegung gesetzt worden; alsdann müssen die Geschwindigkeiten p, q, r jedes Theilchens so beschaffen seyn, daß die Größe $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ integrabel sey (18); folglich kann man da die Formeln (20) anwenden.

Es sey daher φ eine Funktion von x, y, z und t und durch die Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

bestimmt; alsdann hat man sogleich für die Geschwindigkeiten jedes Theilchens nach den Direktionen der Coordinaten x, y, z diese Ausdrückungen

$$p = \frac{d\varphi}{dx},$$

$$q = \frac{d\varphi}{dy},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dz}.$$

und

Digitized by Google

und hierauf

$$\lambda = V + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2,$$

welche Größe = 0 bey der äussern freien Oberfläche des Fluidums seyn muß (2).

Was nun den Werth von V anlangt, der von den beschleunigenden Kräften des Fluidums abhängt (15), und wenn man ξ, η, ζ die Winkel nennt, die die Achsen der Coordinaten x, y, z mit der Vertikallinie machen, die vom Schneidepunkt dieser Achsen gezogen sind, und ihre Richtung von oben nach unten zu haben; so erhält man:

$$X = -g \operatorname{Cof} \xi,$$
$$Y = -g \operatorname{Cof} \eta,$$
$$Z = -g \operatorname{Cof} \zeta;$$

das Zeichen — gebe ich den Werthen der Kräfte X, Y, Z, indem diese Kräfte die Coordinaten x, y, z zu verringern streben sollen. Weil nun

$$dV = Xdx + Ydy + Zdz;$$

so erhält man durch die Integration

$$V = -gx \operatorname{Cof} \xi - gy \operatorname{Cof} \eta - gz \operatorname{Cof} \zeta.$$

24) Es sey jetzt $z = \alpha$ oder $z - \alpha = 0$ die Gleichung für eine der Wände des Canals, wo α eine gegebene Funktion von x, y ohne z oder t ist. Damit alsdann dieselben Theilchen des Fluidums allezeit diese Wand berühren: hat man nur die Gleichung (1) (12) auszufüllen, indem man $A = z - \alpha$ setzt.

Alsdann hat man

$$\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d\alpha}{dy} = 0,$$

wel-

Digitized by Google

welcher Gleichung der Werth $z = \alpha$ genugthun muß. Jede Wand giebt eine ähnliche Gleichung. Weil ebenfals $\lambda = 0$ die Gleichung der äussern Fläche des Fluidums ist, damit dieselben Theilchen beständig in dieser Oberfläche sich befinden; so hat man die Gleichung

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d\lambda}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{d\lambda}{dz} = 0,$$

welche statt haben muß, und folglich einerlei Werth von z mit der Gleichung $\lambda = 0$ geben muß. Diese Gleichung aber ist nicht mehr nothwendig, sobald die angeführte Bedingung nicht mehr statt hat.

25) Dies vorausgesetzt fange man damit an die Funktion φ zu bestimmen. Da aber die Gleichung, wovon sie abhängt, durch keine bekannte Methode allgemein integrabel ist; so wollen wir annehmen, eine der Dimensionen der flüssigen Masse sey sehr klein in Ansehung der beiden andern, so daß die Coordinaten z z. B. sehr gering in Ansehung der x und y seyen. Nach dieser Voraussetzung kann man den Werth von φ durch eine Reihe von folgender Form ausdrücken

$$\varphi = \varphi' + z\varphi'' + z^2\varphi''' + z^3\varphi'''' + \text{etc.},$$

wo φ', φ'', φ''', etc. Funktionen von x, y, t ohne z sind.

Verrichtet man nun diese Substitutionen in der vorhergehenden Gleichung; so wird sie

$$\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2} + 2\varphi''' +$$

$$z\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2} + \frac{d^2\varphi''}{dy^2} + 2.3\,\varphi''''\right) +$$

$$z^2\left(\frac{d^2\varphi'''}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'''}{dy^2} + 3.4\,\varphi'''''\right) +$$

$$\text{etc.} = 0.$$

Setzt

Digitized by Google

Setzt man daher die Glieder, worin verschiedene Potenzen von z vorkommen = 0; so erhält man

$$\varphi''' = -\frac{d^2\varphi'}{2\,dx^2} - \frac{d^2\varphi'}{2\,dy^2},$$

$$\varphi'''' = -\frac{d^2\varphi''}{2.3\,dx^2} - \frac{d^2\varphi''}{2.3\,dy^2},$$

$$\varphi''''' = -\frac{d^2\varphi''''}{3.4\,dx^2} - \frac{d^2\varphi'''}{3.4\,dy^2},$$

$$= \frac{d^4\varphi'}{2.3.4\,dx^4} + \frac{d^4\varphi'}{3.4\,dx^2dy^2} + \frac{d^4\varphi'}{2.3.4\,dy^4},$$

etc.

Der Ausdruck von φ wird daher

$$\varphi = \varphi' + z\varphi'' - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right)$$

$$- \frac{z^3}{2.3}\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2} + \frac{d^2\varphi''}{dy^2}\right)$$

$$+ \frac{z^4}{2.3.4}\left(\frac{d^4\varphi'}{dx^4} + \frac{2\,d^4\varphi'}{dx^2dy^2} + \frac{d^4\varphi'}{dy^4}\right) + \text{etc.}$$

wo die Funktionen φ', φ'' unbestimmt sind, woraus man ersieht, daß dieser Ausdruck das vollkommene Integral der vorgegebenen Formel ist.

Da man den Ausdruck von φ gefunden hat; so erhält man durch die Differentiation p, q, r auf folgende Art.

Digitized by Google

$$p = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi'}{dx} + z\frac{d\varphi''}{dx} - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3} + \frac{d^3\varphi'}{dx\,dy^2}\right) -$$
$$\frac{z^3}{2.3}\left(\frac{d^3\varphi''}{dx^3} + \frac{d^3\varphi''}{dx\,dy^2}\right) + \text{etc.},$$

$$q = \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi'}{dy} + z\frac{d\varphi''}{dy} - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^2\,dy} + \frac{d^3\varphi'}{dy^3}\right) -$$
$$\frac{z^3}{2.3}\left(\frac{d^3\varphi''}{dx^2\,dy} + \frac{d^3\varphi''}{dy^3}\right) + \text{etc.},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dz} = \varphi'' - z\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right) -$$
$$\frac{z^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2} + \frac{d^2\varphi''}{dy^2}\right) +$$
$$\frac{z^3}{2.3}\left(\frac{d^4\varphi'}{dx^4} + \frac{2\,d^4\varphi'}{dx^2\,dy^2} + \frac{d^4\varphi'}{dy^4}\right) + \text{etc.}$$

Und substituirt man diese Werthe in dem Ausdrucke von λ (23); so erhält er folgende Form:

$$\lambda = \lambda' + z\lambda'' + z^2\lambda''' + z^3\lambda'''' + \text{etc.}$$

worin

$$\lambda' = -g\,(x\,\text{Cof}\,\xi + y\,\text{Cof}\,\eta) + \frac{d\varphi'}{dt} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 +$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dy}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\varphi''^2,$$

$$\lambda'' = -g\,\text{Cof}\,\zeta + \frac{d\varphi''}{dt} + \frac{d\varphi'}{dx}\cdot\frac{d\varphi''}{dx} + \frac{d\varphi'}{dy}\cdot\frac{d\varphi''}{dy}$$
$$-\varphi''\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right),$$

λ'''

Digitized by Google

$$\lambda''' = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{d^3\varphi'}{dt\,dx^2} + \frac{d^3\varphi'}{dt\,dy^2}\right] + \tfrac{1}{2}\left[\frac{d\varphi''}{dx}\right]^2$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{d\varphi'}{dx}\cdot\left[\frac{d^3\varphi'}{dx^3} + \frac{d^3\varphi'}{dx\,dy^2}\right] + \tfrac{1}{2}\left[\frac{d\varphi''}{dy}\right]$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{d\varphi'}{dy}\cdot\left[\frac{d^4\varphi'}{dx^2\,dy} + \frac{d^3\varphi'}{dy^3}\right] + \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right]^2$$
$$-\tfrac{1}{2}\varphi''\left[\frac{d^2\varphi''}{dx^2} + \frac{d^2\varphi''}{dy^2}\right] + \text{etc.}$$

u. s. f.

26) Ist also $z = \alpha$ die Gleichung der Wände, wo α eine sehr kleine Funktion von x und y ohne z ist; so wird die Bedingsgleichung, damit dieselben Theilchen immer diese Wände berühren (24) durch die vorhergehenden Substitutionen:

$$\varphi'' - \frac{d\varphi'}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\varphi'}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dy} - z\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right.$$
$$\left. + \frac{d^2\varphi''}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d^2\varphi''}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\right) - \tfrac{1}{2}z^2\left[\frac{d^2\varphi''}{dx^2} + \frac{d^2\varphi''}{dy^2}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3} + \frac{d^3\varphi'}{dx\,dy^2}\right)\frac{d\alpha}{dx} - \left(\frac{d^3\varphi'}{dx^2\,dy}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{d^3\varphi'}{dy^3}\right)\frac{d\alpha}{dy}\right] + \text{etc.} = \varphi.$$

Da diese Gleichung statt haben muß, wenn man $z = \alpha$ setzt; so verwandelt sie sich in folgende einfachere:

Digitized by Google

$$\varphi'' - \frac{d.\alpha \frac{d\varphi'}{dx}}{dx} - \frac{d.\alpha \frac{d\varphi'}{dy}}{dy}$$

$$- \frac{d.\alpha^2 \frac{d\varphi''}{2dx}}{2dx} - \frac{d.\alpha^2 \frac{d\varphi''}{2dy}}{2dy}$$

$$+ \frac{d.\alpha^3 \left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3} + \frac{d^3\varphi'}{dx\,dy^2} \right)}{2.3\,dx}$$

$$+ \frac{d.\alpha^3 \left(\frac{d^3\varphi'}{dx^2\,dy} + \frac{d^3\varphi'}{dy^3} \right)}{2.3\,dy}$$

$$+ \text{etc.} = 0,$$

und diese Gleichung muß für den ganzen Umfang der gegebenen Wände wahr seyn.

27) Endlich wird die Gleichung für die innere Fläche des Fluidums, da $\lambda = 0$ ist, von dieser Form seyn:

$$\lambda' + z\lambda'' + z^2\lambda''' + z^3\lambda'''' + \text{etc.} = 0;$$

und die Bedingungsgleichung dafür, daß dieselben Theilchen auf der Oberfläche bleiben (24) wird seyn:

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d\varphi'}{dx} \cdot \frac{d\lambda'}{dx} + \frac{d\varphi'}{dy} \cdot \frac{d\lambda'}{dy} + \varphi''\lambda''$$

$$+ z \left[\frac{d\lambda''}{dt} + \frac{d\varphi''}{dx} \cdot \frac{d\lambda'}{dx} + \frac{d\varphi'}{dx} \cdot \frac{d\lambda''}{dx} + \right.$$

$$\left. \frac{d\varphi''}{dy} \cdot \frac{d\lambda'}{dy} + \frac{d\varphi'}{dy} \cdot \frac{d\lambda''}{dy} + 2\varphi''\lambda'' \right.$$

Digitized by Google

$$- \left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2} \right) \lambda'' \Big] + z^2 \Big[\frac{d\lambda'''}{dt} + \frac{d\varphi''}{dx} \cdot \frac{d\lambda''}{dx}$$

$$+ \frac{d\varphi'}{dx} \cdot \frac{d\lambda'''}{dx} + \frac{d\varphi''}{dy} \cdot \frac{d\lambda}{dy} + \frac{d\varphi'}{dy} \cdot \frac{d\lambda'''}{dy} -$$

$$\tfrac{1}{2} \left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3} + \frac{d^3\varphi'}{dx\,dy^2} \right) \cdot \frac{d\lambda'}{dx} -$$

$$\tfrac{1}{2} \left(\frac{d^3\varphi'}{dx^2\,dy} + \frac{d^3\varphi'}{dy^3} \right) \cdot \frac{d\lambda'}{dy} -$$

$$2 \left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2} \right) \lambda''' +$$

$$3\,\varphi''\lambda'''' - \tfrac{1}{2} \left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2} + \frac{d^2\varphi''}{dy^2} \right) \lambda'' \Big] +$$

etc. $= 0$.

Bringt man z aus dieſen beiden Gleichungen hinweg; ſo erhält man eine an und für ſich beſtehende Gleichung für alle Punkte der äuſſern Oberfläche.

Anwendung dieſer Formeln auf die Bewegung einer flüſſigen Maſſe, die in einem geraden und beinah vertikalen Gefäße läuft.

28) Wir wollen jetzt annehmen, der flüſſige Körper laufe in einem geraden beinah vertikalen Gefäße, und wir wollen um mehrerer Einfachheit willen ſetzen, die Abſciſſen x ſeyen vertikal und von oben bis unten getheilt; alsdann erhält man (23)

$$\xi = 0, \quad \eta = 90^\circ, \quad \zeta = 90^\circ$$

und $\mathrm{Cof}\,\xi = 1$, $\mathrm{Cof}\,\eta = 0$, $\mathrm{Cof}\,\zeta = 0$.

Digitized by Google

Wir wollen ferner, um die Aufgabe soviel als möglich zu vereinfachen annehmen, daß das Gefäß eben sey, so daß von den beiden Ordinaten y und z, die erstern $y = o$, die andern z aber sehr gering seyen. Endlich sey $z = \alpha$ und $z = \beta$ die Gleichung der beiden Wände des Gefäßes, indem α und β bekannte und sehr geringe Funktionen von x seyen.

Alsdann hat man in Ansehung dieser Wände die beiden Gleichungen (26)

$$\varphi'' - \frac{d.\alpha \frac{d\varphi'}{dx}}{dx} - \frac{d.\alpha^2 \frac{d\varphi''}{dx}}{2dx} + \text{etc.} = o,$$

$$\varphi'' - \frac{d.\beta \frac{d\varphi'}{dx}}{dx} - \frac{d.\beta^2 \frac{d\varphi''}{dx}}{2dx} + \text{etc.} = o,$$

welche dazu dienen werden die Funktionen φ' und φ'' zu bestimmen.

Wir wollen die Größen z, α, β als sehr klein von der ersten Ordnung ansehn, und wenigstens bey der erstern Näherung die Größen von der 2ten und den folgenden Ordnungen vernachlässigen.

Die 2 vorhergehenden Gleichungen lassen sich daher auf diese bringen:

$$\varphi'' - \frac{d.\alpha \frac{d\varphi'}{dx}}{dx} = o,$$

$$\varphi'' - \frac{d.\beta \frac{d\varphi'}{dx}}{dx} = o,$$

welche von einander abgezogen, geben

d.

Digitized by Google

$$\frac{d.\,(\alpha - \beta)\,\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} = 0,$$

davon das Integral ist

$$\frac{(\alpha - \beta)\,\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} = \delta,$$

wo δ eine willkührliche Funktion von t ist, welche eine sehr kleine Größe von der ersten Ordnung seyn muß.

Es ist aber offenbar, daß $\alpha - \beta$ die horizontale Breite des Gefäßes ist, die wir durch γ ausdrücken. Man hat daher

$$\frac{d\varphi'}{dx} = \frac{\delta}{\gamma},$$

und wenn man von neuen in Ansehung x integrirt

$$\varphi' = \delta \int \frac{dx}{\gamma} + \vartheta,$$

wenn ϑ eine neue willkührliche Funktion von t ist.

Addirt man eben diese Gleichungen zu einander und setzt

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \mu;$$ so zieht man daraus

$$\varphi'' = \frac{d.\,\mu\,\frac{d\varphi'}{dx}}{dx}$$

oder wenn man den Werth von $\frac{d\varphi'}{dx}$ substituirt

φ''

Digitized by Google

$$\varphi'' = \vartheta \frac{d.\frac{\pi}{\gamma}}{dx},$$

woraus man sieht, daß, weil γ, μ, ϑ sehr kleine Größen von der ersten Ordnung sind, φ'' auch eine sehr kleine Größe von derselben Ordnung seyn wird.

Läßt man nun allezeit die Größen von der 2ten Ordnung weg; so erhält man durch die Formeln (25) für die vertikale Geschwindigkeit:

$$p = \frac{d\varphi'}{dx} = \frac{\vartheta}{\gamma},$$

und für die horizontale Geschwindigkeit:

$$y = \varphi'' - z\frac{d^2\varphi'}{dx^2}, =$$

$$\vartheta \frac{\left(d.\frac{\mu}{\gamma} \quad d.\frac{1}{\gamma}\right)}{dx} - z\frac{d.\frac{1}{\gamma}}{dx} =$$

$$\frac{\vartheta}{\gamma}\left(\frac{d\mu}{dx} + (z-\mu)\frac{d\gamma}{\gamma dx}\right).$$

Endlich da $\cos\xi = 0$; so wird die Größe λ'' ebenfals ein sehr kleines von der ersten Ordnung seyn. Folglich wird der Werth von λ auf

$$\lambda' = -gx + \frac{d\vartheta}{dt}\int\frac{dx}{\gamma} + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\vartheta^2}{2\gamma^2}$$

gebracht.

Dieser Werth $= o$ gesetzt, giebt die Figur der Oberfläche des flüssigen Körpers; und da er die Ordinate z nicht enthält; sondern allein die

Digitized by Google

die Abscisse x und die Zeit t; so folgt, daß die Oberfläche des flüssigen Körpers jeden Augenblick eben und horizontal seyn muß.

Endlich wird die Bedingungsgleichung, daß allezeit die nämlichen Theilchen sich auf der Oberfläche befinden, aus gleichem Grunde durch folgende ausgedrückt:

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d\varphi'}{dx} \cdot \frac{d\lambda'}{dx} \quad (27) =$$

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\vartheta}{\gamma} \cdot \frac{d\lambda}{dx} = 0.$$

29) Um die Größen, die sich auf die obere Oberfläche des Fluidums beziehn, von denen zu unterscheiden, die zur untern Oberfläche gehören; so wollen wir mit einem Strich die erstern und durch 2 Striche die andern bezeichnen. So werden also x', y', etc. die Abscisse, die Breite des Gefäßes u. s. w. für die obere Oberfläche seyn; x'', y'' aber eben diese Abscisse, die Breite des Gefäßes u. s. w. für die untere Oberfläche seyn. Es werden also auch λ', λ'' in der Folge die Werthe von λ für die beiden Oberflächen bezeichnen, so daß man für die obere Oberfläche die Gleichung hat:

$$\lambda' = -gx' + \frac{d\vartheta}{dt} \int \frac{dx'}{\gamma'} + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\vartheta^2}{2\gamma'} = 0,$$

und für die untere die ähnliche Gleichung

$$\lambda'' = -gx'' + \frac{d\vartheta}{dt} \int \frac{dx''}{\gamma''} + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\vartheta^2}{2\gamma''} = 0.$$

Endlich wird

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{\vartheta}{\gamma'} \cdot \frac{d\lambda'}{dx'} = 0$$

Digitized by Google

die Bedingungsgleichung seyn, daß dieselben Theilchen, die einmal auf der obern Oberfläche sich befinden, auch allezeit darauf bleiben; und

$$\frac{d\lambda''}{dt} + \frac{\delta}{\gamma''} \cdot \frac{d\lambda''}{dx''} = 0$$

wird die Bedingungsgleichung seyn, daß die untere Oberfläche allezeit dieselben Theilchen des Fluidums enthalten.

Dies vorausgesetzt hat man 4 Fälle nach der Art, wie ein flüssiger Körper in einem Gefäße laufen kann, zu unterscheiden, und jeder dieser Fälle heischt eine besondere Auflösung.

30) Der erste Fall ist der, wo eine gegebene Größe des Fluidums in einem unbestimmten Gefäße läuft. In diesem Falle ist es offenbar, daß beide Oberflächen jederzeit die nämlichen Theilchen enthalten müssen, und daß man auf diese Art für diese beiden Oberflächen die Gleichungen hat

$$\lambda' = 0, \quad \lambda'' = 0$$

und ferner

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{\delta}{\gamma'} \cdot \frac{d\lambda'}{dx'} = 0,$$

$$\frac{d\lambda''}{dt} + \frac{\delta}{\gamma''} \cdot \frac{d\lambda''}{dx''} = 0,$$

welche 4 Gleichungen zur Bestimmung der veränderlichen Größen x', x'', δ, ϑ in t dienen werden.

Die Gleichung $\lambda' = 0$ giebt differentiirt

$$\frac{d\lambda'}{dx'} dx' + \frac{d\lambda'}{dt} dt = 0;$$

folglich

$$\frac{d\lambda'}{dt} = - \frac{d\lambda'}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dt}.$$

Sub-

Digitized by Google

Substituirt man nun diesen Werth in der Gleichung

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{\vartheta}{\gamma'} \cdot \frac{d\lambda'}{dx'} = 0,$$

und dividirt durch $\frac{d\lambda'}{dx'}$; so erhält man

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\vartheta}{\gamma'}.$$

Eben so findet man, wenn man die Gleichung $\lambda'' = 0$ mit der Gleichung

$$\frac{d\lambda''}{dt} = -\frac{d\lambda''}{dx''} \cdot \frac{dx''}{dt}$$

verbindet, folgende:

$$\frac{dx''}{dt} = \frac{\vartheta}{\gamma''}.$$

Man hat also die von einander abgesonderten Gleichungen

$$\vartheta\, dt = \gamma'\, dx' = \gamma''\, dx''$$

und folglich durch die Integration

$$\int \gamma''\, dx'' - \int \gamma'\, dx' = m,$$

wenn m eine beständige Größe ist, welche offenbar die gegebene Größe des Fluidums ausdrückt, welche in dem Gefäße fließt. Diese Gleichung giebt auf diese Art den Werth von x'' in x'.

Substituirt man jetzt in der Gleichung $\lambda' = 0$ für dt dessen Werth $\frac{\gamma'\, dx'}{\vartheta}$; so wird sie $-gx' + \frac{\vartheta\, d\vartheta}{\gamma' dx'} \int \frac{dx'}{\gamma'} + \frac{\vartheta\, d\vartheta}{\gamma' dx'} + \frac{\vartheta^2}{2\gamma'^2} = 0$;

Digitized by Google

welche, wenn man sie durch $-\gamma' dx'$ multiplicirt, giebt

$$g\gamma' x' dx' - \partial d\partial \int \frac{dx'}{\gamma'} - \partial d\vartheta - \frac{\partial^2 dx'}{2\gamma'} = 0,$$

die, wie man sieht, integrabel ist, und deren Integral seyn wird

$$g\int \gamma' x' dx' - \frac{\partial^2}{2} \int \frac{dx'}{\gamma'} - \int \partial d\vartheta = \text{Const.}$$

Auf die nämliche Art findet man, wenn man $\frac{\gamma'' dx''}{\partial}$ an die Stelle der dt in der Gleichung $\lambda'' = 0$ setzt, und durch $-\gamma'' dx''$ multiplicirt, eine neue integrable Gleichung, deren Integral seyn wird:

$$g\int \gamma'' x'' dx'' - \frac{\partial^2}{2} \int \frac{dx''}{\gamma''} - \int \partial d\vartheta = \text{Const.}$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab, um das Glied $\int \partial d\vartheta$ wegzuschaffen; so erhält man diese:

$$g\left(\int \gamma'' x'' dx'' - \int \gamma' x' dx'\right) - \frac{\partial^2}{2}\left(\int \frac{dx''}{\gamma''} - \int \frac{dx'}{\gamma'}\right) = L,$$

wo die Größen $\int \gamma'' x'' dx'' - \int \gamma' x' dx'$ und $\int \frac{dx''}{\gamma''} - \int \frac{dx'}{\gamma'}$ die Integralien von $\gamma x\, dx$ und $\frac{dx}{\gamma}$, von $x = x'$ an bis $x = x''$ genommen ausdrücken, und wo $L = \text{Const.}$

Diese Gleichung giebt also ∂ in x', weil x'' schon in x' durch die oben gefundene Gleichung bekannt ist. Hat man auf diese Art ∂ in x'; so findet man auch t in x' durch die Gleichung $dt = \frac{\gamma' dx'}{\partial}$, deren Integral ist

$t =$

Digitized by Google

$$t = \int \frac{\gamma' dx'}{\delta} + H,$$

wo H eine willkührliche beständige Größe ist.

Was nun die beiden beständigen Größen L und H betrifft; so kann man sie durch den anfänglichen Zustand des Fluidums bestimmen. Denn wenn $t = 0$; so ist der Werth von x' durch die anfängliche Lage des flüssigen Körpers im Gefäße gegeben, und nimmt man an, daß die anfänglichen Geschwindigkeiten des Fluidums $= 0$ seyen; so muß man $\delta = 0$ haben, wenn $t = 0$, damit die Ausdrückungen von p, q, r (28) $= 0$ werden.

Wäre aber der flüssige Körper Anfangs durch gewisse Stöße in Bewegung gesetzt worden; alsdenn würden die Werthe von λ' und λ'' gegeben seyn, wenn $t = 0$ ist, weil die Größe λ in Beziehung auf die Oberfläche des flüssigen Körpers den Druck ausdrückt, den derselbe hier ausübt, und der durch einen äussern Druck im Gleichgewicht gehalten werden muß (2).

Nun aber ist (29)

$$\lambda'' - \lambda' = -g(x'' - x') + \frac{d\delta}{dt}\left(\int \frac{dx''}{\gamma''} - \int \frac{dx'}{\gamma'}\right) - \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{1}{\gamma''^2} - \frac{1}{\gamma'^2}\right);$$

setzt man daher $t = 0$; so erhält man eine Gleichung, die dazu dient, den anfänglichen Werth von δ zu bestimmen.

Die Aufgabe ist also aufgelößt, und die Bewegung des Fluidums völlig bestimmt.

31) Der 2te Fall findet statt, wenn das Gefäß von einer bestimmten Länge ist, und das Fluidum durch den Boden des Gefäßes fließt.

Digitized by Google

In dieſem Falle hat man alſo wie im vorhergehenden für die obere Oberfläche die beiden Gleichungen

$$\lambda' = 0,$$

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{\vartheta}{\gamma'} \cdot \frac{d\lambda'}{dx'} = \rho;$$

für die untere aber hat man nur die Gleichung

$$\lambda'' = 0,$$

weil wegen des Ausfluſſes des Fluidums hier in jedem Augenblick neue Theilchen auf dieſe Oberfläche kommen müſſen. Aber auf einer andern Seite wird die Abſciſſe x'' für eben dieſe Oberfläche gegeben und beſtändig ſeyn, ſo daß nur 3 unbekannte Größen zu beſtimmen ſind, nämlich x', ϑ und $\mathfrak{F}$.

Die beiden erſtern Gleichungen geben ſogleich wie im vorhergehenden Falle dieſe:

$$dt = \frac{\gamma' dx'}{\vartheta} \text{ und}$$

$$g\gamma' x' dx' - \vartheta d\vartheta \int \frac{dx'}{\gamma} - \vartheta d\mathfrak{F} - \frac{\vartheta^2 dx'}{2\gamma'} = 0,$$

die Gleichung $\lambda'' = 0$ aber giebt

$$-gx'' + \frac{d\vartheta}{dt} \int \frac{dx''}{\gamma''} + \frac{d\mathfrak{F}}{dt} + \frac{\vartheta^2}{2\gamma''^2} = 0;$$

wo man zu bemerken hat, daß x'', γ'' und $\int \frac{dx''}{\gamma''}$ beſtändige Größen ſind, die wir um mehrerer Einfachheit willen durch f, b, a andeuten wollen.

Sub-

Digitized by Google

Substituirt man daher anstatt dt dessen Werth $\frac{\gamma' dx'}{\vartheta}$ und multiplicirt darauf durch $-\gamma' dx'$; so erhält man die Gleichung

$$g f \gamma' dx' - n \vartheta d\vartheta - \vartheta d\vartheta - \frac{\vartheta^2 dx'}{2h} = 0.$$

Zieht man nun von dieser die vorhergehende Gleichung ab, um die Glieder $\vartheta d\vartheta$ wegzuschaffen; so erhält man

$$g(1 - x')\gamma' dx' - \left(n - f\frac{dx'}{\gamma'}\right)\vartheta d\vartheta - \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{2\gamma}\right)\vartheta^2 dx' = 0,$$

welche Gleichung nur die beiden veränderlichen Größen x' und ϑ enthält, und durch die man also eine dieser veränderlichen Größen in Funktionen der andern bestimmen kann.

Endlich wird man t durch dieselbe veränderliche Größe ausgedrückt erhalten, indem man die Gleichung

$$dt = \frac{\gamma' dx'}{\vartheta}$$

integrirt. Und man wird die beständigen Größen durch den anfänglichen Zustand des Fluidums wie im vorhergehenden Problem bestimmen.

32) Der 3te Fall findet statt, wenn das Fluidum in einem unbestimmten Gefäße fließt, welches aber jederzeit zu einerlei Höhe durch das beständig neu hinzugegossene erhalten wird. Dieser Fall ist der vorige umgekehrt; denn man hat hier für die untere Oberfläche die beiden Gleichungen:

$$\lambda'' = 0,$$

$$\frac{d\lambda''}{dt} + \frac{\vartheta}{\gamma''} \cdot \frac{d\lambda''}{dx''} = 0;$$

und

Digitized by Google

und für die obere Oberfläche allein

$$\lambda' = 0$$

wegen der beständigen Verwechselung, die zwischen den Theilchen dieser Oberfläche vorgeht.

Man hat also nur in den Gleichungen (31) die Größen x', γ' in x'', γ'' zu verwandlen, und für f, h, n die gegebenen Werthe von $x', \gamma', f\frac{dx'}{\gamma'}$ anzunehmen.

Uebrigens setzen wir voraus, die Hinzufügung des neuen Fluidums geschehe dergestalt, daß jede Schichte sogleich die Geschwindigkeit der nächst auf sie folgenden annimmt, und daß die Verminderung an Geschwindigkeit dieser Schichte während des ersten Augenblicks mit derjenigen einerlei ist, wenn das Gefäß während dieses Augenblicks nicht zu derselben Höhe voll erhalten wäre.

33) Endlich ist der letztere Fall derjenige, wo der flüssige Körper aus einem Gefäße von einer bestimmten Länge sich ergießt, das allezeit zu einerlei Höhe voll erhalten wird.

Hier kommen immer neue Theilchen auf die obere und untere Oberfläche; man hat also nur für diese beiden Oberflächen die beiden Gleichungen

$$\lambda' = 0, \quad \lambda'' = 0;$$

aber zugleich sind auch die beiden Abscissen x' und x'' gegeben und beständig, so daß nur die beiden unbekannten Größen δ und ϑ in t zu bestimmen sind.

Es sey $x' = f$, $\gamma' = h$,

$$x'' = F, \quad \gamma'' = H,$$

$$f\frac{dx'}{\gamma'} = n, \quad f\frac{dx''}{\gamma''} = N,$$

Digitized by Google

alsdann werden die beiden Gleichungen

$$\lambda' = 0, \quad \lambda'' = 0,$$

sich in folgende verwandlen:

$$-gf + \frac{d\vartheta}{dt}n + \frac{d\mathfrak{V}}{dt} + \frac{\vartheta^2}{2h^2} = 0,$$

$$-gF + \frac{d\vartheta}{dt}N + \frac{d\mathfrak{V}}{dt} + \frac{\vartheta^2}{2H^2} = 0,$$

und schafft man hieraus $\frac{d\mathfrak{V}}{dt}$ weg; so hat man

$$g(F-f) - (N-n)\frac{d\vartheta}{dt} - \left(\frac{1}{2H^2} - \frac{1}{2h^2}\right)\vartheta^2 = 0,$$

woraus man zieht

$$dt = \frac{(N-n)\,d\vartheta}{g(F-f) - \left(\frac{1}{2H^2} - \frac{1}{2h^2}\right)\vartheta^2}$$

wo also die veränderlichen Größen von einander getrennt sind, und die durch Zirkelbogen oder Logarithmen integrabel ist.

34) Die vorhergehenden Auflösungen kommen mit denen überein, die die ersten Schriftsteller, denen wir die Theorien der Bewegung der flüssigen Körper verdanken, nach der Voraussetzung, daß die verschiedenen Schichten des Fluidums genau ihren Parallelismus beibehalten, indem sie ins Gefäß fallen, gefunden haben. (Man sehe Daniel Bernoullis Hydrodynamik, Johann Bernoullis Hydraulik und D'Alemberts Traité des fluides).

Unsre Analyse zeigt, daß diese Voraussetzung nur genau statt findet, wenn die Breite des Gefäßes unendlich klein ist, aber daß sie in allen Fällen als eine erste Approximation gebraucht werden kann, und daß die

Digitized by Google

daraus folgenden Auflösungen bis auf die Größen der 2ten Ordnung genau sind, wenn man die Breiten des Gefäßes als Größen der ersten Ordnung ansieht.

Der große Vorzug dieser Analyse aber besteht darin, daß man durch dieselben sich immer mehr und mehr der wahren Bewegung flüssiger Körper in Gefäßen von einer gewissen Figur nähern kann; denn nachdem man, wie wir eben gethan haben, die ersten Werthe der unbekannten Größes gefunden hat, indem man die 2ten Dimensionen der Breiten des Gefäßen vernachlässigt; so wird es leicht seyn, die Approximation weiter zu treiben, indem man auf die vernachlässigten Glieder Rücksicht nimmt. Die weitere Auseinandersetzung hiervon hat weiter keine Schwierigkeit, als die Weitläuftigkeit des Calkuls, und wir lassen uns gegenwärtig nicht weiter darin ein.

Anwendung eben dieser Formeln auf die Bewegung eines flüssigen Körpers, der in einer etwas tiefen und beinah horizontalen Röhre befindlich ist, und insbesondere auf die Bewegung.

35) Da wir die Höhe des flüssigen Körpers sehr gering annehmen; so muß man die Ordinaten z vertikal und von oben nach unten zu annehmen, die Abscissen x und die andern Ordinaten y werden horizontal seyn, und man hat (23)

$$\text{Cos}\,\xi = 0,\quad \text{Cos}\,\eta = 0,\quad \text{Cos}\,\zeta = 1.$$

Man nehme die Achsen von x und y in der horizontalen Ebene an, die durch die obere Oberfläche des Fluidums im Zustande des Gleichgewichts gebildet wird, und es sey $z = \alpha$ die Gleichung für den Grund der Röhre, wenn α eine gegebene Funktion von x und y ist.

Die Größen z und α sehen wir als sehr klein von der ersten Ordnung an, und wir werden die Größen der 2ten und folgenden Ordnungen d. h. diejenigen, worin die Quadrate und Produkte von z und α vorkommen, weglassen.

Die

Digitized by Google

Die Bedingungsgleichung in Ansehung des Grundes der Röhre giebt (26)

$$\varphi'' = \frac{\mathrm{d}.\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}.\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}y}}{\mathrm{d}y},$$

woraus man sieht, daß φ'' eine Größe von der ersten Ordnung ist.

Endlich verwandelt sich der Werth der Größe λ in $\lambda' + \lambda''z$ (25); und man muß im Werthe von λ' die Größen von der 2ten Ordnung, und in dem von λ'' die Größen der ersten Ordnung weglassen. Auf diese Art hat man, da

$$\mathrm{Cos}\,\xi = 0,\quad \mathrm{Cos}\,\eta = 0,\quad \mathrm{Cos}\,\zeta = 1,$$

die Formeln (25)

$$\lambda' = \frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}t} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}y}\right)^2,$$

$$\lambda'' = -g.$$

Für die obere Oberfläche des flüssigen Körpers hat man auch die Gleichung

$$\lambda' - gz = 0,$$

und die Bedingungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\lambda'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}\lambda'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}\lambda'}{\mathrm{d}y} - g\varphi'' + gz\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi'}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2\varphi'}{\mathrm{d}y^2}\right) = 0.$$

Die Gleichung $\lambda' - gz = 0$ giebt sogleich $z = \frac{\lambda'}{g}$ für die Figur der obern Oberfläche des flüssigen Körpers in jedem Augenblick, und da die

Digitized by Google

die Bedingungsgleichung auch in Ansehung eben dieser Oberfläche statt finden muß; so muß sie auch wahr seyn, wenn man darin statt z eben diesen Werth $\frac{\lambda'}{g}$ substituirt. Diese Gleichung wird daher diese Form bekommen:

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d.\lambda' \frac{d\varphi'}{dx}}{dx} + \frac{d.\lambda' \frac{d\varphi'}{dy}}{dy} - g\varphi'' = \sigma$$

und substituirt man noch für φ'' seinen oben gefundenen Werth; so hat man

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d.(\lambda' - g\alpha)\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} + \frac{d.(\lambda' - g\alpha)\frac{d\varphi'}{dy}}{dy} = \sigma,$$

wo man nur statt λ' dessen Werth

$$\frac{d\varphi'}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dy}\right)^2$$

zu substituiren hat, und man erhält eine Gleichung in partiellen Differenzialien von der 2ten Ordnung die dazu dienen wird φ' in Funktionen von x, y, t zu bestimmen.

Die Figur der obern Oberfläche wird man hernach aus der Gleichung

$$z = \frac{d\varphi'}{g\,dt} + \frac{1}{g}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 + \frac{1}{g}\left(\frac{d\varphi'}{dy}\right)^2$$

kennen lernen, und wollte man auch die horizontalen Geschwindigkeiten p, q jedes Theilchens des flüssigen Körpers wissen; so hätte man sie durch die Formeln $p = \frac{d\varphi'}{dx}$, $q = \frac{d\varphi'}{dy}$ (25).

Digitized by Google

36) Die Integralrechnung der Gleichungen in partiellen Differentialen ist noch sehr weit von der nothwendigen Vollkommenheit für die Integration so verwickelter Gleichungen, als die gegenwärtigen sind, entfernt; es bleibt also kein Mittel übrig als diese Gleichung durch einige Einschränkungen zu vereinfachen.

Wir wollen in dieser Absicht annehmen, der flüssige Körper weiche bey seiner Bewegung nur unendlich wenig von seiner horizontalen Lage ab, so daß die Ordinaten z der obern Oberfläche allezeit sehr klein seyen und daß ausserdem die horizontalen Geschwindigkeiten p und q ebenfalls unendlich klein seyen. Die Größen

$$\frac{d\varphi'}{dt}, \quad \frac{d\varphi'}{dx}, \quad \frac{d\varphi'}{dy}$$

müssen daher unendlich klein seyn, und eben so muß die Größe φ' selbst beschaffen seyn.

Läßt man daher in der vorgegebenen Gleichung die unendlich kleinen Größen von der 2ten und folgenden Ordnungen weg; so erhält sie folgende lineare Form

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2} - g\,\frac{d.\alpha\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} - g\,\frac{d.\alpha\frac{d\varphi'}{dy}}{dy} = 0,$$

und man hat

$$z = \frac{d\varphi'}{g\,dt},$$

$$p = \frac{d\varphi'}{dx},$$

$$q = \frac{d\varphi'}{dy};$$

Digitized by Google

Diese Gleichung enthält daher die allgemeine Theorie geringer Bewegungen eines wenig tiefen Fluidums, und folglich die wahre Theorie der durch successive Erhebungen und Erniedrigungen gebildeten und unendlich kleinen eines stehenden Wassers, das in einer wenig tiefen Röhre oder Bassin enthalten ist.

Die Theorie der Wellen, die Newton Propos. 46. Lib. II. gegeben hat, gründet sich auf die zu Hülfe genommene und wenig natürliche Voraussetzung, daß die vertikalen Oscillationen der Wellen denen des Wassers in einer krummen Röhre analog seyen, und muß daher als völlig unzulänglich zur Erklärung dieser Aufgabe angesehn werden.

37) Nimmt man an, die Röhre oder das Bassin habe einen horizontalen Grund; so ist die Größe α beständig, und der Tiefe des Wassers gleich, und die Gleichung für die Bewegung der Wellen wird

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2} = g\alpha\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right).$$

Diese Gleichung ist denjenigen völlig ähnlich, welche die kleinen Bewegungen der Luft bey der Bildung des Schalls bestimmt, indem man nur auf die Bewegung der dem Horizont parallelen Theilchen Rücksicht nimmt, wie man im 9ten Artikel des folgenden Abschnitts sehen wird. Die Erhebungen z über die horizontale Lage des Wassers kommen mit den Verdichtungen der Luft überein, und die Tiefe α des Wassers in dem Canal entspricht der Höhe der Atmosphäre, wenn man diese homogen annimmt. So findet also eine vollkommene Analogie zwischen den auf der Oberfläche eines ruhigen Wassers durch die abwechselnden Erhebungen und Erniedrigungen des Wassers, und den in der Luft durch die abwechselnden Verdickungen und Verdünnungen der Luft gebildeten Wellen statt. Mehrere Schriftsteller hatten diese Analogie schon angenommen, aber niemand hatte sie noch strenggenug erwiesen.

Da nun die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalls derjenigen gleich ist, die ein schwerer Körper durch seinen Fall von der Hälfte der als homogen angenommenen Atmosphäre erlangen würde; so wird die

Digitized by Google

die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der Wellen einerlei mit der seyn die ein schwerer Körper durch den Fall von einer der Hälfte der Tiefe des Wassers in dem Kanal gleichen Höhe erlangen würde. Ist diese Tiefe also von einem Fuße; so wird die Geschwindigkeit der Wellen in $1'' = 5,495$ seyn, und ist die Tiefe des Wassers mehr oder weniger groß; so verändert sich die Geschwindigkeit der Wellen in der verkehrten doppelten Verhältniß der Tiefen in dem Falle, daß sie nicht zu beträchtlich sind.

Wie übrigens die Tiefe des Wassers und die Figur des Bodens beschaffen seyn mag; so kann man allezeit die vorhergehende Theorie anwenden, wenn man annimmt, daß bey der Bildung der Wellen das Wasser bis auf eine sehr geringe Tiefe weder erschüttert noch bewegt worden ist, welche Voraussetzung an und für sich sehr leicht wegen der gegenseitigen Zähigkeit und Anhängung der Theilchen des Wassers anzunehmen ist, und die man ausserdem durch die Erfahrung selbst in Ansehung großer Meereswellen bestätigt findet. Auf diese Art wird also die Geschwindigkeit der Wellen an und für sich die Tiefe α bestimmen, worin das Wasser bey ihrer Bildung in Bewegung ist. Denn ist diese Geschwindigkeit $= n$ Fuß in $1''$; so hat man

$$\alpha = \frac{n^2}{30,196} \text{ Fuß.}$$

Im 10ten Bande der alten Memoiren der Pariser Akademie der Wissenschaften findet man Erfahrungen über die Geschwindigkeit der Wellen von La Hire, die $1\frac{1}{2}$ Fuß für diese Geschwindigkeit in $1''$ oder genauer 1, 412 Fuß in $1''$ gegeben haben. Setzt man daher $n = 1,412$; so hat man die Tiefe $\alpha = \frac{66}{1000}$ Fuß d. h. $\frac{8}{10}$ eines Zolles oder beinah 10 Linien.

Neun-

Digitized by Google

Neunter Abschnitt.

Von der Bewegung der preßbaren oder elastischen flüssigen Körper.

1) Um die allgemeine Gleichung (8 Abschn. 2) auf diese Art flüssiger Massen anzuwenden; bemerke man, daß das Glied $S\lambda\delta L$ darin verschwindet, weil die Bedingung der Unpreßbarkeit, welche dieses Glied giebt, in der gegenwärtigen Voraussetzung nicht mehr statt findet; aber auf einer andern Seite hat man auf die Würkung der Elasticität Rücksicht zu nehmen, die sich der Zusammendrückung entgegensetzt, und die das Fluidum auszubreiten strebt.

Es sey daher s die Elasticität eines gewissen Theilchens Dm des flüssigen Körpers; man erhält alsdann für dieses Theilchen das Moment $-s\delta.(Dx\,Dy\,Dz)$ zum ersten Gliede derselben Gleichung hinzuzuaddiren, indem ihre Würkung in der Vermehrung des Volumens $Dx\,Dy\,Dz$ dieses Theilchens, und folglich in der Verminderung um die Größe $-Dx\,Dy\,Dz$ besteht. Man hat also für jedes Theilchen das Integralglied $-S s\delta.(Dx\,Dy\,Dz)$ anstatt des Gliedes $S\lambda\delta L$ zu substituiren. Da nun

$$\delta L = \delta.(Dx\,Dy\,Dz);$$

so ist klar, daß die allgemeine Gleichung von derselben Form bleiben wird, wenn man nur λ in $-s$ verändert. Man gelangt daher auch durch dasselbe Verfahren zu 3 endlichen den Gleichungen (A) ähnlichen Gleichungen als:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)+\frac{Ds}{Dx}&=0\\ \Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)+\frac{Ds}{Dy}&=0\\ \Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)+\frac{Ds}{Dz}&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Eben so muß auch der Werth von $s = o$ bey der Oberfläche des Fluidums seyn, wenn das Fluidum frey ist; ist es aber in Wänden eingeschlossen, so ist der Werth von s der Resistenz gleich, die die Wände zur Erhaltung des Fluidums ausüben, welches an und für sich einleuchtend ist, indem s die elastische Kraft seiner Theilchen ausdrückt.

2) Bey den preßbaren flüssigen Körpern ist die Dichtigkeit Δ allezeit durch eine gegebene bekannte Funktion von s, x, y, z, t gegeben, die von dem Gesetze der Elasticität des Fluidums und von dem der Hitze abhängt, die nach der Voraussetzung jeden Augenblick in allen Punkten des Raums würkt. Man hat also 4 unbekannte Größen s, x, y, z in t zu bestimmen, und man hat daher noch eine 4te Gleichung nöthig, um die Aufgabe vollkommen aufzulösen. Bey den unpreßbaren flüssigen Körpern gab die Bedingung der Unveränderlichkeit des Volumens die Gleichung (B) (3) und die der Unveränderlichkeit der Dichtigkeit von einem Augenblick zum andern die Gleichung (H) (11). Bey den preßbaren flüssigen Körpern hat keine dieser beiden Bedingungen besonders statt, weil das Volumen und die Dichtigkeit sich auf einmal verändern, aber die Masse, die das Produkt aus diesen beiden Elementen ist, muß unverändert bleiben. Man hat daher $d.\,Dm = o$ oder $d.\,(\Delta Dx\,Dy\,Dz) = o$, und durch die Differentiation nach Art der Logarithmen

$$\frac{d\Delta}{\Delta}+\frac{d.\,(Dx\,Dy\,Dz)}{Dx\,Dy\,Dz}=o.$$

Substituirt man daher den Werth von $\delta.(Dx\,Dy\,Dz)$ (welcher mit dem von $\delta.(Dx\,Dy\,Dz)$ (8 Abschn. 2) einerley ist, wenn man nur d in δ verändert); so hat man die Gleichung

$$\frac{d\Delta}{\Delta} + \frac{Ddx}{Dx} + \frac{Ddy}{Dy} + \frac{Ddz}{Dz} = 0 \ldots\ldots (b)$$

welche mit der Gleichung (B) (8 Abschn. 3.) übereinkommt. Jene bezieht sich auf die Unveränderlichkeit des Volumens, diese auf die Unveränderlichkeit der Masse.

3) Betrachtet man die Coordinaten x, y, z als Funktionen der primitiven Coordinaten a, b, c und der seit dem Anfange der Bewegung verflossenen Zeit t; so erhalten die Gleichungen (a) durch ein dem (Abschn. 8. 5.) ähnliches Verfahren folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} \delta\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) + \alpha\frac{ds}{da} + \beta\frac{ds}{db} + \gamma\frac{ds}{dc} &= 0 \\ \delta\Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) + \alpha'\frac{ds}{da} + \beta'\frac{ds}{db} + \gamma'\frac{ds}{dc} &= 0 \\ \delta\Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right) + \alpha''\frac{ds}{da} + \beta''\frac{ds}{db} + \gamma''\frac{ds}{dc} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (c)$$

oder folgende einfachere

$$\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right.$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\frac{dx}{da}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\frac{dy}{da}+\right.\\
&\qquad\left.\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\frac{dz}{da}\right]+\frac{d\delta}{da}=0\\
&\Delta\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\frac{dx}{db}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\frac{dy}{db}+\right.\\
&\qquad\left.\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\frac{dz}{db}\right]+\frac{d\delta}{db}=0\\
&\Delta\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\frac{dx}{dc}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\frac{dy}{dc}+\right.\\
&\qquad\left.\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\frac{dz}{dc}\right]+\frac{d\delta}{dc}=0
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (d)$$

welche veränderte Gleichungen den veränderten (C) und (D) a. a. O. analog sind.

Die Gleichung (c) aber läßt sich durch Anwendung der Transformationen (8 Abschn. 3) leicht auf diese Form bringen

$$\frac{d\Delta}{\Delta}+\frac{d\delta}{\delta}=0,$$

wo die Differentialien $d\Delta$ und $d\delta$ sich allein auf die veränderliche Größe t beziehn. Integrirt man also; so erhält man $\Delta\delta = \text{funct.}(a, b, c)$.

Nun haben wir aber a. a. O. gesehn, daß wenn $t = 0$ ist, $\delta = 1$ wird. Ist also H alsdann der Werth von Δ; so hat man $H = \text{funct.}(a, b, c)$ und die Gleichung wird

$$\Delta\delta = H \text{ oder } \delta = \frac{H}{\Delta}$$

d. h. wenn man für δ seinen Werth substituirt

$$\frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{dc} -$$

$$\frac{dx}{db}\cdot\frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{dc} +$$

$$\frac{dx}{db}\cdot\frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{da} -$$

$$\frac{dx}{dc}\cdot\frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{da} +$$

$$\frac{dx}{dc}\cdot\frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{db} -$$

$$\frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{db} = \frac{H}{\Delta} \quad \ldots\ldots (a)$$

welche auf diese Art veränderte Gleichung mit der (E) a. a. O. übereinkommt.

Endlich muß man auch bey diesen Gleichungen das anwenden, was ich (8 Abschn. 8.) in Ansehung der Oberfläche des Fluidums gesagt habe.

4) Will man aber, was weit einfacher ist, Gleichungen zwischen den Geschwindigkeiten p, q, r der Theilchen nach den Richtungen der Coordinaten x, y, z haben, indem man diese Geschwindigkeiten sowie die Größen Δ und s als Funktionen von x, y, z, t ansieht, so hat man die Transformationen (8 Abschn. 10.) anzuwenden, und die Gleichungen (a) geben sogleich diese veränderten denen (F) a. a. O. analog.

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\left(\frac{dp}{dt}+p\frac{dp}{dx}+q\frac{dp}{dy}+r\frac{dp}{dz}+X\right)+\frac{d\Delta}{dx}=0\\
&\Delta\left(\frac{dq}{dt}+p\frac{dq}{dx}+q\frac{dq}{dy}+r\frac{dq}{dz}+Y\right)+\frac{d\Delta}{dy}=0\\
&\Delta\left(\frac{dr}{dt}+p\frac{dr}{dx}+q\frac{dr}{dy}+r\frac{dr}{dz}+Z\right)+\frac{d\Delta}{dz}=0
\end{aligned}\right\}\ldots(f).$$

In der Gleichung (b) muß man auſſer der Subſtitution von pdt, qdt, rdt anſtatt dx, dy, dz und der Verwandlung des D in d, noch für $d\Delta$ deſſen vollſtändigen Werth

$$\left[\frac{d\Delta}{dt}+\frac{d\Delta}{dx}p+\frac{d\Delta}{dy}q+\frac{d\Delta}{dz}r\right]dt$$

ſetzen, und durch die Diviſion durch dt erhält man dieſe veränderte Gleichung:

$$\frac{d\Delta}{\Delta dt}+\frac{d\Delta}{\Delta dx}p+\frac{d\Delta}{\Delta dy}q+\frac{d\Delta}{\Delta dz}r+\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}=0$$

welche durch die Multiplication mit Δ auf dieſe einfachere Form gebracht wird:

$$\frac{d\Delta}{dt}+\frac{d.(\Delta p)}{dx}+\frac{d.(\Delta q)}{dy}+\frac{d.(\Delta r)}{dz}=0\ldots(g).$$

Die Bedingung wegen der Bewegung der Theilchen auf der Oberfläche kann durch die Gleichung (I) (8. Abſchn. 12.) ausgedrückt werden nämlich

$$\frac{d\Lambda}{dt}+p\frac{d\Lambda}{dx}+q\frac{d\Lambda}{dy}+r\frac{d\Lambda}{dz}=0\ldots(i)$$

Digitized by Google

sey die Gleichung der Oberfläche, wenn man $A = 0$ setzt.

5) Man kann der Gleichung (g) leicht genug thun, wenn man

$$\Delta p = \frac{d\alpha}{dt},$$

$$\Delta q = \frac{d\beta}{dt},$$

$$\Delta r = \frac{d\gamma}{dt}$$

setzt, wo α, β, γ unbekannte Funktionen von x, y, z, t sind. Durch diese Substitutionen wird die genannte Gleichung

$$\frac{d\Delta}{dt} + \frac{d^2\alpha}{dt\,dx} + \frac{d^2\beta}{dt\,dy} + \frac{d^2\gamma}{dt\,dz} = 0,$$

welche in Ansehung t integrabel ist. Das Integral ist nämlich

$$\Delta = F - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\gamma}{dz},$$

wo F eine willkührliche Funktion von x, y, z ohne t ist, die von der anfänglichen Dichtigkeit des Fluidums abhängig ist.

Man hat also

$$p = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{F - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\gamma}{dz}},$$

$$q = \frac{\frac{d\beta}{dt}}{F - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\gamma}{dz}}$$

$x =$

Digitized by Google

$$r = \frac{\frac{d\gamma}{dt}}{F - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\gamma}{dz}}$$

Substituirt man daher diese Werthe in den Gleichungen (f) und setzt ferner für s dessen Werth in Funktionen von Δ, x, y, z, t (2); so erhält man 3 Gleichungen in partiellen Differentialien zwischen den unbekannten Größen α, β, γ und den 4 veränderlichen Größen x, y, z, t und die Auflösung der Aufgabe hängt allein von der Integration dieser Gleichungen ab. Diese Integration aber überschreitet die Kräfte der bekannten Analyse.

6) Nimmt man keine Rücksicht auf die Hitze und andere Umstände, die in Ansehung der Elasticität unabhängig von der Dichtigkeit eine Veränderung hervorbringen können; so ist der Werth der Elasticität s durch eine Funktion der Dichtigkeit Δ gegeben. $\frac{ds}{\Delta}$ ist also eine Differentialgröße worin nur eine veränderliche Größe vorkommt, und folglich integrabel. Wir wollen dieses Integral = E setzen.

Es sey ferner die Größe $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollkommenes Differential, dessen Integral V sey, wie (8 Abschn. 15.)

Multiplicirt man nun die Gleichungen (f) (4) respektiv durch dx, dy, dz und addirt sie zu einander; so erhält man, wenn man durch Δ dividirt eine Gleichung von der Form:

$$-dE - dV = \left[\frac{dp}{dt} + p\frac{dp}{dx} + q\frac{dp}{dy} + r\frac{dp}{dz}\right]dx$$

$$(n) + \left[\frac{dq}{dt} + p\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} + r\frac{dq}{dz}\right]dy$$

$$+$$

Digitized by Google

$$+\left(\frac{dr}{dt}+p\frac{dr}{dx}+q\frac{dr}{dy}+r\frac{dr}{dz}\right)dz$$

. . . . . (1);

da hier das erste Glied integrabel ist; so muß es das 2te ebenfalls seyn. Man hat also von neuem den Fall der Gleichung (L) (8 Abschn. 15.) und man gelangt folglich zu ähnlichen Resultaten.

7) Ist also die Größe $pdx + qdy + rdz$ in irgend einem Augenblicke ein vollkommenes Differential, welches im Anfang der Bewegung jederzeit der Fall ist, wenn das Fluidum den Zustand der Ruhe verläßt, oder durch einen an der Oberfläche angebrachten Stoß in Bewegung gesetzt wird; so muß dieselbe Größe allezeit ein vollkommenes Differential seyn (8 Abschn. 17. 18).

Bey dieser Hypothese setze man wie (Abschn. 8. 20) $pdx + qdy + rdz = d\varphi$; welches giebt

$$p = \frac{d\varphi}{dx},$$

$$q = \frac{d\varphi}{dy},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dz},$$

und die Gleichung (1) giebt, nach diesen Substitutionen integrirt

$$E = \int - y - \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \quad \text{(m)}$$

welcher Werth auch zugleich den 3 Gleichungen (f) (4) genugthun wird.

Da

Da nun $E = \int \frac{d\varepsilon}{\Delta}$ und folglich eine Funktion von Δ ist, indem ε eine bekannte Funktion von Δ ist; so erhält man, wenn man den aus der vorhergehenden Gleichung gezogenen Werth von Δ, sowie die von p, q, r in der Gleichung (g) (4) substituirt, eine Gleichung in partiellen Differentialien von φ, welche, da sie diese unbekannte Größe allein enthält, zu ihrer Bestimmung hinreicht. Die ganze Schwürigkeit wird also auf diese einzige Integration gebracht.

8) Bey den bekannten elastischen Flüssigkeiten ist die Elasticität allezeit der Dichtigkeit proportional, so daß man für diese flüssige Körper $\varepsilon = i\Delta$ hat, wenn i einen beständigen Coefficienten bedeutet, den man, wenn man den Werth der Elasticität für eine gegebene Dichtigkeit kennt, bestimmen kann.

So ist für die Luft die Elasticität dem Gewichte einer Säule Queckſilber in dem Barometer gleich. Nennt man daher H die Höhe des Barometers für eine gewisse Dichtigkeit der Luft, die man zur Einheit annimmt, n die Dichtigkeit des Queckſilbers d. h. das Verhältniß in Zahlen der Dichtigkeit des Queckſilbers zu der der Luft, welches mit dem der specifischen Schweren einerlei ist, und g die beschleunigende Kraft der Schwere; so hat man, wenn $\Delta = 1$ ist, $\varepsilon = gnH$; folglich $i = gnH$; wo man zu bemerken hat, daß nH die Höhe der als homogen angenommenen Atmosphäre ist. Bezeichnet man daher diese Höhe durch h; so hat man einfacher $i = gh$ und folglich $\varepsilon = gh\Delta$. Weil also $E = \int \frac{d\varepsilon}{\Delta}$; so hat man $E = ghl.\Delta$. Die Gleichung (g) (4) kann aber folgende Form erhalten

$$\frac{d.l\Delta}{dt} + \frac{d.l\Delta}{dx}p + \frac{dl\Delta}{dy}q + \frac{dl\Delta}{dz}r + \ldots$$
$$\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0.$$

Substituirt man daher $\frac{E}{gh}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ anstatt $l\Delta$, p, q, r..... und multiplicirt durch gh; so wird sie

Digitized by Google

$$gh\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)+$$

$$\frac{dE}{dt}+\frac{dE}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dx}+$$

$$\frac{dE}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dy}+$$

$$\frac{dE}{dz}\cdot\frac{d\varphi}{dz}=0.$$

Man hat daher nur für E dessen oben gefundenen Werth zu substituiren, und man erhält

$$gh\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)-\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$-\frac{dV}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dx}-\frac{dV}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dy}-\frac{dV}{dz}\cdot\frac{d\varphi}{dz}$$

$$-2\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dt}-2\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy\,dt}-2\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dz\,dt}$$

$$-\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}-\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

$$-2\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}-$$

$$2\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}-$$

$$2\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}=0\ldots.\ (n),$$

welche

Digitized by Google

welche allein die Theorie der Bewegung der elastischen flüssigen Massen in dieser Hypothese enthält.

9) Ist die Bewegung des Fluidums sehr gering, und nimmt man nur auf die sehr kleinen Größen von der ersten Ordnung Rücksicht; so haben wir (8 Abschn. 21.) gesehn, daß die Größe $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ ebenfalls nothwendig ein vollkommenes Differential ist. In diesem Falle finden also die vorhergehenden Formeln allezeit statt, wie auch die Bewegung des Fluidums beschaffen seyn mag, wenn sie nur sehr klein und folglich die Funktion φ ebenfalls sehr klein ist.

Bey der Bewegung des Schalls nimmt man an, die Bewegung der Theilchen der Luft sey sehr gering; man erhält daher für diese Theorie, indem man in der Gleichung (n) die Größe φ als sehr klein ansieht, und die Glieder wegläßt, worin sie über die 1te Dimension steigt, die allgemeine Gleichung:

$$gh\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) - \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{dV}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dV}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dV}{dz}\cdot\frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Läßt man nun die zweiten Dimensionen von φ im Werthe von E (7) weg; so hat man nur

$$E = -V - \frac{d\varphi}{dt} = ghl.\Delta \quad (8).$$

Man kann die Funktion φ als $= 0$ im Zustande der Ruhe und des Gleichgewichts annehmen. Man hat daher auch in diesem Zustande $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ und folglich $ghl.\Delta = -V$; und

$$\Delta = e^{\frac{-V}{gh}}$$

Digitized by Google

Ist die Luft in Vibration; so sey ihre natürliche Dichtigkeit in der Verhältniß 1 + s: 1 vermehrt, wo s eine sehr kleine Größe ist; man hat daher allgemein

$$\Delta = e^{\frac{-V}{gh}} (1 + s)$$

und folglich wenn man die Quadrate von s wegläßt

$$l\Delta = -\frac{V}{gh} - s \text{ und}$$

$$s = \frac{d\varphi}{gh\,dt}.$$

In Ansehung des Werths von V aber, der von den beschleunigenden Kräften abhängt, indem man das Fluidum als schwer, und um mehrerer Einfachheit willen die Ordinaten z als vertikal, und von oben nach unten gerichtet annimmt, erhält man durch die Formel (8 Abschn. 23.) $V = -gz$, wo g die beschleunigende Kraft der Schwere ist.

Die Gleichung für die Theorie des Schalls wird also seyn:

$$gh\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) +$$

$$g\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Hat man durch diese Gleichung φ bestimmt; so hat man die Geschwindigkeiten p, q, r der Luft sowie ihre Verdichtung s durch die Formeln

$$p = \frac{d\varphi}{dx};\ q = \frac{d\varphi}{dy},\ r = \frac{d\varphi}{dz},\ s = \frac{d\varphi}{gh\,dt},$$

10)

Digitized by Google

10) Sieht man nur auf die horizontale Bewegung der Luft; so nimmt man an, die Funktion φ enthalte kein z, sondern nur x, y, t. Die Gleichung in φ wird daher

$$gh\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Aber auch nach dieser Vereinfachung selbst ist sie doch noch viel zu verwickelt, um auf eine vollkommene Art integrirt werden zu können. Uebrigens ist diese Gleichung völlig derjenigen der Bewegung der Wellen in einer horizontalen und wenig tiefen Röhre ähnlich. Man sehe (Abschn. 37.)

Bis jetzt hat man nur den Fall vollkommen auflösen können, wo man die Luft nur von einer Dimension ansieht, d. h. den Fall einer tönenden Linie, deren Theilchen nur in die Länge sich bewegen.

In diesem Falle enthält also, wenn man eben diese Linie für die Achse x annimmt, die Funktion φ kein y und die obige Gleichung wird auf diese gebracht:

$$gh\,\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

welche derjenigen der schwingenden Seiten ähnlich ist, und zum vollkommnen Integral hat

$$\varphi = F(x + t\sqrt{gh}) + f(x - t\sqrt{gh}),$$

wenn man durch die Charakteristicken oder Zeichen F und f, 2 willkührliche Funktionen andeutet.

Diese Formel schließt 2 wichtige Theorien in sich, die des Schalls der Flöten oder Orgelröhren, und die der Fortpflanzung des Schalls in der freien Luft. Man hat also nur die beiden willkührlichen Funktionen gehörig zu bestimmen, und die Principien, die bey dieser Bestimmung zum Leitfaden dienen müssen, sind folgende:

Digitized by Google

11) Bey den Flöten hat man nur die darin enthaltene tönende Linie zu betrachten. Man nimmt an, der anfängliche Zustand dieser Linie sey gegeben, indem dieser von den den Theilchen eingedrückten Erschütterungen abhängt, und man verlangt das Gesetz der Schwingungen zu wissen.

Der Anfang der Abscissen x sey eine der Enden dieser Linie, und ihre Länge d. h. die der Flöte sey = a. Die Verdichtungen s und die Längen-Geschwindigkeiten p sind folglich gegeben, wenn t = o von x = o bis x = a; wir wollen sie S und P nennen.

Da nun $s = \frac{d\varphi}{gh\,dt}$ und $p = \frac{d\varphi}{dx}$ und man differentiirt den allgemeinen Ausdruck von φ (10) und bezeichnet durch F' und f' die Differentialien der durch F und f bezeichneten Funktionen, so daß

$$F'x = \frac{dFx}{dx},$$

$$f'x = \frac{dfx}{dx};$$

so hat man

$$p = F'(x + t\sqrt{gh}) + f'(x - t\sqrt{gh})$$
$$s\sqrt{gh} = F'(x + t\sqrt{gh}) - f'(x - t\sqrt{gh}).$$

Setzt man daher t = o und verwandelt p in P und s in S; so hat man

$$P = F'x + f'x,$$
$$S\sqrt{gh} = F'x - f'x.$$

Da nun P und S für jede Abscisse x von x = o bis x = a gegeben ist; so hat man auch in diesem Anfange die Werthe von F'x und f'x; folglich hat man auch die Werth von p und s für eine Abscisse und eine gewisse Zeit, soweit $x \pm t\sqrt{g}$ hin den Grenzen o und a eingeschlossen sind.

Da

Digitized by Google

Da aber die Zeit t immer wächst; so werden die Größen $x + t\sqrt{gh}$ und $x - t\sqrt{gh}$ bald diese Grenzen überschreiten, und die Bestimmung der Funktionen $F'(x + t\sqrt{gh})$, $f'(x - t\sqrt{gh})$ hängt alsdenn von den Bedingungen ab, die an den Enden der tönenden Linie, je nachdem die Flöthe offen oder verschlossen ist, statt haben.

12) Wir wollen zuerst die Flöte als an beiden Enden offen ansehn, so daß die tönende Linie darin sogleich mit der äussern Luft in Verbindung steht. Alsdann ist klar, daß ihre Elasticität in diesen beiden Punkten nur durch den beständigen Druck der Atmosphäre im Gleichgewicht gehalten wird, und also die Verdichtung s allezeit $= o$ seyn muß. In diesem Falle hat man also $s = o$, wenn $x = o$ und $x = a$, wie auch der Werth von t beschaffen seyn mag, welches die beiden Bedingungen zu erfüllen giebt

$$F(t\sqrt{gh}) - f'(-t\sqrt{gh}) = \sigma;$$
$$F'(a + t\sqrt{gh}) - f'(a - t\sqrt{gh}) = \sigma;$$

welche allezeit statt finden müssen, wenn t einen gewissen positiven Werth hat.

Nimmt man daher für z irgend eine positive Größe an; so erhält man

$$F'(a + z) = f'(a - z) \text{ und}$$
$$f'(-z) = F'z.$$

Solange also 1) $z < a$; so wird man die Werthe von $F'(a + z)$ und $f'(-z)$ kennen, indem man sie auf $f'(a - z)$ und $F'z$ bringen kann, welche gegeben sind.

Wir wollen in diesen Formeln $a + z$ statt z setzen; alsdann geben sie

$$F'(2a + z) = f'(-z) = F'z$$
$$f'(-a - z) = F'(a + z) = f'(a - z).$$

Solange

Digitized by Google

Solange 2) $z < a$ kennt man auch die Werthe von $F'(2a + z)$ und $f'(-a - z)$; indem sie sich auf die von $F'z$ und $f'(a - z)$ bringen lassen, welche gegeben sind.

Setzen wir von neuem in den beiden letzern Formeln $a + z$ für z und verbinden sie mit den erstern, weil z beschaffen seyn kann, wie man will; so hat man

$$F'(3a + z) = F'(a + z) = f'(a - z),$$
$$f'(-2a - z) = f'(-z) = F'z.$$

Endlich kennt man 3) solange $z < a$, noch die Werthe von $F'(3a + z)$ und $f'(-2a - z)$, indem diese sich auf die gegebenen Werthe von $F'z$ und $f'(a - z)$ bringen lassen. Eben so findet man, wenn man wiederum $a + z$ für z setzt

$$F'(4a + z) = f'(-z) = F'z,$$
$$f'(-3a - z) = F'(a + z) = f'(a - z),$$

woraus man 4) die Werthe von $F'(4a + z)$ und $f'(-3a - z)$, so lange $z < a$ ist, findet u. s. f.

Auf diese Art hat man also die Werthe der Funktionen $F'(x + t\sqrt{gh})$ und $f'(x - t\sqrt{gh})$ wie auch die Zeit t, die seit dem Anfange der Bewegung der tönenden Linie verflossen ist, seyn mag. Für jeden Augenblick kennt man daher den Zustand dieser Linie d. h. die Geschwindigkeiten p und die Verdichtungen s von jedem ihrer Theilchen.

Aus den vorhergehenden Formeln ist es einleuchtend, daß die Werthe dieser Funktionen dieselben bleiben werden, wenn man die Größe $t\sqrt{gh}$ um $2a$ oder $4a$, $6a$ u. s. w. vermehrt. Die schallende Linie wird folglich nach jedem durch die Gleichung $t\sqrt{gh} = 2a$ bestimmten Zeitraum, genau in denselben Zustand wieder zurückkommen. Dadurch erhält man $\frac{2a}{\sqrt{gh}}$ für diesen Zeitraum.

Die

Digitized by Google

Die Dauer der Schwingungen der schallenden Linie ist von den primitiven Erschütterungen unabhängig, und hängt allein von der Länge a dieser Linie und der Höhe h der Atmosphäre ab.

Setzen wir die beschleunigende Kraft der Schwere $g = 1$; so muß man für die Einheit der Räume das doppelte von dem nehmen, den ein schwerer Körper frei in der zur Einheit angenommenen Zeit durchläuft (2 Abschn. 2). Nimt man also, welches geschehn kann, h zur Einheit der Räume an; so ist die Einheit der Zeit diejenige, welche ein schwerer Körper zubringt, um von einer Höhe $= \frac{h}{2}$ zu fallen, und die Zeit einer Schwingung der schallenden Linie wird durch $2a$ ausgedrückt werden; oder welches auf eins hinauskommt, die Zeit einer Schwingung wird sich zu derjenigen des Falls eines Körpers von der Höhe $\frac{h}{2}$ verhalten, wie $2a : h$.

13) Wäre die Flöte an ihren beiden Enden verschlossen; so könnten die Verdichtungen s seyn wie sie wollten, indem die Elasticität der Theilchen durch den Widerstand der Wände erhalten würde; aber aus derselben Ursache müßten die Geschwindigkeiten p hier $= o$ seyn, welches von neuem die Bedingungen gäbe

$$F'(t\sqrt{gh}) + f'(-t\sqrt{gh}) = o,$$
$$F'(a + t\sqrt{gh}) + f'(a - t\sqrt{gh}) = o.$$

Diese Formeln kommen mit denen überein, die wir oben untersucht haben, wenn man darin nur die durch f' bezeichnete Funktion negativ setzt. Es lassen sich also daraus auch ähnliche Schlüsse ziehn, und man hat denselben Ausdruck für die Dauer der Oscillationen der schallenden Fiber.

Anders würde es sich verhalten, wenn die Flöte an einem Ende offen, am andern verschlossen wäre.

Alsdann müßte s allezeit im offenen Ende $= o$ und im verschlossenen $p = o$ seyn.

Digitized by Google

Nimt man also die Flöte offen oder $x = o$ und verschlossen oder $x = a$ an; so hat man die Bedingungen

$$F'(t\sqrt{gh}) - f'(-t\sqrt{gh}) = o,$$

$$F'(a + t\sqrt{gh}) + f'(a - t\sqrt{gh}) = o.$$

Daraus zieht man durch eine (12) ähnliche Analyse die folgenden Formeln

$$F'(a + z) = -f'(a - z),$$

$$f'(-z) = F'z,$$

$$F'(2a + z) = F'z,$$

$$f'(-a - z) = -f'(a - z),$$

$$F'(3a + z) = f'(a - z),$$

$$f'(-2a - z) = -F'z,$$

$$F'(4a + z) = F'z,$$

$$f'(-3a - z) = f'(a - z)$$

u. s. f.

So oft also $z < a$; so sind die Funktionen $F'z$ und $f'(a - z)$ durch den primitiven Zustand der schallenden Fiber gegeben; vermittelst derselben wird man also auch die Werthe der andern Funktionen

$$F(a + z),\ F'(2a + z) \ldots \text{etc.}$$

$$f'(-z),\ f'(-a - z) \ldots \text{etc.}$$

erkennen, und man erhält folglich den Zustand der Fiber nach einer gewissen Zeit t.

Aus den vorhergehenden Formeln sieht man aber, daß dieser Zustand nur nach einer durch die Gleichung $t\sqrt{gh} = 4a$ bestimmten

Zeit

Digitized by Google

Zeit einerlei wird; woraus folgt, daß die Dauer der Vibrationen einmal länger als bey den an beiden Enden offenen oder verschlossenen Flöten seyn wird. Dies beweißt auch die Erfahrung in Ansehung der Orgelspiele, die man auf französisch bour dons nennt, und die an ihrem obern dem Munde entgegengesetzten Ende geblasen den Ton einer niedrigern Oktave, als wenn sie offen wären, geben.

Man sehe übrigens über die Theorie der Flöten die beiden ersten Bände der Turiner Akademie, die Memoiren von Paris für 1762 und die Novi Commentarii von Petersburg 16 Band.

14) Wir wollen jetzt eine schallende Linie von unbestimmter Länge betrachten, die nur in einem sehr geringen Umfange im Anfange eine Erschütterung erleide; alsdann hat man den Fall von Bewegungen der Luft durch schallende Körper.

Wir wollen annehmen, die anfänglichen Geschwindigkeiten erstreckten sich nur von $x = 0$ bis $x = a$, wenn a eine sehr geringe Größe ist. Die Geschwindigkeiten p und anfänglichen Verdichtungen P, S sind folglich für alle Abscissen x gegeben; sie mögen nun positiv oder negativ seyn; aber würkliche Werthe werden sie nur von $x = 0$ bis $x = a$ haben. Ausserhalb dieser Grenzen werden sie völlig $= 0$ seyn. Ebenso wird es sich folglich mit den Funktionen $F'x$ und $f'x$ verhalten, weil man, wenn man $t = 0$ macht, hat

$$P = F'x + f'x$$

$$S\sqrt{gh} = F'x - f'x$$

und folglich

$$F'x = \frac{P + s\sqrt{gh}}{2},$$

$$f'x = \frac{P - s\sqrt{gh}}{2}.$$

Digitized by Google

Hieraus folgt, daß, wenn man für z eine positive Größe nimt, die $< a$ ist, die Funktionen $F'(x + t\sqrt{gh})$ und $f'(x - t\sqrt{gh})$ nur würkliche Werthe insofern haben werden, daß man $x \pm t\sqrt{gh} = z$ hat. Folglich werden nach einer Zeit t die Geschwindigkeiten p und die Verdichtungen s für alle Punkte der schallenden Linie $= o$ seyn, ausgenommen für diejenigen, die den Abscissen $x = z \mp t\sqrt{gh}$ entsprechen.

Man erklärt dadurch, wie der Schall sich fortpflanze, und wie er sich nach und nach auf beiden Seiten des schallenden Körpers und in gleichen Zeiten der schallenden an Länge der anfänglichen Fiber a gleichen Fibern bildet.

Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung dieser Fibern wird also durch den Coefficienten $\sqrt{gh}$ ausgedrückt; sie ist folglich beständig und von der primitiven Bewegung unabhängig, welches auch die Erfahrung beweißt, indem jeder Schall, er mag stark oder schwach seyn, mit einer merklich gleichen Geschwindigkeit sich fortzupflanzen scheinet.

Setzt man also wie (12) $g = 1$ und $h = 1$; so wird der absolute Werth dieser Geschwindigkeit auch $= 1$. Die Einheit der Geschwindigkeiten ist hier diejenige, die ein schwerer Körper durch seinen Fall von der Hälfte des Raums h, der zur Einheit angenommen worden ist (2 Abschn. 2) erlangen muß. Die Geschwindigkeit des Schalls wird also zu einer Höhe $\frac{h}{2}$ gehören.

15) Nehmen wir mit dem größten Theil der Physiker die Luft 850 mal leichter als das Wasser, und das Wasser 14 mal leichter als das Queckſilber; so hat man 1 : 11900 für die Verhältniß des specivischen Gewichts der Luft zu dem des Queckſilbers. Setzt man daher die mittlere Höhe des Barometers $= 28$ Französische Zoll; so kommt 333200 Zoll oder $27766\frac{2}{3}$ Fuß für die Höhe h einer gleichförmig dichten Luftsäule, die mit der Queckſilbersäule in dem Barometer das Gleichgewicht hält. Die Geschwindigkeit des Schalls wird also zu einer Höhe $13883\frac{1}{3}$ Fuß gehören, und wird folglich $= 915$ Secunden seyn.

Die Erfahrung giebt ohngefähr 1088; welches also um $\frac{1}{5}$ vom vorigen verschieden ist. Dieser Unterschied aber kann allein der Ungewißheit der

Digitized by Google

der durch die Erfahrung erhaltenen Resultate zugeschrieben werden. Man sehe hierüber besonders eine Abhandlung des verstorbenen Lambert in den Memoiren der Berliner Akademie für 1768.

16) Ist die schallende Linie auf einer Seite durch ein unveränderliches Hinderniß begrenzt; so hat das, dieses berührende Lufttheilchen keine Bewegung. Wenn folglich s der Werth der Abscisse x ist, die demselben entspricht; so muß die Geschwindigkeit $p = o$ seyn, wenn $x = s$, wie auch t beschaffen seyn mag; welches die Bedingung giebt:

$$F'(s + t\sqrt{gh}) + f'(s - t\sqrt{gh}) = o.$$

Wir haben aber gesehn, daß die Funktion $f'(s - t\sqrt{gh})$ einen würklichen Werth hat, solange $s - t\sqrt{gh} = z$ (14); weil folglich $F'(s + t\sqrt{gh}) = -f'(s - t\sqrt{gh})$; so hat die Funktion $F'(s + t\sqrt{gh})$ ebenfalls würkliche Werthe, wenn $s - t\sqrt{gh} = z$, d. h. wenn $t\sqrt{gh} = s - z$. Die Funktion $F'(x + t\sqrt{gh})$ ist folglich nicht nur würklich, wenn $x + t\sqrt{gh} = z$; sondern auch wenn $x + t\sqrt{gh} = 2s - z$; hieraus folgt, daß in diesem Falle die Geschwindigkeiten p und Verdichtung s ebenfalls würklich für die Abscissen $x = 2s - z - t\sqrt{gh}$ seyn werden.

Die schallende Fiber wird also, nachdem sie den Raum s durchlaufen hat, durch das Hinderniß, worauf sie stößt, gleichsam zurückgeworfen und mit derselben Geschwindigkeit wieder abprallen. So hat man eine sehr natürliche Erklärung der gewöhnlichen Echos.

Auf dieselbe Art wird man die zusammengesetzten Echos erklären, wenn man annimmt, daß die schallende Linie auf beiden Seiten durch unbewegliche Hindernisse beschlossen werde, die nach und nach die schallenden Fibern zurückwerfen werden, und gewisse beständige Oscillationen bewürken. Man kann hierüber die oben (3) angeführten Werke sowie die Memoiren der Berliner Akademie für 1759 und 1765 weiter nachlesen.

Beben-

Digitized by Google

Bedeutende Druckfehler.

S. 34 Z. 5, S. 199 Z. 18 u. 19 statt + lese man .

S. 48, 49, 50, 54 statt R setze man λ

S. 49 Z. 14 statt x lese man .

S. 265 Z. 6. findet sich ein Schreibfehler + $\int R\,dr$ anstatt + 2. $\int R\,dr$, dessen Folgen sich bis S. 298 und 270 fortpflanzen. Statt F lese man 2 F, statt F^2 lese man $4\,F^2$.

Von S. 285 — 300 lese man statt $\mathrm{Col}\,\psi^2\ \mathrm{sin}\,u^2$, $\mathrm{sin}\,u^4$ etc. stets $\mathrm{Col}^2\,\psi\ \mathrm{sin}^2\,u$, $\mathrm{sin}^4\,u$ etc.

Da der Verfasser wegen mehreren unternommenen Reisen, die Correktur nicht immer selbst besorgen konnte, so wird man ihm wohl diese wenigen Fehler verzeihen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

3 2044 055 037 659

Digitized by Google

Digitized by Google